DERIVATIF FUNGSI-FUNGSI BERNILAI BARISAN l_1

Skripsi

Oleh

AQILA SETIYA DIYANA
2117031091

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

ABSTRACT

DERIVATIVES OF SEQUENCE-VALUED FUNCTIONS IN l_1 SPACES

By

Aqila Setiya Diyana

This study explores the concept of the derivative of functions whose values lie in the sequence space l_1, which is the set of real-valued sequences whose series of absolute values converges, satisfying a specific norm defined as $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. The main focus of this research is to examine the fundamental properties of the derivative of l_1-valued functions and to investigate the existence of maximum and minimum points of these functions. The key results include the formulation of a definition for the derivative of such functions, followed by the derivation of their essential properties and the characterization of their extreme points. This study is expected to provide a meaningful contribution to the development of functional analysis, particularly in the study of sequence-valued functions in normed spaces.

Keywords: Function, Limit, Derivative, Sequence of functions, l_1 sequence.

ABSTRAK

DERIVATIF FUNGSI-FUNGSI BERNILAI BARISAN l_1

Oleh

Aqila Setiya Diyana

Salah satu bidang kajian dalam matematika adalah bidang analisis. Konsep ruang barisan termasuk yang sering dibicarakan dalam bidang tersebut. Derivatif pada fungsi-fungsi yang bernilai dalam ruang barisan l_1, yaitu ruang barisan bilangan real yang jumlah nilai absolut setiap elemennya konvergen dan memenuhi kriteria norma tertentu yang didefinisikan sebagai $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^1$. Tujuan utama dari penelitian ini adalah mengkaji sifat-sifat dasar derivatif dari fungsi-fungsi bernilai barisan l_1, serta menyelidiki keberadaan nilai maksimum dan minimum dari fungsi-fungsi tersebut. Hasil utama yang diperoleh adalah pembentukan definisi derivatif untuk fungsi-fungsi bernilai barisan l_1, diikuti dengan penurunan sifat-sifat dasarnya serta karakterisasi titik maksimum dan minimum. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap pengembangan analisis fungsional, khususnya dalam studi fungsi bernilai barisan di ruang bernorma.

Kata-kata kunci: Fungsi, Limit, Derivatif, Barisan, Barisan fungsi, Barisan l_1.

DERIVATIF FUNGSI-FUNGSI BERNILAI BARISAN l_1

Oleh

AQILA SETIYA DIYANA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Judul Skripsi	:	**DERIVATIF FUNGSI-FUNGSI BERNILAI BARISAN l_1**
Nama Mahasiswa	:	**Aqila Setiya Diyana**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031091**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.
NIP 197202271998021001

Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.
NIP 197008311999031001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr.Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim penguji

Ketua	:	**Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	:	**Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **23 Juli 2025**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Aqila Setiya Diyana**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031091**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Derivatif Fungsi-Fungsi Bernilai Barisan l_1**

Dengan ini saya menyatakan bahwa karya tulis ilmiah ini sepenuhnya merupakan hasil kerja saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh pihak lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan peraturan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 23 Juli 2025

Penulis,

METERAI TEMPEL

Aqila Setiya Diyana

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Aqila Setiya Diyana yang lahir di Grobogan pada tanggal 21 Oktober 2002. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara, putri dari pasangan Bapak Mujiman dan Ibu Sri Rejeki.

Penulis menempuh pendidikan awal di TK Islam Az-Zahra 1 Demak pada tahun 2007 sampai tahun 2009. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan di SD Negeri Wonowoso 2 pada tahun 2009 sampai tahun 2010 dan melanjutkan pendidikan dasar di SD Negeri 4 Teluk Dalem pada tahun 2010 sampai tahun 2015. Pendidikan tingkat menengah pertama ditempuh di SMP Negeri 2 Way Jepara pada tahun 2015 sampai tahun 2018, dan dilanjutkan di SMA Negeri 1 Bandar Sribhawono pada tahun 2018 sampai tahun 2021.

Pada tahun 2021, penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan resmi terdaftar sebagai mahasiswa Program Sarjana (S1) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (UNILA) melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN).

Sebagai wujud penerapan ilmu yang telat diperoleh selama masa studi, penulis melaksanakan kegiatan Kerja Praktik (PK) di Dinas Komunikasi, Informatika, dan Statistik Provinsi Lampung pada bulan Desember 2023 hingga Februari 2024. Selanjutnya, pada bulan Juli hingga Agustus 2024, penulis mengikuti program Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Jepara, Kecamatan Way Jepara, Kabupaten Lampung Timur.

KATA INSPIRASI

”Terkadang apa yang kamu inginkan berbeda dengan apa yang kamu dapatkan, bisa jadi lebih baik, bisa pula sebaliknya. Namun percayalah bahwa usaha tidak akan menghianati hasil”
(**Aqila Setiya Diyana**)

”Keberanian sejati bukanlah ketiadaan rasa takut, melainkan kemampuan untuk mengatasinya. Seorang yang berani bukanlah orang yang tidak pernah merasa takut, tetapi mereka yang mampu menaklukkan rasa takut tersebut”
(**Nelson Mandela**)

”Jangan tinggalkan apa pun untuk hari esok yang bisa dilakukan hari ini”
(**Abraham Lincoln**)

”Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya”
(**Q.S Al-Baqarah ayat 286**)

