

**METODE *REPRODUCING KERNEL HILBERT SPACE* DAN
APLIKASINYA DALAM *SUPPORT VECTOR MACHINE***

(Disertasi)

Oleh

**BERNADHITA HERINDRI SAMODERA UTAMI
NPM 1937061006**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025**

**METODE *REPRODUCING KERNEL HILBERT SPACE* DAN
APLIKASINYA DALAM *SUPPORT VECTOR MACHINE***

Oleh

BERNADHITA HERINDRI SAMODERA UTAMI

Disertasi

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar
DOKTOR MIPA

pada

Program Studi Doktor Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025**

Judul Disertasi

: **METODE REPRODUCING KERNEL
HILBERT SPACE DAN APLIKASINYA
DALAM SUPPORT VECTOR MACHINE**

Nama Mahasiswa

: **Bernadhita Herindri Samodera Utami**

Nomor Pokok Mahasiswa

: 1937061006

Program Studi

: Doktor MIPA

Fakultas

: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Promotor



Prof. Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.
NIP 195701011984031020

Ko-Promotor 1

Ko-Promotor 2



Ir. Warsono, M.S., Ph.D.
NIP 196302161987031003



Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP 198406272006042001

2. Ketua Program Studi Doktor MIPA



Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si.
NIP 197407262000032001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Prof. Dr. Ir. Murhadi, M.Si.**
NIP. 196403261989021001

Sekretaris : **Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.**
NIP. 197110012005011002

Anggota : **Prof. Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.**
NIP. 195701011984031020

: **Ir. Warsono, M.S., Ph.D.**
NIP. 196302161987031003

: **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**
NIP. 198301102008121002

: **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.**
NIP. 196311081989022001

: **Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si.**
NIP. 197407262000032001

: **Ir. Iing Lukman, M.Sc., Ph.D.**
NIP. -

2. Dekan FMIPA Unila

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP 197110012005011002

Direktur Pascasarjana

Prof. Dr. Ir. Murhadi, M.Si.
NIP. 196403261989021001

Tanggal Lulus Ujian Disertasi : **26 Februari 2025**

PERNYATAAN ORISINALITAS

Dengan ini saya menyatakan bahwa disertasi dengan judul “Metode *Reproducing Kernel Hilbert Space* dan Aplikasinya dalam *Support Vector Machine*” beserta seluruh isinya adalah benar-benar hasil karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan plagiarisme atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika yang berlaku dalam masyarakat keilmuan. Atas pernyataan ini saya siap menerima sanksi atau tindakan yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan pelanggaran terhadap etika akademik dalam karya saya ini, atau klaim dari pihak lain terhadap keaslian karya saya ini.

Bandar Lampung, 26 Februari 2025

Penulis,



A handwritten signature in black ink, appearing to read "Bernadhita Herindri S. Utami". The signature is fluid and cursive, written over the revenue stamp.

Bernadhita Herindri S. Utami

ABSTRACT

REPRODUCING KERNEL HILBERT SPACE METHOD AND ITS APPLICATION IN SUPPORT VECTOR MACHINE

By

Bernadhita Herindri Samodera Utami

Reproducing Kernel Hilbert Space (RKHS) is the Hilbert space of the set of functions that the kernel function can reproduce. The development of data science has made RKHS a method that refers to an approach or technique using the concept of reproducing kernels in certain applications, especially machine learning. Support Vector Machine (SVM) is one of the machine learning methods included in the supervised learning category for classification and regression tasks. This research aims to determine the form of linear kernel functions, polynomial kernel functions, and Gaussian kernel functions in Support Vector Machine analysis and to analyze their performance in Support Vector Machine classification and regression. Application of the RKHS method in SVM classification analysis using World Disaster Risk Dataset data published by Institute for International Law of Peace and Armed Conflict (IFHV) from Ruhr-University Bochum in 2022 obtained results that are based on the results. By comparing the predictions of training data and testing data using linear kernel functions, polynomial kernels and Gaussian kernels, it is recommended that classification using linear kernels provides the best prediction performance.

Keywords: linear kernel function, polynomial kernel function, Gaussian kernel function, Reproducing Kernel Hilbert Space.

ABSTRAK

METODE *REPRODUCING KERNEL HILBERT SPACE* DAN APLIKASINYA DALAM *SUPPORT VECTOR MACHINE*

Oleh

Bernadhita Herindri Samodera Utami

Reproducing Kernel Hilbert Space (RKHS) merupakan ruang Hilbert dari himpunan fungsi-fungsi yang dapat direproduksi oleh fungsi kernel. Perkembangan sains data menjadikan RKHS sebagai suatu metode yang mengacu pada pendekatan atau teknik menggunakan konsep *reproducing kernel* dalam aplikasi tertentu, khususnya *machine learning*. *Support Vector Machine* (SVM) merupakan salah satu *machine learning* yang tergolong dalam kategori *supervised learning* untuk tugas klasifikasi dan regresi. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui bentuk fungsi kernel linear, fungsi kernel polinomial, dan fungsi kernel Gaussian pada analisis *Support Vector Machine*. Selanjutnya, penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kinerja fungsi kernel, fungsi kernel polinomial, dan fungsi kernel Gaussian pada *Support Vector Machine* klasifikasi dan regresi. Aplikasi metode RKHS dalam analisis SVM klasifikasi dengan menggunakan data *World Disaster Risk Dataset* yang dipublikasikan *Institute for International Law of Peace and Armed Conflict* (IFHV) dari Ruhr-University Bochum pada tahun 2022 diperoleh hasil bahwa perbandingan prediksi data training dan data testing menggunakan fungsi kernel linear, kernel polinomial, dan kernel Gaussian diperoleh rekomendasi bahwa klasifikasi menggunakan kernel linear memberikan kinerja prediksi yang paling baik.

Kata-kata kunci: fungsi kernel linear, fungsi kernel polinomial, fungsi kernel Gaussian, *Reproducing Kernel Hilbert Space*.

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bantul, Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta sebagai anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan Bapak Drs. Dwi Herinanto, S.E., S.Si., M.M., M.H., M.Si. dan Ibu Yasinta Dwi Indriyani, S.E., S.Pd. (†). Riwayat singkat tentang penulis disajikan sebagai berikut.

Nama	Bernadhita Herindri Samodera Utami
Tempat, tanggal lahir	Bantul (DIY), 30 Juni 1992
Riwayat pendidikan	- TK Fransiskus Pringsewu (1996-1998) - SD Fransiskus Pringsewu (1998-2004) - SMP Xaverius Pringsewu (2004-2007) - SMA Xaverius Pringsewu (2007-2010) - S1 Matematika FMIPA Universitas Lampung (2010-2014) - S1 Matematika FKIP Universitas Terbuka (2011-2014) - S2 Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada (2014-2016)
Riwayat pekerjaan	- Dosen tetap yayasan di STMIK Pringsewu (2017-2022) - Dosen tetap yayasan di Institut Bakti Nusantara (2022-2023) - Dosen tutor tutorial <i>online</i> di Jurusan Matematika FST Universitas Terbuka (2019-sekarang) - Dosen ASN PPPK di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung (2023-sekarang)
Capaian di bidang tri-darma	Hibah Penelitian Kompetitif Nasional (Skema Penelitian Dosen Pemula) Kemendikbudristek: - <i>Prototype</i> Sistem Pendeteksi dan Peringatan Dini Bencana Alam di Indonesia Berbasis <i>Internet of Things</i> (2018).

	- Pengembangan Perangkat Pembelajaran Fisika Berbasis REACT sebagai Implementasi K13 untuk Memfasilitasi Keheterogenan Gaya Belajar Siswa SMA/MA di Kota Bandar Lampung (2019). - Analisis Bilangan Kromatik Lokasi Subdivisi Graf Origami (2020). - Analisis <i>Estimator Haussman and Taylor</i> pada Model linear Data Panel (2021).
Diseminasi penelitian terkait disertasi	- <i>Sub-exact Sequence on Hilbert Space</i> pada 5th AA-SEC Universitas Pendidikan Indonesia 20-21 April 2020. - <i>The Properties of Estimating Function on Probability Hilbert Space</i> pada 9th SEAMS Universitas Gadjah Mada 25-28 Juli 2023. - <i>The Closure Properties of Kernel Function on Hilbert Space</i> pada 5th ICASMI FMIPA Universitas Lampung 14-15 Oktober 2024 .
Publikasi penelitian terkait disertasi	- <i>The Form of σ-Algebra on Probability Hilbert Space</i> terbit di <i>Journal of Mathematics and Statistics</i> Vol. 11 (3), 446-453, 2023. (Terindeks Scopus, Q3). - <i>The Kernel Function of Reproducing Kernel Hilbert Space and Its Application on Support Vector Machine</i> (status submitted) di <i>Science and Technology Indonesia</i>. (Terindeks Scopus, Q2).

