DERIVATIF FUNGSI-FUNGSI BERNILAI BARISAN KONVERGEN

Skripsi

Oleh

ZAINAL ARIFIN
NPM. 2117031090

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

ABSTRACT

DERIVATIF OF FUNCTION WITH VALUED IN CONVERGENT SEQUENCE SPACES

By

Zainal Arifin

This research explores the extension of the derivative concept in classical calculus to functions whose values in real-number sequences, particularly those converging in the spaces c and c_0. The objectives of this study are to define derivatives for functions taking values in convergent sequences, to investigate the basic algebraic properties of such derivatives, and to determine the maximum and minimum values of these functions. The research method employed is a literature review with a theoretical approach. The results indicate that the derivative concept can be consistently defined for functions with values in convergent sequences and that fundamental algebraic rules—such as the rules for constant functions, identity functions, multiplication, division, addition, and subtraction—still apply. Furthermore, the differentiated functions are proven to remain within the space of convergent sequences. These findings provide a foundation for further development in functional analysis and calculus on sequence spaces.

Keywords: Derivative, convergent sequences, space c, space c_0.

ABSTRAK

DERIVATIF FUNGSI-FUNGSI BERNILAI BARISAN KONVERGEN

Oleh

Zainal Arifin

Penelitian ini membahas perluasan konsep derivatif dalam kalkulus klasik kedalam fungsi-fungsi yang bernilai barisan bilangan real, khususnya barisan konvergen ke ruang c dan c_0. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendefinisikan derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan konvergen, menyelidiki sifat-sifat aljabar dasar dari derivatif tersebut, serta menentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi-fungsi tersebut. Metode yang digunakan adalah studi pustaka dengan pendekatan teoritis. Hasil penelitian menunjukkan bahwa konsep derivatif dapat didefinisikan untuk fungsi bernilai barisan konvergen, dan berbagai sifat aljabar dasar seperti aturan fungsi konstan, identitas, perkalian, pembagian, penjumlahan, dan selisih tetap berlaku. Selain itu, fungsi-fungsi yang terdiferensialkan terbukti tetap menghasilkan barisan yang konvergen. Temuan ini membuka peluang untuk pengembangan lebih lanjut dalam analisis fungsional dan kalkulus pada ruang barisan.

Kata-kata kunci: Derivatif, barisan konvergen, ruang c, ruang c_0.

DERIVATIF FUNGSI-FUNGSI BERNILAI BARISAN KONVERGEN

ZAINAL ARIFIN

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Judul Skripsi : **DERIVATIF FUNGSI-FUNGSI BERNILAI BARISAN KONVERGEN**

Nama Mahasiswa : *Zainal Arifin*

Nomor Pokok Mahasiswa : **2117031090**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.	**Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.**
NIP 197202271998021001	NIP 199311062019032018

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si.,M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. tim penguji

Ketua : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **25 Juni 2025**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Zainal Arifin**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031090**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**DERIVATIF FUNGSI-FUNGSI BERNILAI BARISAN KONVERGEN**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi inni merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai degnan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 25 Juni 2025

Penulis,

Zainal Arifin

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Zainal Arifin yang lahir di Tulang Bawang pada tanggal 21 Februari 2003.

Penulis mengawali pendidikan Taman Kanak-kanak di TK Tri Dharma pada tahun 2008-2009. Kemudian menempuh pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri 1 Tri Dharma Wirajaya pada tahun 2009-2015. Melanjutkan pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMP Negeri 1 Banjar Agung pada tahun 2015-2018 dan melanjutkan pendidikan Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 1 Banjar Agung pada tahun 2018-2021.

Pada tahun 2021, penulis melanjutkan pendidikan Strata Satu di Jurusan Matematika FMIPA Unila melalui jalur SBMPTN. Selama menjadi mahasiswa, penulis juga aktif dalam organisasi. Pada tahun 2022 penulis menjadi anggota Bidang Keilmuan Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) dan Pada Tahun 2023 penulis menjadi anggota Dinas hubungan eksternal Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) tingkat Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Pada tahun 2024 penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di Dinas Ketenagakerjaan Kota Bandar Lampung, dan pada tahun yang sama penulis juga melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Braja Harjosari, Kecamatan Braja Slebah, Kabupaten Lampung Timur.