”Usaha tidak akan menghianatimu, bahkan jika itu membutuhkan waktu sepuluh tahun”
(**Jeon Jungkook-BTS**)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin
Segala puji dan syukur saya panjatkan ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat waktu. Dengan penuh rasa syukur dan kebahagiaan, saya persembahkan ungkapan terimakasih dan penghargaan yang tulus kepada:

Keluarga Tercinta

Terimakasih kepada kedua orang tuaku tercinta, atas segala pengorbanan, motivasi, doa, dan restu yang tiada henti mengiringi setiap langkahku. Terimakasih telah mengajarkan arti keteguhan dan makna dari sebuah perjalanan hidup, yang menjadi bekal berharga bagiku untuk terus tumbuh dan bermanfaat bagi sesama. Ucapan terimakasih juga aku tujukan kepada adiiku tersayang, yang selalu setia berbagi cerita dan menjadi sumber tawa di saat penat dan lelah menghampiri. Kehadiran kalian adalah kekuatan yang tak ternilai dalam perjalananku menyelesaikan tugas akhir ini.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih saya sampaikan kepada dosen pembimbing dan pembahas yang telah memberikan bimbingan, motivasi, arahan, serta ilmu yang berharga selama proses penyusunan skripsi ini.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih yang tulus untuk semua jiwa baik yang telah menghadirkan pengalaman berharga, menyemai semangat dan motivasi, serta menyertai langkahku dengan doa dan dukungan dalam setiap perjalanan.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini yang berjudul "Derivatif Fungsi-Fungsi Bernilai Barisan l_1" dengan baik dan lancar serta tepat waktu. Shalawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, sebagai teladan utama umat manusia.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis mendapat banyak bantuan, dukungan, arahan, motivasi serta saran dari berbagai pihak sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing 1 yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan petunjuk, pengarahan, serta dukungan yang sangat berarti kepada penulis dalam proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik, saran, dan evaluasi yang membangun sehingga penulis dapat memperbaiki dan meningkatkan kualitas penulisan skripsi ini.
4. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing akademik yang telah dengan sabar meluangkan waktu untuk membimbing, memberi motivasi, dan memberikan berbagai masukan, serta dukungan yang berarti kepada penulis, termasuk dalam mendengarkan setiap kesulitan yang dihadapi penulis.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

DAFTAR ISI

6. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam, Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.
8. Ayah dan Ibu, serta Pakde dan Bude yang selalu menjadi sumber motivasi, memberikan arahan, dukungan, dan nasihat yang penuh makna tanpa henti kepada menulis, serta senantiasa menyertai dengan doa terbaik untuk penulis.
9. Adek Hasna yang selalu menjadi tempat berbagi cerita di saat penulis merasa lelah, serta tak henti memberikan semangat, dan mba Rizky yang tak hanya menjadi kakak tetapi juga teman sefrekuensi terutama dalam hal K-pop.
10. Untuk sahabat-sahabat terbaikku Ayu, Desi, Echi, Nadia, Nafdha, dan Riska terimakasih atas waktu yang telah kita habiskan bersama, serta canda tawa dan kebahagiaan yang kalian bagi, baik di saat suka maupun duka.
11. Teman-teman seperjuangan Mahasiswa Aljabar (MABAR), kalian akan selalu menjadi bagian dari kisah yang tak terlupakan, bersama kita telah melewati banyak rintangan dan kebersamaan yang tak ternilai.
12. Kepada member BTS, Kim Namjoon, Kim Seokjin, Min Yoongi, Jung Hoseok, Park Jimin, Kim Taehyung, dan Jeon Jungkook yang secara tidak langsung telah menjadi penyemangat penulis melalui lagu-lagu mereka.
13. Kepada semua pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan dalam penyusunan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 23 Juli 2025
Penulis

Aqila Setiya Diyana

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Analisis matematika merupakan salah satu cabang utama dalam matematika yang berfokus pada prinsip-prinsip fundamental, seperti limit, kekontinuan, dan diferensiabilitas. Prinsip-prinsip ini menjadi inti dari berbagai aplikasi matematika (Rudin, 1991). Salah satu konsep paling mendasar dalam analisis matematika adalah turunan atau derivatif, yang digunakan untuk menggambarkan laju perubahan suatu fungsi bernilai real. Konsep ini tidak hanya menjadi fondasi dalam kalkulus diferensial, tetapi juga memiliki penerapan yang luas dalam optimisasi dan pemodelan dinamika sistem. Derivatif pertama kali diperkenalkan oleh Newton dan Leibniz pada abad ke-17, memberikan dasar teoritis untuk mempelajari fungsi bernilai real secara sistematis dan menyeluruh (Stewart, 2002).

Dalam penggunaannya, derivatif memilik berbagai notasi matematika untuk menyatakan perubahan suatu fungsi. Salah satu notasi yang umum digunakan adalah *apostrofi*, di mana turunan suatu fungsi f dinyatakan sebagai f' (dibaca "f aksen"). Secara formal, derivatif suatu fungsi f adalah fungsi lain f', yang nilainya pada sembarang bilangan c diberikan oleh

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h},$$

dengan syarat limit tersebut ada (Purcell & Varberg, 2008). Konsep ini menyediakan landasan matematika untuk memahami perubahan suatu fungsi secara lokal. Seiring perkembangan ilmu matematika, konsep derivatif telah mengalami generalisasi yang signifikan, melampaui fungsi bernilai real sederhana hingga mencakup struktur yang lebih kompleks, seperti fungsi multivariabel dan fungsi dalam ruang abstrak.