KATA INSPIRASI

You can't connect the dots looking forward; you can only connect them looking backwards. So you have to trust that the dots will somehow connect in your future.

(Steve Jobs)

PERSEMBAHAN

Puji Tuhan, dengan penuh kerendahan hati disertasi ini penulis persembahkan untuk:

Mama terkasih

Yasinta Dwi Indriyani Herinanto, S.E., S.Pd. (†)

yang telah memberikan dukungan, semangat, dan selalu mendoakan untuk kelancaran dan keberhasilan penulis, kiranya saat ini Mama melihat dari surga dengan bahagia.

Papa terkasih

Drs. Christian Dwi Herinanto, S.E., S.Si., M.M., M.H., M.Si.

yang selalu mendoakan, mendukung, dan menghargai segala pilihan hidup penulis, serta selalu menjadi partner diskusi terbaik dengan segala kebijaksanaannya.

Adinda terkasih

Andreas Herindria Statistika Prapaska, S.H.

yang selalu menyayangi, menghibur, dan melindungi penulis dengan segala gurauan yang mencairkan suasana.

SANWACANA

Dengan penuh kerendahan hati, penulis mengucapkan syukur kepada Tuhan Yesus Kristus atas segala kasih-Nya yang luar biasa, telah menyertai, mendampingi, dan memberkati sehingga penulis dapat menyelesaikan disertasi ini yang berjudul “Metode *Reproducing Kernel Hilbert Space* dan Aplikasinya dalam *Support Vector Machine*” sebagai syarat untuk memperoleh gelar doktor pada program studi Doktor MIPA Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa disertasi ini dapat diselesaikan atas bantuan dan kontribusi dari beberapa pihak, untuk itu izinkanlah pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Ir. Lusmeilia Afriani, D.E.A., I.P.M. selaku Rektor Universitas Lampung.
2. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
3. Bapak Prof. Dr. Ir. Murhadi, M.Si. selaku Direktur Program Pascasarjana Universitas Lampung.
4. Ibu Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si. selaku Ketua Program Studi Doktor MIPA Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang senantiasa memberikan dukungan bagi penulis untuk menyelesaikan studi.
5. Bapak Prof. Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D. selaku Promotor dan dosen pembimbing akademik yang telah berkenan memberikan ide, saran, dan perbaikan bagi penelitian penulis.
6. Bapak Ir. Warsono, M.S., Ph.D. selaku Kopromotor I yang selalu memberikan dukungan dan motivasi bagi penulis untuk menyelesaikan disertasi.
7. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Kopromotor II atas segala kesabaran, ketulusan, dukungan, serta kesediaan meluangkan waktu di sela-sela tugas dan

kesibukannya tanpa mengenal lelah, yang telah berkenan mencurahkan segenap ide dan pemikirannya untuk memberikan bimbingan, saran dan masukan, motivasi dan afirmasi, serta pengarahan kepada penulis sehingga disertasi ini dapat diselesaikan.

8. Bapak Ir. Iing Lukman, M.Sc., Ph.D. selaku Penguji Eksternal yang telah mengkritisi serta memberikan arahan dan saran bagi perbaikan disertasi.
9. Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Penguji yang telah mencermati dengan teliti serta memberikan arahan dan saran bagi perbaikan disertasi.
10. Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si. selaku Penguji yang telah mencermati serta memberikan rekomendasi bagi perbaikan disertasi.
11. Bapak Prof. Dr. Drs. Gregorius Nugroho Susanto, M.Sc., Bapak (alm) Prof. Drs. Suharsono, M.S., Ph.D., Ibu Dr. Khoirin Nisa, S.Si, M.Si., Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc., Bapak Prof. Dr. Sutyarso, M.Biomed., Bapak Prof. Drs. Posman Manurung, M.Si., Ph.D., Bapak Prof. Drs. Wasinton Simanjuntak, M.Sc., Ph.D., Bapak Prof. Sutopo Hadi, S.Si., M.Si., Ph.D. yang dengan penuh kesabaran memberikan bimbingan, ilmu, dan membuka ruang seluas-luasnya untuk berdiskusi selama perkuliahan.
12. Mama yang terkasih Yasinta Dwi Indriyani, S.E., S.Pd. (†) yang meskipun raganya tidak lagi di dunia namun jiwanya selalu mendampingi setiap langkah penulis mengantarkan menuju kesuksesan.
13. Papa yang terkasih Drs. Christian Dwi Herinanto, S.E., S.Si., M.M., M.H., M.Si. yang telah berperan menjadi ayah sekaligus ibu yang luar biasa bagi putra-putrinya. Terima kasih telah menjadi support system bagi penulis.
14. Adinda Andreas Herindria Statistika Prapaska, S.H., M.H. yang bertugas di Kejaksaan Agung, terima kasih senantiasa menjadi penghibur.
15. Ibu Dr. Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc. yang selalu dengan penuh ketulusan memberikan perhatian dan menyayangi penulis. Terima kasih atas semua ilmu dan pencerahan yang diberikan dan terima kasih telah berkenan menjadi tempat diskusi selama ini.
16. Seluruh staf, karyawan/karyawati, dan satpam Universitas Lampung khususnya Ibu Kuswati, Ibu Anita, Pak Drajat, Pak Agus Suroso, dan Mas Yanto yang telah membantu mengurus administrasi dan ramah terhadap penulis.

17. Kolega dan seluruh rekan-rekan seperjuangan mahasiswa prodi Doktor MIPA Angkatan 2019 atas kebersamaan selama menempuh kuliah, yaitu Bapak Dr. Karyanto, S.T., M.T., Bapak Dr. Gurum Ahmad Pauzi, S.Si., M.Si., Bapak Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si., Bapak Bagus Sapto Mulyatno, S.T., M.T., dan Mbak Dr. Widyastuti, S.Si., M.Si.
18. Seluruh kolega di Institut Bakti Nusantara, khususnya Bapak Dr. Fauzi, M.E., M.Kom., M.Pd., Bapak Miswan Gumanti, M.B.A., M.M., Ibu Eka Ridhawati, M.Kom., Ibu Rara Marselina Jupon, M.Pd., dan Ibu Novi Ayu Kristiana Dewi, M.Pd. yang selalu memberikan dukungan bagi penulis.
19. Seluruh kolega di jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yaitu Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc., Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., Ibu Prof. Netti Herawati, M.Sc., Ph.D., Bapak Prof. Dr. La Zakaria, M.Si., Bapak Dr. Muslim Ansori, M.Si., Bapak Dr. Subian Saidi, S.Si., M.Si., Ibu Dr. Notiragayu, M.Si., Bapak Dr. Edwin Russel, S.E., M.Sc., Bapak Nussyirwan, S.Si., M.Si., Ibu Widiarti, S.Si., M.Si., Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si., Mbak Misgiyati, S.Pd., M.Si., Mbak Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si., Mbak Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si., Mbak Riza Sawitri, S.Pd., M.Sc., Mbak Felicia Andrade Paskalia Marpaung, S.Si., M.Si., dan Mbak Nonik Mega Sapitri, S.Pd., M.Si. yang dengan penuh kehangatan sangat bersahabat dan selalu ringan tangan memberikan ilmu kepada penulis.
20. Serta seluruh pihak yang telah memberikan bantuannya kepada penulis sehingga disertasi ini dapat terselesaikan.

Semoga Tuhan Yang Maha Kuasa senantiasa memberikan berkat yang melimpah dan membalas semua kebaikan yang telah diberikan kepada penulis. Akhirnya penulis berharap agar disertasi ini bermanfaat bagi para pembaca yang tertarik dan ingin mengembangkan ilmu statistika. Syalom. Amin.