KATA INSPIRASI

”Tidak ada sebuah anugerah yang lebih baik dan lebih besar bagi seseorang daripada kesabaran.”
(HR. Muslim)

”Jangan biarkan kesulitas membuat dirimu gelisah, karena bagaimanapun juga hanya dimalam yang paling gelap bintang-bintang tampak bersinar lebih terang.”
(Ali Bin Abi Thalib)

”Bekerja keraslah dalam diam, dan biarkan sukses menjadi kebisinganmu”
(Frank Ocean)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "*Derivatif Fungsi-fungsi Bernilai Barisan Konvergen*" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing akademik.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Kedua orang tua tercinta, yang senantiasa memberikan doa, dukungan, serta menjadi sumber kekuatan terbesar bagi penulis.

8. Seluruh teman seperjuangan di Program Studi Pendidikan Matematika FMIPA Unila, khususnya kepada Damai, Eri, Syahreza, David, Miranda dan Rena yang telah memberikan semangat, kebersamaan, bantuan, serta dukungan selama proses penyusunan skripsi ini.

9. Teman-teman sekontrakan yang telah membersamai dan menemani penulis dalam masa-masa berkuliah ataupun sekedar mengisi waktu yaitu Nanda, Ilham, Jonathan, Awik, Ridho dan Jumi.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 25 Juni 2025

Zainal Arifin

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Kalkulus *modern* membahas turunan (derivatif) dan fungsi bernilai *real* yang terus berkembang seiring berjalannya waktu. Turunan (derivatif) adalah salah satu cabang dari diferensial kalkulus. Sejarah perkembangan turunan sangat terkait dengan perkembangan kalkulus itu sendiri. Perkembangan konsep derivatif dimulai di saat abad pertengahan dengan penggunaan konsep kecil terhingga serta pembuktian masalah astronomi berbentuk persamaan diferensial dasar yang kemudian diteruskan oleh penelitian Baskhara II dan menjadi bentuk awal derivatif. Sir Isaac Newton dan Gottfried Leibniz merupakan matematikawan yang telah merumuskan pemikiran-pemikiran tentang derivatif menjadi sebuah kesatuan konsep derivatif (Anglin, 2012).

Dalam kalkulus, derivatif dari fungsi bernilai *real* $(f : R \rightarrow R)$ adalah konsep dasar yang digunakan untuk mempelajari laju perubahan suatu fungsi. Jika f adalah suatu fungsi *real* yang kontinu, maka derivatif dari f di suatu titik x dinotasikan sebagai $f'(x)$ atau $\frac{df}{dx}$. Fungsi derivatif dapat didefinisikan dengan,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

asalkan limit ini ada dan bukan ∞ atau $-\infty$ (Purcell, dkk., 2010).

Penelitian mengenai derivatif telah beberapa kali dilakukan sebelumnya pada topik yang beragam. Penelitian mengenai integral fraksional umum dan turunan pada interval berhingga serta mendefinisikan operator kiri dan kanan dan menyelidiki interkoneksinya sehingga menghasilkan teorema dasar kalkulus fraksional yang diformulasikan untuk integral fraksional umum dan derivatif fungsi pada interval hingga serta rumus untuk integrasi dengan bagian yang melibatkan integral fraksional umum dan derivatif (Al-Refai & Luchko, 2023).

Penelitian selanjutnya dengan judul *Generalized fractional derivatives and Laplace transform*, yaitu mempelajari derivatif fraksional umum yang memiliki kernel bergantung pada suatu fungsi ruang fungsi kontinu absolut untuk menggeneralisasi transformasi Laplace agar dapat diterapkan pada integral fraksional umum dan derivatif sehingga dapat menyelesaikan beberapa persamaan diferensial biasa (Jarad & Abdeljawad, 2020).