Pemahaman tentang turunan fungsi bernilai real yang telah berkembang ini, diperluas lagi menjadi turunan fungsi bernilai vektor, yang memiliki peran signifikan dalam berbagai cabang matematika dan fisika (Hamilton, 1847). Salah satu konsep penting dalam fungsi bernilai vektor adalah norma, yaitu ukuran panjang atau besar suatu vektor, yang biasanya disimbolkan dengan $|| \cdot ||$. Norma ini dapat diterapkan pada ruang vektor berdimensi apapun, sehingga menjadi alat yang sangat berguna dalam analisis vektor. Dalam bukunya yang berjudul *Functioal Analysis*, Rudin menjelaskan secara rinci tentang norma l_1 dari sebuah vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$. Norma ini didefinisikan sebagai jumlah nilai absolut dari komponen-komponen vektor tersebut, yang dirumuskan sebagai:

$$||\mathbf{v}||_1 = |v_1| + |v_2| + ...|v_n|.$$

Penerapan norma l_1, memainkan peran penting dalam analisis ruang barisan l_1, yang menjadi salah satu ruang vektor lengkap dengan sifat-sifat uniknya (Rudin, 1991).

Generalisasi konsep norma ini membuka peluang untuk pengembangan teori diferensial yang lebih luas, termasuk diferensiabilitas pada ruang fungsi dan ruang barisan. Dengan pendekatan ini, dimungkinkan untuk mempelajari sifat-sifat fungsi yang terdefinisi dalam ruang-ruang tersebut secara lebih mendalam dan sistematis. Oleh karena itu, penelitian ini berfokus pada tema **"Derivatif Fungsi-Fungsi Bernilai Barisan $\mathbf{l_1}$"** untuk mengekplorasi aplikasi teori ini dalam analisis matematika yang lebih lanjut.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mendefinisikan konsep derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan l_1.
2. Menyelidiki sifat sifat dasar derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan l_1.
3. Mendefinisikan nilai maksimum dan minimum fungsi bernilai barisan l_1.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Menambah pemahaman mengenai konsep derivatif suatu fungsi.
2. Memahami konsep serta sifat-sifat derivatif pada fungsi bernilai barisan l_1.
3. Memberikan informasi mengenai nilai maksimum dan minimum suatu fungsi bernilai barisan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini akan dipaparkan berbagai literatur dan konsep teoritis yang menjadi landasan untuk pembahasan di bagian berikutnya.

2.1 Fungsi

Fungsi adalah salah satu konsep utama yang memiliki peran penting dan mendasar dalam topik yang akan dibahas. Berikut akan diberikan definisi dari fungsi.

Definisi 2.1.1 Fungsi f adalah suatu aturan yang mengaitkan setiap elemen x dari satu himpunan yang disebut domain atau daerah asal, dengan satu elemen $f(x)$ pada himpunan lainnya. Himpunan semua nilai yang dihasilkan melalui proses ini disebut kodomain atau daerah hasil fungsi (Varberg dkk, 2010).

Contoh 2.1.1 Jika $f(x) = x^2 - 2$, maka untuk $x = 2, x = a$, dan $x = (b + c)$ berturut-turut adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 2 = 2 \\ f(a) &= a^2 - 2 \\ f(b+c) &= (b+c)^2 - 2 = b^2 + 2bc + c^2 - 2. \end{aligned}$$

Definisi 2.1.2 Misalkan f adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada suatu interval terbuka yang memuat titik c. Fungsi f dikatakan kontinu di titik c jika memenuhi:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Artinya, limit fungsi saat x mendekati c harus sama dengan nilai fungsi di titik tersbut (Purcell & Varberg, 2008).

Contoh 2.1.2 Diberikan fungsi $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ dengan titik $x = 2$, akan dicari nilai fungsi di titik tersebut dan nilai limitnya saat $x \to 2$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{2^2 - 1}{2 - 1} \\ &= \frac{4 - 1}{2 - 1} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} f(x) &= \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} \\ &= x + 1 \\ &= 2 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Karena nilai $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 3$ maka fungsi $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ kontinu di titik $x = 2$.

Definisi 2.1.3 Suatu fungsi f dikatakan kontinu pada interval tertutup $I = [a, b]$ jika dan hanya jika fungsi tersebut kontinu di setiap titik $c \in (a, b)$, kontinu dari kanan di titik a, dan kontinu dari kiri di titik b (Gunawan & Hendra, 2023).

Definisi 2.1.4 Diberikan sebarang fungsi f dari A ke B ditulis dengan

$$f : A \longrightarrow B \text{ atau } A \xrightarrow{f} B$$

dan untuk setiap $x \in A$ memiliki pasangan tunggal anggota B yaitu $f(x)$ yang disebut nilai (*value*) dari fungsi f di x

$$x \in A \xrightarrow{f} f(x) \in B.$$

Selanjutnya, $D_f = A$ disebut domain fungsi f, $C_f = B$ disebut codomain fungsi f,

$$R_f = \{f(x) : x \in D_f\}$$

disebut range fungsi f, dan

$$G_f = \{(x, f(x)); x \in D_f\}$$

disebut graph atau grafik fungsi f (Darmawijaya, 2007).

Definisi 2.1.5 Misalkan terdapat dua fungsi $f(x)$ dan $g(x)$. Maka, hubungan pertidaksamaan anatara kedua fungsi tersebut didefinisikan sebagai berikut:

a. $f(x) < g(x)$;

b. $f(x) > g(x)$;

c. $f(x) \leq g(x)$;

d. $f(x) \geq g(x)$

(Jumaidi & Fauzi, 2020).