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR GAMBAR	xv
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Tujuan Penelitian	3
1.3 Manfaat Penelitian	4
1.4 Kebaruan Penelitian	4
II TINJAUAN PUSTAKA	6
2.1 Penelitian Terdahulu	6
2.2 Ruang Vektor	7
2.3 Ruang Hasil Kali Dalam	8
2.4 Ruang Hilbert	9
2.5 Fungsi Kernel	11
2.6 <i>Reproducing Kernel Hilbert Space</i>	12
2.7 <i>Support Vector Machine</i>	13
2.7.1 Klasifikasi <i>Support Vector Machine</i>	16
2.7.2 Regresi <i>Support Vector Machine</i>	16
III METODE REPRODUCING KERNEL HILBERT SPACE DALAM SUPPORT VECTOR MACHINE	19
3.1 RKHS Sebagai Kasus Khusus Ruang Hilbert yang Dilengkapi Elemen Unit	19
3.2 Fungsi Kernel dalam RKHS	20
3.3 Fungsi Kernel Linear	24
3.3.1 Fungsi Kernel Linear pada Klasifikasi <i>Support Vector Machine</i>	25
3.3.2 Fungsi Kernel Linear pada Regresi <i>Support Vector Machine</i>	26
3.4 Fungsi Kernel Polinomial	29
3.4.1 Fungsi Kernel Polinomial pada Klasifikasi <i>Support Vector Machine</i>	29
3.4.2 Fungsi Kernel Polinomial pada Regresi <i>Support Vector Machine</i>	31

3.5	Fungsi Kernel Gaussian	33
3.5.1	Fungsi Kernel Gaussian pada Klasifikasi <i>Support Vector Machine</i>	34
3.5.2	Fungsi Kernel Gaussian pada Regresi <i>Support Vector Machine</i>	36
IV	PENERAPAN METODE <i>REPRODUCING KERNEL HILBERT SPACE</i> PADA <i>SUPPORT VECTOR MACHINE</i>	38
4.1	Aplikasi Metode RKHS pada SVM	38
4.2	Data Set	38
4.3	Klasifikasi SVM	39
4.3.1	<i>Pre-processing</i> Data	39
4.3.2	Hasil Klasifikasi Menggunakan Fungsi Kernel Linear, Kernel Polinomial, dan Kernel Gaussian	42
4.4	Regresi SVM	44
4.4.1	Estimasi Parameter Regresi SVM Menggunakan Fungsi Kernel Linear, Kernel Polinomial, dan Kernel Gaussian	44
4.4.2	Evaluasi Model Regresi SVM Menggunakan Fungsi Kernel Linear, Kernel Polinomial, dan Kernel Gaussian	47
V	KESIMPULAN DAN SARAN	58
5.1	Kesimpulan	58
5.2	Saran	59
	DAFTAR PUSTAKA	60

DAFTAR TABEL

4.1	Perbandingan Hasil Klasifikasi Menggunakan Fungsi Kernel Linear, Kernel Polinomial, dan Kernel Gaussian	43
4.2	Hasil Estimasi Parameter Menggunakan Fungsi Kernel Linear . . .	45
4.3	Hasil Estimasi Parameter Menggunakan Fungsi Kernel Polinomial .	45
4.4	Hasil Estimasi Parameter Menggunakan Fungsi Kernel Gaussian . .	46
4.5	Perbandingan Kinerja Model Regresi Menggunakan Fungsi Kernel Linear, Kernel Polinomial, dan Kernel Gaussian	48

DAFTAR GAMBAR

2.1	Ilustrasi <i>Hyperplane</i> pada Ruang Berdimensi Dua dan Ruang Berdimensi Tiga	13
4.1	Keseimbangan Data pada Variabel <i>Exposure</i>	40
4.2	Keseimbangan Data pada Variabel WRI	40
4.3	Keseimbangan Data pada Variabel <i>Vulnerability</i>	41
4.4	Keseimbangan Data pada Variabel <i>Susceptibility</i>	41
4.5	Kinerja Fungsi Kernel Linear	49
4.6	Schoenfeld Plot Regresi Fungsi Kernel Linear	50
4.7	Schoenfeld Plot Regresi Fungsi Kernel Polinomial ($d = 4$)	51
4.8	Schoenfeld Plot Regresi Fungsi Kernel Polinomial ($d = 5$)	52
4.9	Schoenfeld Plot Regresi Fungsi Kernel Polinomial ($d = 6$)	53
4.10	Schoenfeld Plot Regresi Fungsi Kernel Polinomial ($d = 7$)	54
4.11	Schoenfeld Plot Regresi Fungsi Kernel Polinomial ($d = 8$)	55
4.12	Schoenfeld Plot Regresi Fungsi Kernel Polinomial ($d = 9$)	56
4.13	Schoenfeld Plot Regresi Fungsi Kernel Gaussian	57

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Ruang Hilbert adalah suatu ruang vektor yang dilengkapi dengan struktur *inner product* (hasil kali dalam). Sebagai ruang vektor yang bersifat lengkap (*complete*), ruang Hilbert memiliki sifat bahwa setiap barisan Cauchy dalam ruang tersebut adalah konvergen. Aplikasi ruang Hilbert digunakan dalam bidang analisis, aljabar, dan statistika (Tsitsiklis dan van Roy, 1999). Aplikasi ruang Hilbert digunakan dalam analisis fungsional dan teori probabilitas. Salah satu aplikasi ruang Hilbert dalam statistika adalah metode *Reproducing Kernel Hilbert Space* (RKHS).

Reproducing Kernel Hilbert Space (RKHS) merupakan ruang Hilbert yang elemennya berupa fungsi-fungsi dengan sifat dapat direproduksi oleh fungsi kernel (Awan dkk., 2020). Komponen utama dari konsep RKHS meliputi ruang Hilbert, *reproducing property*, dan fungsi kernel (Chen dkk., 2021). Ruang Hilbert memiliki keistimewaan setiap barisan Cauchy-nya konvergen dan dilengkapi hasil kali dalam (*inner product*) untuk menghitung panjang vektor serta jarak dan sudut antar vektor. *Reproducing property* bermakna bahwa evaluasi fungsi di suatu titik dapat terdefinisi sebagai *inner product* antara fungsi awal dan fungsi kernel (Yang, 2016).

Perkembangan sains data menjadikan RKHS, yang awalnya didefinisikan sebagai ruang vektor menjadi suatu metode yang menggunakan sifat *reproducing* kernel dalam ruang vektor RKHS (Paulsen dan Raghupati, 2009). Penelitian terkait metode RKHS semakin berkembang dan menjadi dasar bagi banyak algoritma dalam statistika, *machine learning*, serta teori aproksimasi fungsi (Chen dkk., 2021).

Kontribusi metode RKHS dijelaskan dalam penelitian Paiva dkk. yang berperan di bidang neurofisiologi untuk memanipulasi lonjakan sinyal elektrik *neuron* ketika merespon rangsangan dari lingkungan yang direkam dalam interval waktu tertentu (Paiva dkk., 2019). Terapan metode RKHS juga berperan dalam industri, teknik kimia, dan proses biologi pada fluida non-Newtonian (Akgül, 2019). Dalam penelitiannya, Akgül menggunakan fungsi *reproducing kernel* sebagai solusi numerik pada metode beda hingga, metode elemen hingga, dan metode spektral un-

tuk menyelidiki persamaan diferensial nonlinear aliran nanofluida Powell–Eyring (Akgül, 2019). Di bidang model linear, Rosipal dan Trejo termotivasi membangun algoritma kernel *Partial Least Square* untuk konstruksi model regresi nonlinear dalam ruang berdimensi tinggi (Rosipal dan Trejo, 2001).

Seiring perkembangannya, metode RKHS menjadi dasar teoritis yang kuat untuk memahami dan mengembangkan algoritma *machine learning* yang melibatkan kernel (Arqub dkk., 2013). Terapan metode RKHS dalam *machine learning* dapat mengatasi masalah regresi dan klasifikasi nonlinear pada ruang fitur (istilah bagi variabel independen) berdimensi tinggi tanpa perlu menghitung transformasi secara eksplisit. Perkembangan *machine learning* tergolong cepat, hanya dalam periode sepuluh tahunan. Secara singkat, era *machine learning* dapat dikelompokkan ke dalam tiga era, yaitu era sebelum 1980, era 1980-an, dan era 1990 sampai sekarang (Suyanto, 2018).

Pada era 1990 sampai sekarang, telah berkembang metode-metode pembelajaran (*learning*) nonlinear yang efisien berbasis *computational learning theory*. Metode *Support Vector Machine* (SVM) merupakan salah satu pembelajaran mesin (*machine learning*) yang tergolong dalam kategori *supervised learning* (data terstruktur dan berlabel) (Rampisela dan Rustam, 2018). Metode SVM digunakan untuk analisis klasifikasi dan analisis regresi, dimana model dilatih menggunakan pasangan data *input* (variabel independen) dan *output* (variabel dependen) yang telah diberi label. Setelah model dilatih, mesin dapat digunakan untuk mengklasifikasikan dan membangun model regresi dari data baru yang belum pernah dilihat sebelumnya (Pisner dan Schnyer, 2020).