Masih banyak penelitian lain yang berkaitan dengan derivatif seperti penelitian yang berjudul *On fractional integrals and derivatives of a function with respect to another function* mempunyai gagasan menyajikan definisi baru tentang integral fraksional umum dan derivatif fungsi dan memperoleh beberapa sifatnya seperti hubungan antar fungsi dan hukum semigrup (Nieto, dkk., 2023), serta penelitian mengenai *Fractional derivatives and cauchy problem for differential equations of fractional order* menunjukkan bahwa algoritma penyaringan gradien stokastik orde fraksional memiliki akurasi estimasi dan efisiensi komputasi yang lebih baik daripada algoritma gradien stokastik multi inovasi dan orde fraksional yang lebih tinggi dapat meningkatkan akurasi estimasi (Dzherbashian & Nersesian, 2020). Akan tetapi derivatif pada fungsi barisan konvergen belum pernah diteliti sebelumnya, maka dari itu penulis tertarik untuk melakukan penelitian mengenai derifativ fungsi bernilai barisan konvergen yang dibatasi pada fungsi yang konvergen ke C_0 dan C.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan konvergen ke c dan c_0.
2. Menyelidiki sifat-sifat aljabar dasar derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan konvergen ke c dan c_0.

3. Menentukan definisi maksimum dan minimum fungsi-fungsi bernilai barisan konvergen ke c dan c_0.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menambah pengetahuan mengenai derivatif fungsi;
2. Menambah pengetahuan mengenai barisan yang konvergen ke c dan c_0;
3. Menambah pengetahuan dalam menganalisis derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan yang konvergen ke c dan c_0.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pembahasan pada bab ini berisikan definisi-definisi yang merupakan dasar dalam membantu penelitian, definisi tersebut meliputi fungsi, limit, derivatif, barisan, anti derivatif, ruang vektor.

2.1 Fungsi

Definisi 2.1.1 Suatu fungsi f merupakan suatu aturan korespondensi yang menghubungkan setiap obyek n pada suatu himpunan, yang disebut daerah asal, dengan suatu nilai tunggal $f(a)$ dari suatu himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil fungsi (Purcell dkk, 2010).

Definisi 2.1.2 Misalkan f terdefinisi pada suatu interval terbuka yang mengandung c. Dikatakan bahwa f kontinu di c jika

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

(Purcell, dkk., 2010).

Definisi 2.1.3 Fungsi f dikatakan kontinu pada interval tertutup $I = [k, l]$ jika dan hanya jika f kontinu di setiap titik $c \in (k, l)$, kontinu kanan di k, dan kontinu kiri di l (Purcell, dkk., 2010).

Definisi 2.1.4 Jika terdapat dua fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ maka pertidaksamaan fungsinya dapat dituliskan dalam bentuk:

(a) $f(x) < g(x)$

(b) $f(x) \leq g(x)$

(c) $f(x) > g(x)$

(d) $f(x) \geq g(x)$

(Jumaidi & Fauzi, 2020).

2.2 Limit

Definisi 2.2.1 Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, suatu titik $C \in \mathbb{R}$ adalah titik bagian dari A jika untuk setiap $\delta > 0$ terdapat paling sedikit satu titik $x \in A$, $x \neq c$ sedemikian sehingga $|x - c| < \epsilon$ (Bartle & Sherbert, 2000).

Definisi 2.2.2 Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, c merupakan titik limit pada A dan $f : A \to \mathbb{R}$, dengan $L \in \mathbb{R}$ maka limit f pada c ditulis dengan $\lim_{x \to c} f(x) = L$ jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$, sedemikian sehingga jika $x \subseteq A$ dan $0 < |x - c| < \delta$, maka $|f(x) - L| < \epsilon$ (Bartle & Sherbert, 2000).

Teorema 2.2.1 Jika $f : A \to \mathbb{R}$, lalu jika c merupakan titik bagian dari A, maka f hanya dapat memiliki satu limit saja di c (Barttle & Sherbert, 2000).

Teorema 2.2.2 Misalkan n merupakan suatu bilangan bulat positif, k adalah konstanta, serta f dan g adalah fungsi-fungsi yang memiliki limit di titik c. Maka:

(a) $\lim\limits_{x \to c} k = k$

(b) $\lim\limits_{x \to c} x = c$

(c) $\lim\limits_{x \to c} [kf(x)] = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

(e) $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$

(f) $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x)$

(g) $\lim\limits_{x \to c} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} \right] = \dfrac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}, \quad \text{dengan } \lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

(h) $\lim_{x \to c} |f(x)| = \left| \lim_{x \to c} f(x) \right|$

(Purcel dkk, 2010).