Teorema 2.1.6 Misalkan f adalah suatu fungsi yang kontinu pada interval $[a, b]$. Maka, f adalah fungsi yang terbatas pada $[a, b]$ (Gunawan & Hendra, 2023).

Bukti. Andaikan f tidak terbatas pada $[a, b]$. Maka, terdapat suatu barisan titik (x_k) dalam $[a, b]$ sedemikian sehingga terdapat barisan

$$|f(x_k)| \to +\infty \text{ untuk } k \to \infty.$$

karena (x_k) merupakan barisan pada interval tertutup dan terbatas $[a, b]$, maka terdapat sub-barisan (x_{k_j}) yang konvergen ke suatu titik $c \in [a, b]$. Karena fungsi f kontinu di c maka:

$$f(x_{k_j}) \to f(c)$$

untuk $j \to \infty$. Artinya, limit barisan $f(x_{k_j})$ menuju suatu nilai hingga, yaitu $f(c)$, yang merupakan kontradiksi dengan anggapan bahwa $|f(x_k)| \to \infty$. Maka, asumsi f tidak terbatas adalah salah. Dengan demikian, f haruslah terbatas pada $[a, b]$. ■

2.2 Limit

Limit adalah konsep yang menggambarkan prilaku suatu fungsi atau barisan yang mendekati suatu nilai tertentu, berikut diberikan definisi, teorema, dan contoh limit.

Definisi 2.2.1 Diberikan fungsi $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan c adalah titik *cluster* dari A. Bilangan $L \in \mathbb{R}$ disebut limit fungsi f di c, jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$

sedemikian sehingga:

$$0 < |x - c| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon$$

untuk setiap $x \in A$. Limit fungsi f dengan nilai L dapat dituliskan sebagai

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

(Bartle & Sherbert, 2000).

Contoh 2.2.1 Misalkan $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, c merupaka titik *cluster* dari A, dan $f(x) = a$ untuk semua $x \in A$. Akan ditunjukkan bahwa

$$\lim_{x \to c} f(x) = a.$$

Ambil sembarang $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$, dimisalkan $\delta = 1$. Maka $0 < |x - c| < \delta$, didapat

$$|f(x) - a| = |a - a| = 0 < \epsilon.$$

Karena $|f(x) - a| < \epsilon$, maka dari definisi diperoleh

$$\lim_{x \to c} f(x) = a.$$

Teorema 2.2.2 Misalkan $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = M$, maka fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ memiliki limit sebagai berikut:

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$$

(Ayres & Mendelson, 2004).

Bukti. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Diketahui bahwa jika

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

maka terdapat $\delta_1 > 0$ sehingga

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{apabila } 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Selain itu, diketahui bahwa jika

$$\lim_{x \to a} g(x) = M,$$

maka terdapat $\delta_2 > 0$ sehingga

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{apabila } 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Pilih $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, maka untuk $0 < |x - a| < \delta$ dipenuhi

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dan} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sehingga, kita peroleh:

$$\begin{aligned}
|(f(x) + g(x)) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\
&\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M.$$

$\blacksquare$

Teorema 2.2.3 Misalkan $A \subset \mathbb{R}$ dan fungsi f adalah kontinu di $c \in A$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sehingga jika $x \in A$ dan memenuhi $|x - c| < \delta$, maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Dengan demikian, fungsi f dikatakan kontinu pada A jika f kontinu di setiap $c \in A$ (Darmawijaya, 2007).

Bukti. Misalkan f kontinu di c. Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Anggap $V = (f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon)$. Karena f kontinu di c, maka terdapat U_v dari c sehingga $f(x) \in V$ untuk setiap $x \in U_v$. Pilih $\delta > 0$ sedemikian sehingga $(c - \delta, c + \delta) \subset U_v$. Selanjutnya, untuk δ yang dipilih, maka $f(x) \in V$. Dengan demikian, jika $|x - c| < \delta$, maka

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Diberikan sebarang x_n yang merupakan barisan yang konvergen ke c dan ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $x \in A$ memenuhi $|x - c| < \delta$, maka

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Diketahui bahwa (x_n) konvergen ke c, maka terdapat $N_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $|x_n - c| < \delta$ apabila $n \geq n_0$. Jadi, untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$|f(x_n) - f(c)| < \varepsilon,$$

sehingga $(f(x_n))$ konvergen ke $f(c)$. Oleh sebab itu, fungsi f kontinu di c. ■

2.3 Derivatif

Pada subbab ini akan dijelaskan definisi, teorema, dan contoh mengenai derivatif.

Definisi 2.3.1 Derivatif atau turunan fungsi f adalah fungsi lain f' yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

dengan syarat limit ini ada dan bukan ∞ atau $-\infty$ (Varberg dkk, 2010).

Contoh 2.3.1
Jika $f(x) = 6x - 3$, carilah $f'(x)$. Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[6(2+h) - 3] - [6(2) - 3]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{12 + 6h - 3 - 12 + 3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{6h}{h} = 6.
\end{aligned}$$

Teorema 2.3.2 Jika $f'(c)$ ada, maka f adalah kontinu di c

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Tuliskan $f(x)$ sebagai:

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c), \quad x \neq c.$$

Dengan demikian didapatkan:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} f(x) &= \lim_{x\to c}\left[f(c) + \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot(x-c)\right].\\ &= \lim_{x\to c} f(c) + \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot\lim_{x\to c}(x-c).\\ &= f(c) + f'(c)\cdot 0\\ &= f(c)\end{aligned}$$

■

(Stewart, 2002).