Pada awalnya, SVM digunakan untuk klasifikasi data hanya ke dalam dua kelas namun perkembangannya, SVM dapat diperluas untuk klasifikasi multi kelas (Cervantes dkk., 2020); (Azaravid dkk., 2015); (Pisner dan Schnyer, 2020). Metode SVM dapat mengklasifikasikan informasi linear maupun nonlinear sehingga SVM dikenal sebagai klasifikator yang menghasilkan prediksi yang baik. Hal ini didukung oleh penelitian Mohan dkk., dimana mereka telah mencoba pengenalan pola menggunakan teknik klasifikasi data mining (Mohan dkk., 2020). Hasilnya diperoleh bahwa tingkat prediksi pola yang baik dan kesalahan klasifikasi data yang rendah dihasilkan oleh algoritma SVM. Berikutnya, Zhu dkk. mengusulkan metode *Huberized Pinball Support Vector Machine* (HPSVM) untuk meningkatkan ketahanan SVM terhadap *outliers* (Zhu dkk., 2020). Hal inilah yang memotivasi penelitian ini untuk mengkaji terapan metode RKHS dalam SVM.

Komponen utama dalam metode RKHS pada SVM adalah fungsi kernel. Dalam penelitian ini dikonstruksi fungsi kernel linear, fungsi kernel polinomial, dan fungsi kernel *Radial Basis Function* (RBF) atau disebut juga kernel Gaussian

yang dijelaskan pada Bab III. Kinerja ketiga kernel tersebut dalam SVM klasifikasi dan SVM regresi akan diuji menggunakan data set yang dibahas pada Bab IV.

Salah satu hal menarik dari algoritma *Support Vector Machine* (SVM) adalah dapat diaplikasikan untuk menganalisis data kategorisasi teks, deteksi wajah, bioinformatika, bahkan digunakan untuk mengkaji wilayah bencana alam yang mencakup pola atau karakteristik yang dapat diidentifikasi oleh SVM (Ghosh dkk., 2019); (Tuo dkk., 2023); (Muthukrishnan dkk., 2020); dan (Shukla dkk., 2023). Dalam penelitian ini, aplikasi fungsi kernel pada analisis *Support Vector Machine* klasifikasi dan regresi menggunakan data wilayah risiko bencana dari 181 negara selama tahun 2011 sampai dengan tahun 2021 dibahas dalam Bab IV.

Support Vector Machine diyakini sebagai algoritma klasifikasi yang kuat dan efektif, terutama dalam menangani data berdimensi tinggi (Rampisela dan Rustam, 2018) sehingga cocok digunakan untuk analisis data resiko bencana 197 negara selama tahun 2011 sampai dengan 2021 yang merupakan data panel. Data panel adalah tipe data yang melibatkan pengamatan yang dilakukan pada unit yang sama selama beberapa periode waktu (Baltagi dkk., 2012). Dalam konteks data panel, SVM dapat digunakan untuk tugas klasifikasi atau regresi dengan mempertimbangkan struktur waktu, dependensi antar pengamatan, pilihan kernel, dan dimensi. Jika data panel memiliki struktur waktu maka SVM dapat digunakan untuk memodelkan hubungan antara variabel pada waktu tertentu berdasarkan data historis.

1.2 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, penelitian ini bertujuan untuk:

1. mengkonstruksi sifat RKHS sebagai kasus khusus ruang Hilbert yang memuat elemen unit;
2. mengkaji sifat tertutup fungsi kernel yang berlaku pada RKHS;
3. mengkonstruksi fungsi kernel linear, fungsi kernel polinomial, dan fungsi kernel Gaussian pada RKHS;
4. mengimplementasikan fungsi kernel linear, fungsi kernel polinomial, dan fungsi kernel Gaussian pada *Support Vector Machine* klasifikasi dan regresi;
5. mengaplikasikan dan membandingkan kinerja fungsi kernel linear, fungsi kernel polinomial, dan fungsi kernel Gaussian pada *Support Vector Machine* klasifikasi dan regresi menggunakan suatu data set.

1.3 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian yang diuraikan maka penelitian ini diharapkan bermanfaat dalam pengembangan keilmuan di antaranya sebagai berikut.

1. Pengembangan metode optimasi pemilihan fungsi kernel
Hasil penelitian ini bermanfaat untuk pengembangan metode optimasi pemilihan fungsi kernel yang lebih adaptif terhadap karakteristik data. Dengan pendekatan berbasis *machine learning*, dapat dikembangkan algoritma yang secara otomatis memilih fungsi kernel terbaik untuk setiap jenis data tanpa perlu uji coba manual.
2. Eksplorasi kombinasi optimal dari beberapa fungsi kernel
Hasil penelitian bahwa kombinasi linear berhingga dari fungsi kernel tetap menghasilkan fungsi kernel bermanfaat untuk eksplorasi lebih lanjut terhadap kombinasi optimal dari beberapa fungsi kernel untuk meningkatkan performa model, misalnya metode *Multiple Kernel Learning* (MKL) untuk meningkatkan akurasi model SVM atau metode lainnya.
3. Integrasi metode RKHS dengan *deep learning* untuk model *hybrid*
Penelitian ini bermanfaat untuk mengintegrasikan metode RKHS dengan *deep learning* dalam membangun model *hybrid*.

1.4 Kebaruan Penelitian

Berbeda dari penelitian sebelumnya yang berfokus pada implementasi fungsi kernel secara empiris, penelitian ini memberikan analisis matematis sifat kernel dalam RKHS, serta membandingkan kinerja fungsi kernel pada SVM secara sistematis menggunakan data set. Dengan demikian, kebaruan penelitian ini dapat diuraikan sebagai berikut.

1. Pengembangan sifat teoretis RKHS sebagai kasus khusus ruang Hilbert yang dilengkapi elemen unit.
Penelitian ini mengonstruksi sifat RKHS berdasarkan ruang Hilbert yang dilengkapi elemen unit pada ruang Hilbert.
2. Kajian sifat tertutup fungsi kernel pada RKHS.
Dengan mengkaji sifat tertutup dari fungsi kernel, penelitian ini memberikan wawasan baru tentang operasi yang berlaku dalam RKHS.

3. Implementasi dan analisis komparatif fungsi kernel pada *Support Vector Machine* (SVM) menggunakan data set.

Penelitian ini menerapkan fungsi kernel linear, fungsi kernel polinomial, dan fungsi kernel Gaussian pada SVM klasifikasi dan regresi. Dengan membandingkan kinerja kernel yang berbeda menggunakan data set, penelitian ini memberikan rekomendasi untuk memilih kernel terbaik sesuai konteks masalah.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diawali dengan artikel utama penelitian terdahulu terkait metode *reproducing kernel Hilbert space* dan *support vector machine*. Selanjutnya dijelaskan konsep dan definisi ruang vektor pada Sub bab 2.2, ruang hasil kali dalam pada Sub bab 2.3, ruang Hilbert pada Sub bab 2.4, fungsi kernel pada Sub bab 2.5, *reproducing kernel Hilbert space* pada Sub bab 2.6, dan *support vector machine* pada Sub bab 2.7 yang menjadi landasan dalam menentukan hasil dan pembahasan penelitian.

2.1 Penelitian Terdahulu

Penelitian berjudul "*Reproducing Kernel Hilbert Space, Mercer's Theorem, Eigenfunctions, Nyström Method, and Use of Kernels in Machine Learning: Tutorial and Survey*" oleh Ghojogh dkk. merupakan artikel utama yang menginspirasi penelitian ini. Dalam artikel tersebut, Ghojogh dkk. hanya menyebutkan fungsi kernel linear dan fungsi kernel Gaussian tanpa memberikan konstruksi definisi formal. Hal ini memotivasi penulis untuk mengkaji bentuk fungsi kernel linear, fungsi kernel polinomial, dan fungsi kernel Gaussian (Ghojogh dkk., 2021).

Ghojogh dkk. mendefinisikan matriks Gram sebagai matriks kernel yang menjadi dasar penulis untuk mengkonstruksi fungsi kernel linear, fungsi kernel polinomial, dan fungsi kernel Gaussian. Berikutnya Ghojogh dkk. mendefinisikan pemetaan fitur tanpa memberikan contoh (Ghojogh dkk., 2021). Kesenjangan penelitian (*research gap*) ini dimanfaatkan penulis untuk menemukan contoh pemetaan fitur beserta sifatnya.

Selain itu, Ghojogh dkk. tidak menunjukkan terapan metode RKHS dalam *machine learning* secara eksplisit (menggunakan data set) (Ghojogh dkk., 2021). Hal ini memotivasi penulis melakukan analisis kinerja fungsi kernel linear, fungsi kernel polinomial, dan fungsi kernel Gaussian dalam *machine learning*, khususnya SVM klasifikasi dan regresi.

2.2 Ruang Vektor

RKHS pada dasarnya adalah ruang vektor. Berikut ini definisi ruang vektor menurut Roman (Roman, 2008).