2.3 Derivatif

Definisi 2.3.1 Sebuah turunan atau derivatif merupakan perhitungan pada nilai suatu fungsi yang disebabkan perubahan nilai. Derivatif fungsi f adalah fungsi lain f' yang nilainya pada sembarang bilangan x adalah.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Limit ada dan bukan merupakan ∞ dan $-\infty$,
Proses menetukan derivatif fungsi dikenal sebagai diferensial (Purcell, dkk., 2010).

Contoh 2.3.1 jika $f(x) = x^3 + 8x$, tentukanlah $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{((x+h)^3 + 8(x+h)) - (x^3 + 8x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 8h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 8) \\ &= 3x^2 + 8 \end{aligned}$$

Teorema 2.3.1 Jika dimisalkan $f'(c)$ ada, maka f akan kontinu di c (Purcell, dkk., 2010).

Bukti. Dibuktikan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Dengan mulai menuliskan $f(x)$ dalam cara yang khas.

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} . (x - c), \ x \neq c$$

Maka

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f(x) &= \lim_{h\to 0}\left[f(c) + \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot(x-c)\right]\\ &= \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot\lim_{h\to 0}(x-c)\\ &= f(c) + f'(c)\cdot 0\\ &= f(c) \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Teorema 2.3.2 Jika dimisalkan $f(x) = k$, k merupakan sebarang konstanta maka pada sebarang k, $f'(x) = 0$; yaitu,

$$D_x(k) = 0$$

(Purcell, dkk., 2010).

Bukti.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0 \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.3.3 Proses yang menentukan derivatif fungsi disebut dengan diferensiasi. Diferensiasi dapat digunakan dengan tidak menggunakan Definisi 2.2.1, melainkan dengan menggunakan aturan-aturan sebagai berikut (Purcell, dkk., 2010).

1. Aturan fungsi konstan
   Jika $f(x) = k$, dengan k adalah konstanta, maka untuk setiap $x, D_x(k) = 0$
2. Aturan fungsi identitas
   Jika $f(x) = x$, maka untuk setiap $x, D_x(x) = 1$
3. Aturan pangkat
   Jika $f(x) = x^n, n$ adalah bilangan bulat positif, maka $D_x(x^n) = nx^{n-1}$
4. Aturan kelipatan konstanta
   $D_x[k \cdot f(x)] = k \cdot D_x f(x)$

5. Aturan jumlah
   $D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$
6. Aturan selisih
   $D_x[f(x) - g(x)] = D_x f(x) - D_x g(x)$
7. Aturan perkalian
   $D_x[f(x)g(x)] = f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x)$
8. Aturan pembagian
   $D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{[g(x)]^2}$

2.4 Barisan

Definisi 2.4.1 Misal $\bar{x} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ adalah suatu barisan. Dapat didefinisikan sebagai suatu fungsi $\bar{x}$ yang daerah asalnya (*domain*) merupakan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan daerah hasilnya (*range*) termuat dalam himpunan bilangan real $\mathbb{R}$. Nilai dari fungsi $\bar{x}$ pada $n \in \mathbb{N}$ membentuk suatu barisan yang dinotasikan dengan $\bar{x} = (x_n)$ yaitu $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ (Bartle & Sherbert, 2000).

Contoh 2.4.1 diberikan barisan $(x_n) = (\frac{1}{n})$ dengan $n = 1, 2, 3, \ldots$. Sehingga, $(\frac{1}{n}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ merupakan barisan bilangan *real*.

Tanda kurung merupakan pembeda antara notasi barisan dan himpunan. Dapat diilustrasikan jika $\bar{x} = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}$ adalah suatu barisan, maka unsur-unsur dalam barisannya ditulis secara berurutan dari kiri ke kanan, yaitu $\bar{x} = (-1, 1, \ -1, 1, \ldots)$. Sedangkan, jika $\bar{x} = \{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ adalah suatu himpunan maka unsur-unsur dalam himpunannya dapat ditulis berurutan namun tidak dapat diulang yaitu $\bar{x} = \{-1, 1\}$.