Teorema 2.3.3 Jika f dan g merupakan fungsi-fungsi yang dapat terdiferensiasikan, maka

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

atau

$$D_x[f(x)+g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x).$$

Bukti. Misalkan $F(x) = f(x) + g(x)$. Maka

$$\begin{aligned}F'(x) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{[f(x+h)+g(x+h)]}{h} - \frac{[f(x)+g(x)]}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

■

(Varberg dkk,2010).

Teorema 2.3.4 Jika f dan g merupakan fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

atau

$$D_x[f(x)-g(x)] = D_x f(x) - D_x g(x).$$

Bukti. Misalkan $F(x) = f(x) - g(x)$. Maka

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-g(x+h)]}{h} - \frac{[f(x)-g(x)]}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x) - g'(x) \end{aligned}$$

■

(Varberg dkk,2010).

Teorema 2.3.5 Jika f dan g merupakan fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

atau

$$D_x[f(x)\cdot g(x)] = f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x).$$

Bukti. Misalkan $F(x) = f(x)\cdot g(x)$, Maka

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-g(x)}{h} + \frac{g(x)\cdot f(x+h)-f(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\cdot \lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \end{aligned}$$

■

(Varberg dkk,2010).

Teorema 2.3.6 Jika f dan g merupakan fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan dengan $g(x) \neq 0$, maka

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

atau

$$D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{g^2(x)}$$

Bukti. Misalkan $F(x) = \frac{f(x)}{g(x0}$. Maka

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(x)f(x+h)-g(x)f(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ \left[g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right] \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \right\} \\
&= [g(x)f'(x)-f(x)g'(x)]\frac{1}{g(x)g(x)}.
\end{aligned}$$

■

(Varberg dkk,2010).

2.4 Barisan

Barisan adalah himpunan bilangan yang disusun dalam suatu urutan tertentu, berikut diberikan definisi dari barisan.

Definisi 2.4.1 Barisan adalah fungsi f dari himpunan asli $\mathbb{N}$ ke himpunan bilangan real $\mathbb{R}$. Artinya setiap bilangan asli n dipetakan ke suatu bilangan real x_n, sehingga barisan tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

dengan n sebagai indeks bilangan asli $\mathbb{N}$ (Purcell & Varberg, 2008).

Definisi 2.4.2 Barisan (a_n) di ruang metrik disebut barisan cauchy bila untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positif N sedemikian sehinggan untuk semua $m, n \geq N$ berlaku:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

(Rudin, 1991).

Contoh 2.4.2 Barisan $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, dengan $n \in \mathbb{N}$, menghasilkan elemen

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, ...$$

merupakan barisan cauchy. Bukti:
Untuk $\varepsilon > 0$, pilih $N > \frac{2}{\varepsilon}$. Maka untuk $m, n \geq N$ berlaku

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \geq \left|\frac{1}{n}\right| + |\frac{1}{m}\Big| \geq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} < \varepsilon.$$

Definisi 2.4.3 Barisan a_n dikatakan terbatas jika dan hanya jika terdapat suatu bilangan real possitif $M > 0$ sedemikian sehingga $|a_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ (Maddox, 1970).

Contoh 2.4.3 Diberikan barisan $a_n = (-1)^n$, untuk $n \in \mathbb{N}$. Barisan ini dikatakan terbatas karena hanya bernilai 1 dan -1, maka bisa diambil $M = 1$.

Definisi 2.4.4 Suatu barisan, $\{x_n\}$ dikatakan konvergen jika ia mempunyai nilai limit. Misal L adalah bilangan real sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positif N sehingga untuk semua $n \geq N$, berlaku

$$|x_n - L| < \varepsilon.$$

Bilangan L disebut limit dari barisan tersebut, dapat ditulis sebagai berikut

$$\lim_{n \to \infty} x_n = L$$

dan menyatakan bahwa x_n ”mendekati” L ketika n menuju tak hingga. Sebaliknya, sebuah barisan dikatakan divergen jika tidak memiliki limit yang terdefinisi (Bartle & Sherbert, 2000).

Teorema 2.4.5 Setiap barisan bilangan real yang konvergen selalu terbatas (Martono, 1984).

Bukti. Misalkan barisan bilangan real $\{a_n\}$ konvergen ke a, akan ditunjukkan terdapat suatu bilangan real $M > 0$ sehingga

$$|a_n| \leq M$$

untuk setiap $n \in N$.
Karena $\{a_n\}$ konvergen ke a, maka terdapat suatu $n_0 \in N$ sehingga

$$n > n_0 \to |a_n - a| < 1.$$

Akibatnya

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

untuk setiap $n > n_0$.
Ambillah

$$M = maks(|a_1|, |a_2|, ..., |a_{n0}|, |a| + 1)$$

maka setiap $n \in M$ berlaku

$$|a_n| \leq M$$

yang berarti bahwa barisan bilangan real $\{a_n\}$ terbatas. ■

2.5 Deret

Konsep deret menjadi salah satu pendukung dalam penyelesaian masalah yang dibahas dalam skripsi ini. Oleh karena itu, berikut diberikan definisi tentang deret.