Definisi 2.2.1 Diberikan sebarang himpunan V yang dilengkapi operasi penjumlahan $(+)$ dan operasi perkalian $(\cdot)$. Himpunan tak kosong V disebut ruang vektor atas lapangan F jika memenuhi aksioma berikut ini.

1. Jika u dan v anggota V , maka $u + v$ berada di V .
2. Untuk setiap $u, v \in V$ berlaku $u + v = v + u$.
3. Untuk setiap $u, v, w \in V$ berlaku $u + (v + w) = (u + v) + w$.
4. Terdapat $0 \in V$ sehingga $u + 0 = 0 + u = u$, untuk setiap $u \in V$.
5. Untuk setiap $u \in V$ terdapat suatu $-u \in V$ sedemikian sehingga $u + (-u) = (-u) + u = 0$.
6. Jika $k \in F$ dan $u \in V$, maka $k \cdot u \in V$.
7. Jika $k \in F$ dan $u, v \in V$, maka $k \cdot (u + v) = k \cdot u + k \cdot v$.
8. Jika $k, l \in F$ dan $u \in V$, maka $(k + l) \cdot u = k \cdot u + l \cdot u$.
9. Jika $k, l \in F$ dan $u \in V$, maka $k(l \cdot u) = (k \cdot l)u$.
10. Untuk suatu elemen identitas terhadap perkalian, yaitu $1 \in F$ dan setiap $u \in V$ berlaku $1 \cdot u = u$.

Dalam RKHS dan SVM, data set dipandang sebagai kumpulan vektor yang berada dalam ruang fitur dan mewakili nilai-nilai nyata yang akan dianalisis. Setiap variabel dapat dipandang sebagai barisan vektor, sedangkan fitur merepresentasikan dimensi.

Sebagai contoh, jika ada data set dengan dua fitur, maka data tersebut dapat dipandang sebagai vektor dalam ruang berdimensi dua. Jadi, ruang vektor merupakan ruang yang terdiri dari semua titik (atau vektor) yang mewakili data dengan dimensi tertentu.

Contoh 2.2.2 Himpunan matriks berukuran $m \times n$ dengan entri-entrinya bilangan riil dinotasikan dengan $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$.

Dalam matriks, Ghogh dkk. mendefinisikan operasi Schur *product* sebagai berikut (Ghogh dkk., 2021).

Definisi 2.2.3 Diberikan matriks $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ berukuran $m \times n$. Schur *product* dari A dan B merupakan perkalian masing-masing elemen $a_{ij} \cdot b_{ij}$ untuk semua $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$. Schur *product* dinotasikan dengan $A \circ B$.

2.3 Ruang Hasil Kali Dalam

Ruang hasil kali dalam, atau *inner product space* yang selanjutnya ditulis RHKD merupakan ruang vektor yang dilengkapi struktur tambahan untuk mendefinisikan sudut, jarak, dan ortogonalitas (tegak lurus) antar vektor. Struktur tambahan yang selanjutnya disebut *inner product* memperluas konsep ruang vektor biasa sehingga dapat dilakukan analisis geometris yang lebih komprehensif. Berikut definisi dari ruang hasil kali dalam menurut Roman (Roman, 2008).

Definisi 2.3.1 Diberikan ruang vektor V atas lapangan bilangan riil $\mathbb{R}$. Suatu hasil kali dalam (*inner product*) pada ruang vektor V merupakan fungsi $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ yang mengasosiasikan bilangan riil $\langle u, v \rangle$ dengan masing-masing pasangan vektor u dan v pada V sedemikian sehingga untuk setiap vektor u, v, w di V dan juga untuk setiap $k \in \mathbb{R}$, berlaku:

1. bersifat simetri, yaitu untuk setiap $u, v \in V$ berlaku $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
2. bersifat definit positif, yaitu untuk setiap $v \in V$ berlaku $\langle v, v \rangle \geq 0$ dan $\langle v, v \rangle = 0$ jika dan hanya jika $v = 0$.
3. bersifat linear, yaitu untuk setiap $u, v, w \in V$ dan $k, l \in \mathbb{R}$ berlaku $\langle ku + lv, w \rangle = k\langle u, w \rangle + l\langle v, w \rangle$.

Suatu ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam dinamakan RHKD (Ruang Hasil Kali Dalam).

Dalam RHKD, didefinisikan norma (*norm*) dari vektor, yaitu ukuran panjang atau magnitude dari vektor tersebut (Roman, 2008).

Definisi 2.3.2 Jika V suatu RHKD maka *norm* atau panjang vektor $v \in V$ didefinisikan sebagai $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Berikut ini teorema penting dalam RHKD menurut Roman (Roman, 2008).

Teorema 2.3.3 Jika u dan v merupakan vektor pada suatu RHKD V maka

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

untuk setiap $u, v \in V$ (Ketaksamaan Cauchy-Schwarz).

Bukti. Diberikan suatu RHKD $V = \mathbb{R}^2$ dan $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

Didefinisikan $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2$ sehingga

$$|\langle u, v \rangle| = |u_1v_1 + u_2v_2| = \sqrt{(u_1v_1 + u_2v_2)^2} = \sqrt{(u_1^2v_1^2 + 2u_1v_1u_2v_2 + u_2^2v_2^2)}.$$

Di sisi lain, $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ dan $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ maka

$$\begin{aligned} \|u\| \cdot \|v\| &= \sqrt{(u_1^2 + u_2^2)} \cdot \sqrt{(v_1^2 + v_2^2)} \\ &= \sqrt{(u_1^2 + u_2^2) \cdot (v_1^2 + v_2^2)} \\ &= \sqrt{u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2}. \end{aligned}$$

Dalam analisis riil, $2u_1v_1u_2v_2 \leq u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2$.

Jadi, $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$. ■

Teorema 2.3.4 Jika u dan v merupakan vektor pada suatu ruang hasil kali dalam V maka

$$\|u + v\| < \|u\| + \|v\|$$

untuk setiap $u, v \in V$ (Ketaksamaan Segitiga).

Bukti. Berdasarkan Definisi 2.3.2,

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle.$$

Berdasarkan Teorema 2.3.3,

$$\|u + v\|^2 < \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \text{ berakibat } \|u + v\| < \|u\| + \|v\|.$$

■

2.4 Ruang Hilbert

RKHS memiliki komponen utama ruang Hilbert (Chen dkk., 2021). Ruang Hilbert dikenalkan oleh fisikawan matematika David Hilbert pada awal abad ke-20 sebagai ruang vektor yang dilengkapi dengan *inner product* (hasil kali dalam) yang memenuhi sifat bahwa setiap barisan Cauchy-nya konvergen (Roman, 2008). Berikut ini diberikan definisi barisan Cauchy menurut Roman (Roman, 2008).

Definisi 2.4.1 Suatu barisan $(x_n), n = 1, 2, \dots$ dalam RHKD bernilai riil disebut sebagai barisan Cauchy jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $N < \infty$ sehingga

$\|x_n - x_m\| < \epsilon$ dengan $n, m \geq N$. Suatu barisan (x_n) disebut konvergen ke titik $x \in V$ jika $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ saat $n \rightarrow \infty$.

Barisan Cauchy memiliki keistimewaan dalam ruang vektor yaitu tentang sifat konvergensi. Barisan Cauchy menjadi alat untuk menentukan apakah suatu ruang vektor memiliki sifat kelengkapan (*completeness*) atau tidak (Roman, 2008).

Definisi 2.4.2 Suatu RHKD dikatakan lengkap (*complete*) jika untuk sebarang barisan Cauchy $(x_n), n = 1, 2, \dots$ terdapat x sebagai titik limit dari barisan Cauchy, yaitu $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ saat $n \rightarrow \infty$.

Sifat kelengkapan (*completeness*) dalam ruang vektor bersifat istimewa karena memastikan bahwa setiap barisan Cauchy di ruang tersebut memiliki titik limit yang juga berada di dalam ruang vektor tersebut. Sifat kelengkapan ruang vektor menjadi dasar dalam mendefinisikan ruang Hilbert (Roman, 2008).

Definisi 2.4.3 Suatu ruang Hilbert merupakan ruang hasil kali dalam yang lengkap.

Salah satu sifat penting dalam ruang Hilbert adalah kekonvergenan. Sifat kekonvergenan juga sangat penting dalam statistika karena memastikan bahwa metode atau estimasi yang digunakan akan memberikan hasil yang konsisten dan dapat dipercaya seiring dengan bertambahnya jumlah data (Shawe-Taylor dan Cristianini, 2004). Berikut definisi barisan konvergen di ruang Hilbert menurut Roman (Roman, 2008).