Definisi 2.4.2 Barisan bilangan real $\bar{x} = (x_n; n \in \mathbb{N})$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$ atau limit dari (x_n) adalah x, jika $\forall\epsilon > 0$ terdapat bilangan asli N_0 sedemikian sehingga $\forall n \geq N_0$, maka $|x_n - x| < \epsilon$. Barisan yang mempunyai limit disebut barisan konvergen yang dinyatakan dengan $\lim_{n\rightarrow\infty} x_n = x$. Sedangkan, barisan yang tidak mempunyai limit disebut barisan divergen (Bartle & Sherbert, 2000).

Contoh 2.4.2 Akan ditunjukkan barisan $(\frac{1}{k})$ konvergen. Sebab untuk setiap $\epsilon > 0$ ada bilangan asli n_0 (bergantung pada ϵ), sehingga $k \geq n_0$ berlaku $|\frac{1}{k} - 0|$, oleh karena itu barisan $(\frac{1}{k})$ konvergen ke 0 atau barisan $(\frac{1}{k})$ mempunyai limit 0 untuk $k \to \infty$ dan ditulis dengan $\lim_{k\to\infty} |\frac{1}{k} - 0|$ atau dapat ditulis dengan $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}$.

Definisi 2.4.3 Suatu barisan $x = (x_n)$ dikatakan terbatas jika dan hanya jika terdapat suatu bilangan $M \geq 0$ sehingga $|x_n| \leq M \quad \forall n \in N$. Himpunan dari semua barisan terbatas dilambangkan dengan l_∞ (Maddox, 1970).

2.5 Anti Derivatif

Definisi 2.5.1 Anti derivatif atau Integral tak tentu adalah operasi kebalikan mencari fungsi derivatif. Jika fungsi derivatif biasanya ditulis

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

maka fungsi integral ditulis sebagai

$$\int f(x)dx = F(x)$$

(Supama, dkk., 2003).

Contoh 2.5.1 $\int e^x dx = e^x + 5;$ karena $\frac{d(e^x+5)}{dx} = e^x$

Definisi 2.5.2 Apabila diketahui $\int f(x)dx = F(x)$ maka dapat ditulis pula $\int f(x)dx = F(x) + C$, dengan C sebarang konstanta real, sebab:

$$\frac{d(F(x)+C)}{dx} = \frac{d(F(x))}{dx} + \frac{dC}{dx} = \frac{d(F(x))}{dx} + 0 = f(x)$$

Jika f dan g masing-masing terintegralkan pada $[a, b]$ dan $k \in \mathbb{R}$ maka $f + g$ dan kf keduanya terintegralkan pada $[a, b]$ dan

1. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
2. $\int k\, f(x)dx = k \int f(x)dx$

Dari hasil studi tentang derivatif, beberapa fungsi integral mudah ditemukan fungsi dasarnya, yaitu:

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C;$ untuk $x \neq -1$
   $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$
3. $\int sin\ x\ dx = -cos\ x\ + C$
4. $\int cos\ x\ dx = sin\ x + C$
5. $\int sec^2\ x\ dx = tan\ x + C$
6. $\int cosec^2\ x\ dx = -cotan\ x + C$
7. $\int sec\ x\ tan\ x\ dx = sec\ x + C$
8. $\int cosec\ x\ cotan\ x\ dx = -cosec\ x + C$
9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\ a} + C; a > 0; a \neq 1$
   $\int e^x dx = e^x + C$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctanx + C$
11. $\int -\frac{dx}{1+x^2} = arccotan\ x + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsinx + C$
13. $\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arccosx + C$
14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = arcsec\ x + C$
15. $\int -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = arccosec\ x + C$

(Supama, dkk., 2003)

2.6 Ruang Vektor

Definisi 2.6.1 Misalkan V himpunan yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar bilangan *real*, V disebut ruang vektor atau ruang linear, Jika **u**, **v**, dan **w** adalah vektor-vektor dalam ruang 2 atau 3 dimensi, dan k serta l adalah skalar, maka hubungan-hubungan berikut berlaku.