Definisi 2.5.1 Sebuah deret tak hingga $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dikatakan konvergen dan memiliki jumlah S, jika barisan jumlah parsial (S_n) konvergen ke S. Sebaliknya, jika barisan jumlah parsial S_n divergen, maka deret deret tersebut juga dikatakan divergen dan tidak memiliki jumlah (Purcell & Varberg, 2008).

Definisi 2.5.2 Deret yang berbentuk

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ...,$$

dengan $a \neq 0$, dinamakan deret geometri. Apabila $|r| < 1$, maka deret tersebut konvergen menuju nilai $\frac{a}{1-r}$ dan sebaliknya, jika $|r| > 1$, deret tersebut divergen (Purcell & Varberg, 2008).

Definisi 2.5.3 Deret yang berbentuk $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ...$ di mana p konstanta disebut deret p. Jika $p > 1$ maka deret p konvergen dan jika $p \leq 1$ maka deret p divergen (Purcell & Varberg, 2008).

Definisi 2.5.4 Misalkan f adalah fungsi kontinu, positif, tidak naik pada interval $[1, \infty)$ dan andaikan bahwa $a_n = f(n)$ untuk semua bilangan bulat positif n. Maka deret tak hingga

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergen jika dan hanya jika integral tak wajar

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

konvergen (Purcell & Varberg, 2008).

Definisi 2.5.5 Andaikan bahwa $a_n \geq 0, b_n > 0$, dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

jika $0 < L < \infty$, maka $\sum a_n$ dan $\sum b_n$ bersama-sama konvergen atau divergen. Jika $L = 0$ dan $\sum b_n$ konvergen, maka $\sum a_n$ divergen (Purcell & Varberg, 2008).

Definisi 2.5.6 Misalkan $(|a_n|^{\frac{1}{n}})$ terbatas dan $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = L$. Jika $L < 1$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen; jika $L > 1$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen (Gunawan & Hendra, 2023).

2.6 Ruang Barisan

Untuk mencapai tujuan dari penelitian ini, berikut diberikan definisi ruang barisan.

Definisi 2.6.1 Diberikan suatu bilangan real p dengan $1 \leq p < \infty$, ruang barisan l_p terdiri dari semua barisan bilangan real $\bar{x} = \{x_1, x_2, x_3, ...\} = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ yang memenuhi syarat bahwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = |x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p + ...$$

konvergen, atau dengan kata lain,

$$l_p = \left\{ \bar{x} = (x_k)_{k=1}^{\infty} : \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right) < \infty \right\}$$

dengan norma pada l_p yaitu

$$||\bar{x}||_p = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

(Kreyszig, 1989).

Definisi 2.6.2 Ruang l_∞ adalah himpunan semua barisan $\bar{x} = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\} = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ sedemikian sehingga terdapat bilangan real M sehingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Dengan norma pada l_∞ yaitu

$$\|\bar{x}\|_\infty = \text{sup}_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

(Kreyszig, 1989).

2.7 Ruang Vektor

Ruang vektor merupakan konsep fundanmental dalam aljabar linier yang menjadi dasar untuk berbagai cabang matematika, berikut diberikan definisi mengenai ruang vektor.

Definisi 2.7.1 Ruang vektor adalah himpunan tak kosong V yang dilengkapi dengan fungsi penjumlahan vektor $(+) : V \times V \rightarrow V$ dan fungsi perkalian skalar $(\cdot) : \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ sehingga untuk setiap skalar $a, b \in \mathbb{F}$ dan elemen $u, v, w \in V$ berlaku 8 aksioma berikut:

1. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (sifat asosiatif).
2. $u + v = v + u$ (sifat komutatif).
3. Terdapat $0 \in V$ sehingga $0 + u = u + 0 = u$ (elemen identitas).
4. Untuk setiap $u \in V$ terdapat vektor balikan di u atau $-u \in V$ sehingga $u + (-u) = (-u) + u = 0$ (elemen invers).
5. $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ (sifat distributif).
6. $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$ (sifat distributif).
7. $a \cdot (b \cdot u) = (a \cdot b) \cdot (u)$.
8. Berlaku $1 \cdot u = u$, dimana 1 dalah identitas perkalian.

(Maddox, 1970).

Contoh 2.7.1

1. Diberikan bilangan asli n (tetap) dan dibentuk

$$\mathbb{R}^n = \{x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n.$$

   Operasi penjumlahan dan operasi perkalian skalar didefinisikan sebagai berikut:

   a. Jumlahan (*addition*):

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

   untuk setiap $\bar{x} = (x_1, y_1, ..., x_n, \bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

   b. Perkalian skalar (*scalar multiplication)*:

$$\alpha\bar{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$

   untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

   Dapat diperlihatkan bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang vektor real.

2. $B[a, b]$, yaitu koleksi semua fungsi bernilai real yang terbatas padaa $[a, b]$, merupakan ruang vektor real terhadap operasi-operasi:

   a. Jumlahan (*addition*) :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), f, g \in B[a, b], x \in [a, b].$$

   b. Perkalian skalar (*scalar multiplication*) :

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \alpha \in \mathbb{R}, f \in B[a, b], x \in [a, b].$$

3. Jika S menyatakan koleksi semua barisan bilangan kompleks dan operasi jumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sebagai berikut:

   a. Jumlahan (*addition*):

$$\{z_n\} + \{w_n\} = \{z_n + w_n\}, \{z_n\}, \{w_n\} \in S.$$

   b. Perkalian skalar (*scalar multiplication*)

$$\alpha\{z_n\} = \{\alpha z_n\}, \alpha \in \mathbb{C}, \{z_n\} \in S.$$

Maka ditunjukkan S merupakan ruang vektor kompleks.