Definisi 2.4.4 Barisan (x_n) di ruang Hilbert H disebut konvergen ke titik $x \in H$ jika $\|x_n - x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Berikut proposisi kekontinuan dalam *norm* dan *inner product* pada suatu ruang Hilbert (Roman, 2008).

Proposisi 2.4.5 Diberikan barisan (x_n) dan (y_n) dalam suatu ruang Hilbert H . Jika $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ dan $\|y_n - y\| \rightarrow 0$ maka:

1. $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$
2. $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$.

Bukti.

1. Berdasarkan Definisi 2.4.4, $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ dan berlaku $\|x_n - x\| > \|x_n\| - \|x\|$. Karena $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ maka $-\|x_n - x\| < \|x_n\| - \|x\| < \|x_n - x\|$. Jadi, terbukti $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.
2. $x_n \rightarrow x$ artinya $|x_n - x| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, |x_n - x| < \epsilon$.
 $\forall n, |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x_n, y_n - y \rangle + \langle x_n - x, y \rangle| \leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| +$

$|\langle x_n - x, y \rangle| \leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\|$. Karena $\|y_n - y\| = 0$ dan $\|x_n - x\| = 0$ maka $|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \rightarrow 0$ atau $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$.

■

Proposisi 2.4.5 tersebut memastikan stabilitas konvergensi dalam ruang Hilbert.

Berikut ini definisi ruang Hilbert yang dilengkapi elemen unit (Small dan McLeish, 1994).

Definisi 2.4.6 Diberikan suatu ruang Hilbert H . Diberikan suatu elemen H yaitu $\mathbf{1}$. Pasangan terurut $(H, \mathbf{1})$ disebut ruang Hilbert yang dilengkapi dengan elemen unit jika $\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = 1 \in F$. Dengan demikian, diartikan bahwa hasil kali dalam dari elemen $\mathbf{1}$ terhadap dirinya merupakan elemen H .

2.5 Fungsi Kernel

Sifat utama dari RKHS disebut *reproducing property* yang dikenakan pada fungsi kernel dalam ruang tersebut. Fungsi kernel adalah fungsi matematika yang memetakan dua vektor ke dalam bilangan riil dan memiliki sifat mereproduksi elemen-elemen ruang vektor (Bowman dan Azzalini, 1997); (Shawe-Taylor dan Cristianini, 2004). Keistimewaan fungsi kernel pada ruang Hilbert, terutama dalam konteks *Reproducing Kernel Hilbert Space* (RKHS), terletak pada kemampuannya melakukan operasi yang dikenal sebagai *kernel trick*. Fungsi kernel pada RKHS dapat melakukan komputasi *inner product* dalam ruang berdimensi tinggi tanpa perlu secara eksplisit memetakan data ke ruang tersebut. Berikut ini definisi fungsi kernel menurut Shawe-Taylor dan Cristianini (Shawe-Taylor dan Cristianini, 2004).

Definisi 2.5.1 Diberikan sebarang himpunan X . Suatu fungsi $\kappa : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ disebut fungsi kernel jika untuk setiap $x, y \in X$ memenuhi

$$\kappa(x, y) = \langle \phi(x), \phi(y) \rangle \quad (2.5.1)$$

dengan $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ merupakan pemetaan dari X ke ruang fitur berdimensi- n .

Ruang fitur berdimensi- n adalah ruang vektor berdimensi- n yang merepresentasikan data setelah dipetakan oleh fungsi kernel (Schölkopf dkk., 1999).

Menurut Shawe-Taylor dan Cristianini, fungsi kernel dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks Gram karena matriks ini mempermudah perhitungan dalam ruang fitur berdimensi tinggi tanpa harus langsung menghitung koordinat di ruang tersebut (Shawe-Taylor dan Cristianini, 2004).

Definisi 2.5.2 Diberikan sebarang himpunan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$. Matriks Gram didefinisikan sebagai matriks $\mathbf{G}$ berukuran $l \times l$ yang memiliki entri-entri

$$G_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle \quad (2.5.2)$$

dengan $i = 1, 2, \dots, l$ dan $j = 1, 2, \dots, l$.

Definisi 2.5.3 Diberikan sebarang himpunan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$. Jika κ merupakan fungsi yang mengevaluasi *inner product* berdasarkan pemetaan fitur ϕ maka matriks Gram yang bersesuaian memiliki entri-entri

$$G_{ij} = \langle \phi(x_i), \phi(x_j) \rangle = \kappa(x_i, x_j) \quad (2.5.3)$$

dengan $i = 1, 2, \dots, l$ dan $j = 1, 2, \dots, l$.

Definisi 2.5.4 Diberikan sebarang himpunan X dan matriks simetri A . Matriks A disebut semi definit positif jika untuk setiap nilai eigennya adalah nonnegatif atau $v'Av \geq 0$, untuk setiap vektor $v \in X$.

2.6 Reproducing Kernel Hilbert Space

Reproducing Kernel Hilbert Space (RKHS) dan fungsi kernel memiliki hubungan yang erat karena RKHS didasarkan pada konsep fungsi kernel dan merupakan ruang Hilbert khusus yang direproduksi oleh kernel tersebut. Berikut ini definisi RKHS menurut Berlinet dan Thomas-Agnan (Berlinet dan Thomas-Agnan, 2004).

Definisi 2.6.1 Suatu fungsi kernel $\kappa : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan *reproducing kernel Hilbert space* pada suatu ruang Hilbert H jika dan hanya jika memenuhi kondisi:

1. untuk setiap $x \in X, \kappa(x, \cdot) \in H$,
2. untuk setiap $x \in X$ dan untuk setiap $\varphi \in H, \langle \varphi, \kappa(x, \cdot) \rangle = \varphi(x)$ dengan $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Kondisi (1) pada Definisi 2.6.1 bermakna untuk x tetap, berlaku $\kappa(x, \cdot) \in H$ untuk setiap $y \in X$.

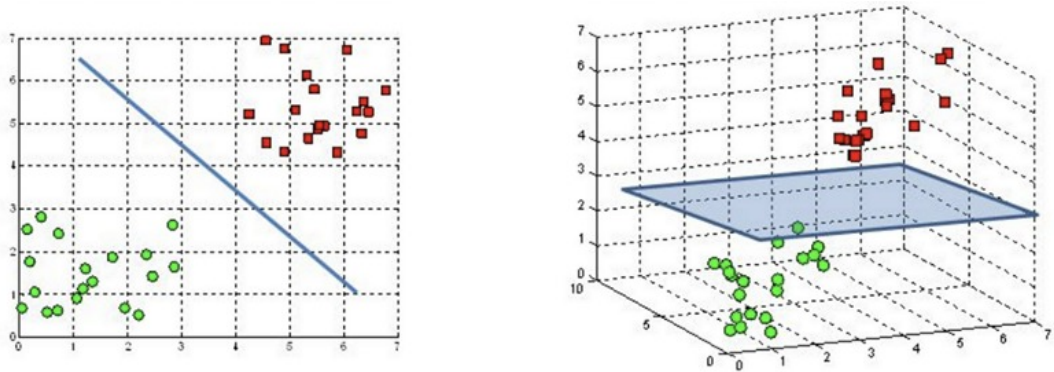
Contoh 2.6.2 Diberikan basis ortonormal $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ di ruang Hilbert H . Didefinisikan $\kappa(x, y) = \sum_{i=1}^n e_i(x)e_i(y)$ maka untuk sebarang $y \in X$ diperoleh, $\kappa(\cdot, y) = \sum_{i=1}^n e_i(\cdot)e_i(y)$. Didefinisikan suatu fungsi $\varphi(\cdot) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i(\cdot)$, untuk setiap $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Untuk setiap $y \in X$,

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \kappa(\cdot, y) \rangle_H &= \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i(\cdot), \sum_{j=1}^n e_j(\cdot)e_j(y) \rangle_H \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i e_j(y) \langle e_i, e_j \rangle_H \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i(y) \\ &= \varphi(y). \end{aligned}$$

2.7 Support Vector Machine

Support vector machine merupakan salah satu algoritma dalam *machine learning*. *Machine learning* adalah cabang dari kecerdasan buatan (*artificial intelligence*) yang berfokus pada pengembangan sistem komputer yang dapat mempelajari data, mengenali pola, dan membuat keputusan dengan sedikit bahkan tanpa intervensi manusia (Muthukrishnan dkk., 2020). Tujuan utama dari *machine learning* adalah untuk mengembangkan algoritma atau model yang memungkinkan komputer untuk melakukan tugas tertentu secara otomatis berdasarkan pembelajaran dari data latih (*training*) (Parapat dkk., 2018).