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (sifat komutatif)

3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ (sifat asosiatif)
4. Ada sebuah vektor $\mathbf{0} \in V$ sehingga $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
5. Untuk setiap **u** di V, terdapat vektor balikan dari **u** atau $-\mathbf{u}$ sehingga $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$
6. Jika k skalar dan **u** sebarang vektor di V, maka $k\mathbf{u}$ berada di V atau $k\mathbf{u} \in V$
7. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ (sifat distributif)
8. $(k + 1)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + 1\mathbf{u}$
9. $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$
10. Untuk sebarang bilangan *real* 1 dan untuk setiap $\mathbf{u} \in V$ berlaku $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

(Anton & Rores, 2004).

Teorema 2.6.1 Misalkan V adalah suatu ruang vektor, **u** adalah suatu vektor pada V, dan k adalah suatu skalar, maka:

1. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
2. $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$
3. $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$
4. jika $k\mathbf{u} = \mathbf{0}$, maka $k = 0$ atau **u=0**.

(Anton & Rores, 2004).

2.7 Ruang Bernorm

Dalam subbab ini dibahas tentang ruang bernorm.

Definisi 2.7.1 Fungsi nonnegatif $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ disebut norm jika untuk setiap $x, y \in X$ dan setiap skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku:

1. $\|x\| > 0$ untuk setiap $x \in X$, $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol).
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ untuk setiap skalar α dan $x \in X$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$.

Ruang linear X yang dilengkapi dengan suatu norm $\|\cdot\|$, ditulis $(X, \|\cdot\|)$ disebut ruang bernorm (Rudin, 1921)

Definisi 2.7.2 Barisan $\{x_n\}$ di dalam ruang bernorm $(X, \|\cdot\|)$ disebut barisan Cauchy atau barisan fundamental jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0, sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ berlaku $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$. (Robert & Ronald, 2000).

Definisi 2.7.3 Ruang bernorm dikatakan lengkap (*complete*) jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen (Robert & Ronald, 2000).

Definisi 2.7.4 Barisan (x_n) di dalam ruang bernorm disebut barisan konvergen jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga jika $n \geq N$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$. (Mizrahi & Sulivan, 1949).

2.8 Maksimum dan Minimum Fungsi

Definisi 2.8.1 Misalkan S merupakan daerah asal f, c merupakan titik pada f. Diperoleh bahwa:

(a) $f(c)$ adalah **nilai maksimum** f pada S jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x di S;

(b) $f(c)$ adalah **nilai minimum** f pada S jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x di S;

(c) $f(c)$ adalah **nilai ekstrim** f pada S jika $f(c)$ adalah nilai maksimum atau nilai minimum;

(d) fungsi yang ingin dimaksimunkan atau diminimunkan adalah **fungsi objektif**.

(Purcell, dkk., 2010).

Teorema 2.8.1 Misalkan f kontinu pada sebuah interval $[b, c]$. Maka f mencapai nilai maksimum dan nilai minimum pada $[b, c]$ (Purcell, dkk., 2010).

Teorema 2.8.2 Misalkan f didefinisikan pada interval I yang memuat titik c. Jika $f(c)$ adalah nilai ekstrim, maka c haruslah berupa suatu titik kritis; dengan kata lain, c adalah salah satu dari:

(a) titik ujung dari I;

(b) titik stasioner dari f; yakni titik dengan $f'(c) = 0$; atau

(c) titik singular dari f; yakni titik dengan $f'(c)$ tidak ada.

(Purcell, dkk., 2010).

Bukti. Lihatlah kasus pertama di mana $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada I dan misalkan bahwa c bukan titik ujung atau pun titik singular. Kita harus membuktikan bahwa c adalah titik stasioner.

Sekarang, karena $f(c)$ adalah nilai maksimum, maka $f(x) \leq f(c)$ untuk semua x dalam I; yaitu

$$f(x) - f(c) \leq 0$$

Jadi jika $x < c$, sehingga $x - c < 0$, maka

$$f(x) - f(c) \leq 0,$$

sehingga

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \tag{1}$$

Sedangkan jika $x > c$, maka

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \tag{2}$$

Tetapi $f'(c)$ ada, karena c bukan titik singular. Akibatnya, ketika dimisalkan $x \to c^-$ dalam (1) dan $x \to c^+$ dalam (2), diperoleh masing-masing $\bar{f}'(c) \geq \bar{0}$ dan $f'(c) \leq \bar{0}$. Dapat disimpulkan bahwa $f'(c) = 0$, seperti yang diinginkan.