2.8 Ruang Bernorma

Dalam subbab ini akan dibahas definisi mengenai ruang bernorma.

Definisi 2.8.1 Misalkan X adalah suatu ruang vektor atas $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$. Fungsi $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ disebut norma jika untuk setiap $x, y \in X$ dan skalar α, berlaku:

1. $||x|| \geq 0$ dan $||x|| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$ (positif definit);
2. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$ (homogenitas);
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (ketaksamaan segitiga).

Maka pasangan $(X, \|\cdot\|)$ disebut ruang bernorma (Kreyszig, 1989).

Contoh 2.8.1

1. Ruang barisan (l_p)

$$l_p = \left\{ \bar{x} = (x_k)_{k=1}^{\infty} : \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right) < \infty \right\}$$

   dengan norma

$$||\bar{x}||_p = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

2. Ruang $C[a, b]$
   Ruang fungsi kontinu pada selang $[a, b]$, yaitu:

$$C[a, b] = \{ f : [a, b] \to \mathbb{R} \quad | f \text{ kontinu} \}$$

   dengan norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

3. Ruang euclidean $(\mathbb{R}^n)$ dengan norma

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Definisi 2.8.2 Suatu ruang bernorma $(X, \|\cdot\|)$ disebut ruang banach jika lengkap, yaitu setiap barisan cauchy di X konvergen terhadap norma ke suatu elemen di X (Kreyszig, 1989).

Teorema 2.8.3 Pada ruang bernorma $(U, ||\cdot||)$, barisan cauchy yang memiliki barisan-bagian konvergen juga akan konvergen ke vektor yang sama (Darmawijaya, 2007).

Bukti. Msalkan $\{x_n\} \subset U$ adalah barisan cauchy dengan barisan bagian $\{x_{nk}\} \subset \{x_n\}$ yang konvergen, sehingga $\lim_{k\to\infty} x_{nk} = a$ untuk $a \in U$. Maka, untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat bilangan asli n' dan n" sehingga untuk sebarang dua bilangan asli $n, m \geq n'$ berlaku

$$||x_m - x_n|| < \frac{\epsilon}{2}$$

dan untuk bilangan asli $n_k \geq n$" berakibat

$$||x_{nk} - a|| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Selanjutnya, dengan memilih bilangan asli $n_0 =$ maks$\{n', n"\}$ dan diambil n_k tetap asalkan $n_k \geq n_0$ maka diperoleh

$$||x_n - a|| \leq ||x_n - x_{nk}|| + ||x_{nk} - a|| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

untuk setiap bilangan asli $n > n_0$. Terbukti bahwa barisan Cauchy $\{x_n\} \subset U$ konvergen ke a. ■

2.9 Maksimum dan minimum fungsi

Dalam subbab ini akan diberikan definisi mengenai maksimum dan minimum fungsi.

Definisi 2.9.1 Misalkan S adalah daerah asal dari fungsi f yang memuat titik c. Maka:

a. Nilai $f(c)$ disebut **nilai maksimum** f pada S jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua $x \in S$;

b. Nilai $f(c)$ disebut **nilai minimum** f pada S jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua $x \in S$;

c. Nilai $f(c)$ disebut **nilai ekstrim** f pada S apabila merupakan nilai maksimum atau nilai minimum dari fungsi tersebut;

d. fungsi yang menjadi sasaran untuk dimaksimumkan atau diminimumkan disebut sebagai **fungsi objektif**

(Varberg dkk, 2010).

Teorema 2.9.2 Misalkan f kontinu pada sebuah interval $[a, b]$, maka f mencapai nilai maksimum dan nilai minimum pada $[a, b]$

(Varberg dkk, 2010).

Teorema 2.9.3 Misalkan f adalah fungsi yang terdefinisi pada suatu interval I yang memuat titik c. Jika $f(c)$ merupakan nilai ekstrim dari f pada interval tersebut, maka c haruslah merupakan titik kritis. Artinya, c merupakan salah satu dari:

a. Titik ujung dari interval I;

b. Titik stasioner dari f; yaitu titik di mana $f'(c) = 0$; atau

c. Titik singular dari f; yaitu titik di mana $f'(c)$ tidak ada.

(Varberg dkk, 2010).

Bukti. Pertimbangkan kasus di mana $f(c)$ adalah nilai maksimum dari f pada interval I, dan misalkan bahwa c bukan merupakan titik ujung atau pun titik singular. Dengan demikian, harus ditunjukkan bahwa $f'(c) = 0$, yaitu c adalah titik stasioner. Karena $f(c)$ adalah maksimum lokal, maka untuk setiap $x \in I$, berlaku:

$$f(x) \leq f(c) \Rightarrow f(x) - f(c) \leq 0$$

jika $x > c$, maka $x - c < 0$, sehingga:

$$\frac{f(c) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Sebaliknya, jika $x > c$, maka $x - c > 0$, sehingga:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Karena f terduferensiasikan di c (yakni, $f'(c)$ ada), maka dapat di ambil limit dua sisi dari bentuk selisih tersebut:

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{c \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Karena limit kiri dan kanan dari turunan ada dan sama, maka:

$$f'(c) \geq 0 \quad \text{dan} \quad f'(c) \leq 0 \quad \Rightarrow f'(c) = 0$$

Dengan demikian c adalah titik stasioner, seperti yang ingin dibuktikan. ■

Kasus ketika $f(c)$ merupakan nilai minimum dapat dibiktikan dengan cara yang serupa, hanya dengan membalik arah pertidaksamaan.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun akademik 2024/2025 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung yang berlokasi di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasah, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Tahapan Penelitian

Tahapan yang dilakukan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari konsep dasar dan mengkonstruksi barisan fungsi.
2. Mempelajari konsep limit dalam kaitannya dalam barisan fungsi.
3. Mencari literatur terkait derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan l_1.
4. Mengembangkan konsep derivatif untuk fungsi-fungsi bernilai barisan l_1.
5. Menunjukkan sifat-sifat derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan l_1.
6. Menyelidiki konsep nilai maksimum dan minimum serta memberikan contoh pada fungsi-fungsi bernilai barisan l_1.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari penelitian yang telah dilakukan, diperoleh kesimpulan berikut mengenai derivatif fungsi-fungsi yang bernilai dalam barisan l_1.

1. Derivatif suatu fungsi $\bar{f} : \mathbb{R} \to l_1$ atau dapat di tulis $\bar{f}' \in l_1$ dengan

$$\bar{f}'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{f}(x+h) - \bar{f}(x)}{h}$$

   asalkan nilai limitnya ada, bukan ∞ atau $-\infty$, dan

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \bar{f}' \right|^{1} \right)^{\frac{1}{1}} < \infty.$$

2. Sifat-sifat aljabar derivatif fungsi-fungsi bernilai barisaan l_1

   a. Aturan jumlah
   Jika $\bar{f}$ dan $\bar{g}$ adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka

$$(\bar{f} + \bar{g})'(x) = \bar{f}'(x) + \bar{g}'(x).$$

   b. Aturan selisih
   Jika $\bar{f}$ dan $\bar{g}$ adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka

$$(\bar{f} - \bar{g})'(x) = \bar{f}'(x) - \bar{g}'(x).$$

   c. Aturan perkalian
   Jika $\bar{f}$ dan $\bar{g}$ adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka

$$(\bar{f} \cdot \bar{g})'(x) = \bar{f}(x)\bar{g}'(x) + \bar{g}(x)\bar{f}'(x).$$

d. Aturan pembagian

Jika $\bar{f}$ dan $\bar{g}$ adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka

$$\left(\frac{\bar{f}}{\bar{g}}\right)'(x) = \frac{\bar{g}(x)\bar{f}'(x) - \bar{f}(x)\bar{g}'(x)}{\bar{g}^2(x)}.$$

3. Jika $\bar{f}$ dalah fungsi bernilai barisan dengan nilai-nilainya berada di ruang l_1, sehingga untuk setiap x pada himpunan $I \subset \mathbb{R}$ yang memuat titik c. Maka:

   a. Nilai $\|\bar{f}(c)\|_{l_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{f}(c)|$ disebut **nilai maksimum** dari $\bar{f}$ pada I jika:

   $$\|\bar{f}(c)\|_{l_1} \geq \|\bar{f}(x)\|_{l_1}$$

   untuk semua $x \in I$;

   b. Nilai $\|\bar{f}(c)\|_{l_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{f}(c)|$ disebut **nilai minimum** dari $\bar{f}$ pada I jika:

   $$\|\bar{f}(c)\|_{l_1} \leq \|\bar{f}(x)\|_{l_1}$$

   untuk semua $x \in I$;

   Apabila himpunan I merupakan suatu interval tertutup dan terbatas, yaitu $I = [a, b]$, maka terdapat **titik kritis** $c \in [a, b]$ yang memenuhi:

   $$\bar{f}'(c) = \bar{0}.$$

   atrinya semua komponen turunannya bernilai nol di titik tersebut.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil pembahasan dalam skripsi mengenai derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan l_1, disarankan kepada peneliti selanjutnya untuk mengembangkan penelitian lebih lanjut, khususnya dalam kajian derivatif fungsi-fungsi yang bernilai pada ruang barisan lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, F., & Mendelson, E. 2004. *Kalkulus.* McGraw-Hill. Third Edition.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. 2000. *Introduction to Real Analysis.* John Wilwey & Sons, Inc. Third Edition.

Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gajah Mada. Yogyakarta.

Gunawan, & Hendra. 2023. *Pengantar Analisis Real Edisi Kedua.* ITB, Bandung.

Hamilton, W. R. 1847. *On Quaternions*. D. R. Wilkins (ed). Royal Irish Academy.

Jumaidi, & Fauzi,A. 2020. *Matematika.* PT Gramedia. Jakarta.

Kreyszig, E. 1989. *Introductory Functional Analysis with Applications*. University of Windsor. Wiley. Canada.

Maddox, I. J. 1970. *Elements of Functional Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.

Martono, K. 1984. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik 2*. Angkasa. Bandung.

Purcell, E. J., & Varberg, D. 2008. *Calculus with Analytic Geometry.* Jakarta: Erlangga.

Rudin, W. 1991. *Functional Analysis*. Edisi Kedua. McGraw-Hill.

Stewart, J. 2002. *Kalkulus*. Edisi Keempat, Jilid 1. Erlangga. Jakarta.

Varberg, D., Purcell, E. J., & Ridon, S. E. 2010. *Kalkulus Edisi Kesembilan*. Terjemahan I Nyoman Susila. Erlangga. Jakarta.