Pada dasarnya, konsep *Support Vector Machine* (SVM) adalah menentukan *hyperplane* yang memisahkan himpunan data ke dalam dua kelas secara linear. Sebagai contoh, untuk himpunan data berdimensi satu, *hyperplane* pemisah dua kelas adalah berupa titik sedangkan untuk himpunan data berdimensi dua, *hyperplane* pemisah adalah garis lurus sedangkan untuk himpunan data berdimensi tiga, *hyperplane* pemisah adalah suatu bidang datar sebagaimana ditampilkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Ilustrasi *Hyperplane* pada Ruang Berdimensi Dua dan Ruang Berdimensi Tiga

Berikut langkah-langkah penurunan rumus untuk penentuan *hyperplane* dalam SVM (Pisner dan Schnyer, 2020).

1. Persamaan *hyperplane*

Diberikan data set yang terdiri dari n sampel data $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$, dengan x_i adalah vektor dari data ke- i , dan $y_i \in \{-1, +1\}$ adalah label kelas, dengan -1 dan $+1$ mewakili dua kelas berbeda maka *hyperplane* dalam ruang d -dimensi didefinisikan oleh persamaan

$$w^T x + b = 0 \quad (2.7.4)$$

dengan w adalah vektor bobot ke *hyperplane*, dan b adalah bias atau *intercept*. *Hyperplane* ini memisahkan data ke dalam dua kelas jika data memenuhi ketentuan

$$y_i(w^T x_i + b) \geq 1, \forall i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.7.5)$$

Artinya, jika

$$y_i = +1, \quad \text{maka} \quad w^T x_i + b \geq 1 \quad (2.7.6)$$

dan jika

$$y_i = -1, \quad \text{maka} \quad w^T x_i + b \leq -1. \quad (2.7.7)$$

2. Margin dan tujuan SVM

Dalam SVM, tujuan utamanya adalah mencari *hyperplane* yang memaksimalkan margin, yaitu jarak antara dua *hyperplane* sejajar

$$w^T x + b = +1 \quad \text{dan} \quad w^T x + b = -1. \quad (2.7.8)$$

Lebar margin (jarak antara kedua *hyperplane*) dihitung sebagai $\frac{2}{\|w\|}$. Oleh karena itu, memaksimalkan margin sama dengan meminimalkan $\|w\|$, atau lebih spesifik $\frac{1}{2}\|w\|^2$, untuk tujuan menyederhanakan komputasi.

3. Fungsi objektif

Masalah penentuan *hyperplane* dalam SVM dapat dituliskan sebagai masalah optimasi berikut. Minimalkan $\frac{1}{2}\|w\|^2$ dengan kendala

$$y_i(w^T x_i + b) \geq 1, \quad (2.7.9)$$

untuk setiap i dengan $i = 1, 2, \dots, n$.

4. Menggunakan metode Lagrange untuk menyelesaikan optimasi

Untuk menyelesaikan masalah optimasi pada langkah 3, digunakan fungsi

pengali Lagrange yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathcal{L}(w, b, \alpha) = \frac{1}{2} \|w\|^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i (y_i(w^T x_i + b) - 1), \quad (2.7.10)$$

dengan $\alpha_i \geq 0$ adalah pengali Lagrange, untuk setiap i dengan $i = 1, 2, \dots, n$.

5. Menyusun kondisi Karush-Kuhn-Tucker

Untuk meminimalkan $\mathcal{L}(w, b, \alpha)$, diambil turunan parsial dari $\mathcal{L}$ terhadap w dan b .

(a) Turunan terhadap w :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = w - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_i = 0 \Rightarrow w = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_i. \quad (2.7.11)$$

(b) Turunan terhadap b :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0. \quad (2.7.12)$$

6. Dual formulasi dari SVM

Dengan substitusi $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_i$ ke dalam fungsi Lagrange, diperoleh bentuk dual dari masalah optimasi sebagai berikut. Maksimalkan

$$W(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i^T x_j, \quad (2.7.13)$$

dengan kendala

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \text{untuk setiap } i \text{ dengan } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.7.14)$$

Setelah menyelesaikan masalah dual ini, diperoleh vektor w dan bias b .

7. Menentukan *hyperplane* optimal

Vektor bobot w adalah

$$w = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_i. \quad (2.7.15)$$

Untuk menghitung bias b , dapat digunakan salah satu titik yang memenuhi $y_i(w^T x_i + b) = 1$ atau $y_i(w^T x_i + b) = -1$ di antara *support vectors*.

2.7.1 Klasifikasi *Support Vector Machine*

Dalam konteks klasifikasi, SVM bertujuan untuk menentukan *hyperplane* yang optimal yang memisahkan dua kelas data dengan margin maksimum. Pendekatan SVM didasarkan pada konsep margin maksimum dan prinsip pemisahan linear untuk meningkatkan akurasi klasifikasi dan mengurangi *overfitting* (Shawe-Taylor dan Cristianini, 2004).

Support vectors adalah titik data yang berada di tepi atau margin pemisahan kelas. Titik-titik ini sangat berpengaruh dalam menentukan posisi *hyperplane* optimal. SVM dapat diperluas untuk menangani data yang tidak dapat dipisahkan secara linear menggunakan *kernel trick*. *Kernel trick* dapat memetakan data dari ruang fitur asli ke ruang fitur berdimensi lebih tinggi sehingga data menjadi lebih mudah dipisahkan secara linear (Bowman dan Azzalini, 1997).

2.7.2 Regresi *Support Vector Machine*

Regresi *Support Vector Machine* adalah jenis SVM yang dirancang untuk menyelesaikan masalah regresi. Seperti Klasifikasi SVM, Regresi *Support Vector Machine* bertujuan untuk menentukan *hyperplane* terbaik, tetapi tujuannya adalah memprediksi nilai keluaran yang berada dalam rentang tertentu (Cervantes dkk., 2020).

Dalam Regresi *Support Vector Machine*, ide utamanya adalah untuk menemukan *hyperplane* yang meminimalkan deviasi antara nilai prediksi dan nilai sebenarnya, sambil menjaga galat dalam batas tertentu. Regresi *Support Vector Machine* menggunakan margin ϵ , yang mengontrol seberapa jauh prediksi dapat menyimpang dari nilai sebenarnya tanpa dikenakan penalti (López, 2022).

Secara formal, jika dimiliki data pelatihan (x_i, y_i) untuk $i = 1, \dots, N$, dengan x_i adalah vektor fitur dan y_i adalah nilai sebenarnya maka Regresi *Support Vector Machine* menentukan fungsi prediksi dalam bentuk:

$$f(x) = w \cdot x + b, \quad (2.7.16)$$

dengan w adalah vektor bobot, dan b adalah bias.

Regresi *Support Vector Machine* bertujuan untuk menemukan fungsi $f(x)$ yang memiliki galat kurang dari ϵ untuk semua titik data dalam set pelatihan. Artinya, untuk setiap titik data (x_i, y_i) , galatnya $|y_i - f(x_i)|$ harus kurang dari ϵ .

Namun, untuk menangani data yang mungkin tidak dapat memenuhi batas

galat ϵ , Regresi *Support Vector Machine* memperkenalkan variabel *slack* ξ_i dan ξ_i^* untuk mengizinkan beberapa galat yang melebihi ϵ pada titik tertentu, tetapi penalti akan dikenakan untuk galat ini. Tujuan Regresi *Support Vector Machine* adalah untuk meminimalkan galat ini dengan menggunakan fungsi berikut:

$$\frac{1}{2}\|w\|^2 + C \sum_{i=1}^N (\xi_i + \xi_i^*), \quad (2.7.17)$$

dengan C adalah parameter yang mengontrol *trade-off* antara margin lebar (yakni, regularisasi) dan galat (*slack variables*).

Dengan menggabungkan kondisi margin ϵ dan variabel *slack*, Regresi *Support Vector Machine* dapat diformulasikan sebagai masalah optimasi berikut:

$$\min_{w, b, \xi, \xi^*} \frac{1}{2}\|w\|^2 + C \sum_{i=1}^N (\xi_i + \xi_i^*) \quad (2.7.18)$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} y_i - (w \cdot x_i + b) &\leq \epsilon + \xi_i, \\ (w \cdot x_i + b) - y_i &\leq \epsilon + \xi_i^*, \\ \xi_i, \xi_i^* &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.7.19)$$

Kendala pertama dan kedua memastikan bahwa galat antara prediksi dan nilai sebenarnya berada dalam batas ϵ , dengan tambahan *slack* ξ_i dan ξ_i^* jika galat lebih besar dari ϵ .