Kasus dengan $f(c)$ nilai minimum dapat dikerjakan dengan cara serupa. ■

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2024/2025 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka yaitu metode pendekatan yang pembahasannya didasarkan atas buku-buku dan artikel yang berhubungan dengan bahasan derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan konvergen. Sedangkan langkah-langkah yang dilakukan dalam melaksanakan penelitian ini adalah:

1. Mencari literatur tentang turunan fungsi bernilai barisan konvergen.
2. Mengembangkan definisi derivatif pada **Definisi 2.1.1** ke derivatif fungsi barisan.
3. Menguji keberlakuan **Teorema 2.3.3** pada derivatif fungsi barisan terbatas.
4. Mendefinisikan nilai maksimum dan minimum fungsi barisan berdasarkan **Definisi 2.8.1**.
5. Menguji apakah barisan yang telah terderivatif merupakan barisan konvergen.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Setelah mendapatkan hasil dari penelitian yang telah dilakukan, diperoleh kesimpulan terkait derivatif fungsi bernilai barisan konvergen sebagai berikut.

1. Suatu fungsi $\bar{f}(x) = (f_k(x)) : [a, b] \to \mathbb{R}^\infty$ dapat dikatakan terderivatifkan dengan

$$\bar{f}'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{f}(x+h) - \bar{f}(x)}{h}$$

   jika limit tersebut ada dan bukan ∞ atau $-\infty$.

2. Sifat-sifat aljabar derivatif fungsi konvergen

   a. Aturan fungsi konstan
   Jika $\bar{f}$ adalah fungsi yang terdiferensikan, maka $\bar{f}(x) = (a_k)_{k=1}^{\infty}$, dengan a adalah konstanta sehingga untuk setiap $x, D_x(a) = (0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) = \bar{0}$ atau $\bar{f}'(x) = \bar{0}$.

   b. Aturan fungsi identitas
   Jika $\bar{f}$ adalah fungsi yang terdiferensikan, maka $\bar{f}(x) = (kx)_{k=1}^{\infty}$, sehingga untuk setiap $x, D_x(x) = (k)_{k=1}^{\infty}$ atau $\bar{f}'(x) = (k)_{k=1}^{\infty}$.

   c. Aturan fungsi pangkat
   Jika $\bar{f}$ adalah fungsi yang terdiferensikan, maka untuk $f(x) =$

$(x^k)_{k=1}^{\infty}$ dengan k adalah bilangan bulat positif, sehingga $D_x(x^k)_{n=1}^{\infty} = (kx^{k-1})_{k=1}^{\infty}$ atau $\bar{f}'(x) = (kx^{k-1})_{k=1}^{\infty}$.

d. Aturan kelipatan konstanta
$\bar{F}$ dan $\bar{f}$ adalah fungsi-fungsi yang terdiferensikan, maka untuk $\bar{F} = a \cdot \bar{f}(x)$, $D_x[\bar{F}(x)] = a \cdot D_x\bar{f}(x)$ atau $\bar{F}'(x) = a \cdot \bar{f}'(x)$.

e. Aturan jumlah
Jika $\bar{f}$ dan $\bar{g}$ adalah fungsi-fungsi yang terdiferensikan, maka

$$D_x[\bar{f}(x) + \bar{g}(x)] = D_x\bar{f}(x) + D_x\bar{g}(x)$$

atau

$$(\bar{f}' + \bar{g}')'(x) = \bar{f}'(x) + \bar{g}'(x).$$

f. Aturan selisih
Jika $\bar{f}$ dan $\bar{g}$ adalah fungsi-fungsi yang terdiferensikan, maka

$$D_x[\bar{f}(x) - \bar{g}(x)] = D_x\bar{f}(x) - D_x\bar{g}(x)$$

atau

$$(\bar{f}' - \bar{g}')'(x) = \bar{f}'(x) - \bar{g}'(x).$$

g. Aturan perkalian
Jika $\bar{f}$ dan $\bar{g}$ adalah fungsi-fungsi yang terdiferensikan, maka

$$D_x[\bar{f}(x) \cdot \bar{g}(x)] = \bar{f}(x)D_x\bar{g}(x) + \bar{g}(x)D_x\bar{f}(x)$$

atau

$$(\bar{f}' \cdot \bar{g}')'(x) = \bar{f}(x)\bar{g}'(x) + \bar{g}(x)\bar{f}'(x).$$

h. Aturan pembagian
Jika $\bar{f}$ dan $\bar{g}$ adalah fungsi-fungsi yang terdiferensikan, maka

$$D_x\left[\frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}\right] = \frac{\bar{g}(x)D_x\bar{f}(x) - \bar{f}(x)D_x\bar{g}(x)}{[\bar{g}(x)]^2}$$

atau

$$\frac{\bar{f}'(x)}{\bar{g}'(x)} = \frac{\bar{g}(x)\bar{f}'(x) - \bar{f}(x)\bar{g}'(x)}{[\bar{g}(x)]^2}.$$

3. Misalkan S daerah asal f_k, c merupakan titk pada f_k. Maka:

(a) $f_k(c)$ adalah **nilai maksimum** f_k pada S jika $f_k(c) \geq f_k(x)$ untuk setiap x di S;

(b) $f_k(c)$ adalah **nilai minimum** f_k pada S jika $f_k(c) \leq f_k(x)$ untuk setiap x di S;

(c) $f_k(c)$ adalah **nilai ekstrim** f_k pada S jika $f_k(c)$ adalah nilai maksimum atau nilai minimum;

(d) fungsi yang ingin dimaksimumkan atau diminimumkan adalah **fungsi objektif**.

5.2 Saran

Berdasarkan pembahasan skripsi derivatif fungsi barisan konvergen ini hanya difokuskan oleh barisan yang konvergen ke c dan c_0, sehingga penulis menyarankan agar dilakukan penelitian dan pembahasan mengenai derivatif fungsi pada barisan yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Refai, M., & Luchko, Y. 2023. The general fractional integrals and derivatives on a finite interval. *Mathematics*. 11(4), 1031.

Anglin, W. S. 2012. *Mathematics: a concise history and philosophy*. Springer Science & Business Media. New York.

Anton, H., & Rorres, C. (2004). *Aljabar Linear Elementer*. Erlangga. Jakarta.

Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. 2000. *Introduction to Real Analysis*. John Wilwey & Sons, Inc. Third Edition. New York.

Dzherbashian, M. & Nersesian, A. 2020. Fractional derivatives and cauchy problem for differential equations of fractional order. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 23(6), 1810-1836.

Jarad, F., & Abdeljawad, T. 2020. Generalized fractional derivatives and Laplace transform. *Discret. Contin. Dyn. Syst. Ser*. 2020, 13, 709–722.

Jumaidi & Fauzi, A. 2020. *Matematika*. PT Gramedia. Jakarta.

Maddox, I.J. 1970. *Element of Functional Analysis*. Cambridge. University Press. London.

Mizrahi, A. & Sulivan, M. 1949. *Calculus and Analytic Geometry*. Wadsworth Publishing Company Belmont. California.

Nieto, J. J., Alghanmi, M., Ahmad, B., Alsaedi, A., & Alharbi, B. 2023. On fractional integrals and derivatives of a function with respect to another function. *Fractals*. 31(04). 2340066.

Purcell, S. E., Rigdon, Varberg, D., E. J. 2010. *Kalkulus Edisi Kesembilan, Terjemahan I Nyoman Susila*. Erlangga. Jakarta.

Robert, G. & Ronald R. 2000. *Introduction to Real Analysis*. Jhon Wiley & Sons, inc. New York.

Rudin, & Walter. 1921. *Real and Complex Analysis*. University Of California. California.

Supama, Indrati, C. R., Salmah, Surodjo, B., Tari, M., Zulijanto, A. 2003. *Kalkulus II*. FMIPA UGM. Yogyakarta.