Untuk menyelesaikan masalah pada Persamaan 2.7.18, digunakan metode pengali Lagrange. Fungsi Lagrangian dari masalah ini adalah

$$\begin{aligned} L(w, b, \xi, \xi^*, \alpha, \alpha^*, \eta, \eta^*) &= \frac{1}{2}\|w\|^2 + C \sum_{i=1}^N (\xi_i + \xi_i^*) \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \alpha_i (\epsilon + \xi_i - y_i + w \cdot x_i + b) \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \alpha_i^* (\epsilon + \xi_i^* + y_i - w \cdot x_i - b) \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \eta_i \xi_i - \sum_{i=1}^N \eta_i^* \xi_i^*. \end{aligned} \quad (2.7.20)$$

Selanjutnya, penyelesaian turunan parsial terhadap w , b , ξ_i , dan ξ_i^* diguna-

kan untuk memperoleh bentuk dual. Bentuk dual dari masalah optimasi ini adalah

$$\max_{\alpha, \alpha^*} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\alpha_i - \alpha_i^*)(\alpha_j - \alpha_j^*) \kappa(x_i, x_j) + \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \alpha_i^*) y_i - \epsilon \sum_{i=1}^N (\alpha_i + \alpha_i^*) \quad (2.7.21)$$

dengan kendala

$$\sum_{i=1}^N (\alpha_i - \alpha_i^*) = 0, \quad 0 \leq \alpha_i, \alpha_i^* \leq C. \quad (2.7.22)$$

Di sini, $\kappa(x_i, x_j) = x_i \cdot x_j$ adalah kernel linear. Kernel lain dapat digunakan sesuai kebutuhan untuk menangani data nonlinear.

Setelah menyelesaikan nilai α_i dan α_i^* , fungsi prediksi untuk titik data baru x adalah

$$f(x) = \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \alpha_i^*) \kappa(x_i, x) + b, \quad (2.7.23)$$

dengan $\kappa(x_i, x)$ adalah fungsi kernel yang mengukur kemiripan antara data pelatihan dan data yang akan diprediksi.

Nilai ϵ menentukan batas galat bebas penalti. Nilai penalti bertujuan untuk mengurangi kesalahan pada data latih sambil menjaga model agar tidak terlalu kompleks. Semakin besar ϵ , semakin longgar batas galat, yang memungkinkan deviasi yang lebih besar dari nilai sebenarnya tanpa penalti. Artinya, jika galat suatu prediksi berada dalam rentang $[-\epsilon, \epsilon]$, maka galat tersebut tidak dihitung atau tidak dikenakan penalti.

Nilai C mengontrol *trade-off* antara margin yang lebar dan galat kecil. Makna dari *trade-off* yang dikontrol oleh nilai C adalah bahwa ada keseimbangan antara dua tujuan yang saling bertentangan yaitu memaksimalkan margin untuk memastikan generalitas model namun mengurangi galat untuk memastikan akurasi pada data latih. Nilai C yang tinggi akan menghasilkan model dengan galat yang kecil tetapi margin yang lebih sempit, yang berpotensi *overfitting*, sedangkan nilai C yang rendah akan menghasilkan model dengan margin yang lebih lebar tetapi berpotensi lebih besar galatnya.

BAB III

METODE *REPRODUCING KERNEL HILBERT SPACE* DALAM *SUPPORT VECTOR MACHINE*

3.1 RKHS Sebagai Kasus Khusus Ruang Hilbert yang Dilengkapi Elemen Unit

Berikut diberikan contoh ruang Hilbert dengan elemen unit berdasarkan Definisi 2.4.6 menurut Utami dkk. (Utami dkk., 2023).

Contoh 3.1.1 Misal $H = \mathbb{R}^3$ suatu ruang vektor dengan hasil kali dalam yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i \quad (3.1.1)$$

dan metrik yang diinduksi dari hasil kali dalam didefinisikan dengan

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2 \right)^{(1/2)} \quad (3.1.2)$$

Karena ruang Hilbert merupakan RHKD yang lengkap terhadap metrik yang diinduksi hasil kali dalam, maka akan dibuktikan bahwa setiap barisan di $\mathbb{R}^3$ konvergen di $\mathbb{R}^3$.

Diberikan (x_k) barisan Cauchy di $\mathbb{R}^3$, dengan $x_k = (x_{(k,1)}, x_{(k,2)}, x_{(k,3)})$. Dari induksi metrik diperoleh, $d(x_k, x_m)^2 = \sum_{i=1}^3 (x_{(k,i)} - x_{(m,i)})^2 \rightarrow 0$ untuk $k, m \rightarrow \infty$. Untuk setiap koordinat ke- i berlaku

$$(x_{(k,i)} - x_{(m,i)})^2 \leq d(x_k, x_m)^2. \quad (3.1.3)$$

Dengan kata lain, $(x_{(k,i)} - x_{(m,i)})^2 \rightarrow 0$ dengan $k, m \rightarrow \infty$ dan koordinat ke- i dari barisan $(x_{(k,i)})_{k=1,2,\dots}$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ lengkap maka $(x_{(k,i)}) \rightarrow y_i$ saat $k \rightarrow \infty$.

Jika $y = (y_1, y_2, y_3)$, maka $d(x_k, y)^2 = \sum_{i=1}^n (x_{(k,i)} - y_i)^2 \rightarrow 0$ saat $k \rightarrow \infty$. Untuk setiap koordinat posisi ke- i , diperoleh $(x_{(k,i)} - y_i)^2 \leq d(x_k, y)^2 \rightarrow 0$. Selanjutnya dapat ditentukan elemen unit pada $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

yang apabila dikalikan terhadap dirinya sendiri menghasilkan 1. Dengan demikian, $(\mathbb{R}^3, \mathbf{1})$ adalah ruang Hilbert yang dilengkapi elemen unit.

Dalam Contoh 3.1.1 dapat ditemukan elemen unit lain sebagai berikut.

$$\mathbf{1}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{1}^{**} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{1}^{***} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh Akibat 3.1.2 sebagai berikut.

Akibat 3.1.2 Dalam suatu ruang Hilbert yang diinduksi hasil kali dalam, elemen unitnya tidak tunggal.

Berdasarkan Definisi 2.4.6, misal dipilih $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ dan $\kappa(x_i, x_j)$ elemen ruang Hilbert sehingga berlaku $\langle \phi, \kappa(x_i, x_j) \rangle = \phi(x)$ maka ruang Hilbert yang di dalamnya berlaku hasil kali dalam tersebut disebut RKHS.

3.2 Fungsi Kernel dalam RKHS

Fungsi kernel dalam RKHS berfungsi sebagai alat untuk mengukur kesamaan antara dua titik dalam ruang fitur. Dengan kata lain, fungsi kernel memberikan nilai “kesamaan” antara dua titik data x dan y dalam bentuk $\kappa(x, y)$, tanpa perlu mengungkapkan koordinat atau dimensi ruang tersebut.

Salah satu sifat unik dari RKHS adalah “*reproducing property*,” yang menyatakan bahwa dapat dievaluasi fungsi dalam RKHS di titik tertentu dengan menggunakan fungsi kernel. Ini berarti, untuk suatu fungsi f dalam RKHS dan titik data x , evaluasi $f(x)$ dapat dihitung sebagai

$$f(x) = \langle f, \kappa(\cdot, x) \rangle_{RKHS} \quad (3.2.4)$$

dengan $\kappa(\cdot, x)$ adalah fungsi kernel yang berfungsi sebagai “representasi” dari titik

x dalam RKHS. Proses ini memungkinkan model untuk mengakses informasi data di RKHS dengan menghitung *inner product* antara fungsi dan kernel.

Dalam Klasifikasi SVM, fungsi kernel digunakan untuk membuat *hyperplane* pemisah dalam RKHS sehingga memungkinkan pemisahan data yang tidak dapat dipisahkan secara linear di ruang asli. Kernel menciptakan hubungan antara data sehingga dapat dibangun model yang fleksibel untuk berbagai jenis data.

Pada Klasifikasi SVM, fungsi kernel memudahkan peneliti mencari *hyperplane* optimal di RKHS untuk memisahkan dua kelas sedangkan dalam Regresi SVM, fungsi kernel membantu membangun model regresi dalam RKHS yang mampu menangani hubungan nonlinear dalam data.

Berikut ini contoh fungsi kernel berdasarkan Definisi 2.5.1.

Contoh 3.2.1 Diberikan himpunan bilangan riil berdimensi dua $\mathbb{R}^2$ dan didefinisikan suatu pemetaan $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sebagai berikut:

$$\phi : x = (x_1, x_2) \rightarrow \phi(x) = (x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1x_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Diberikan sebarang $x, y \in \mathbb{R}^2$. Berdasarkan Definisi 2.5.1 berlaku

$$\begin{aligned} \kappa(x, y) &= \langle \phi(x), \phi(y) \rangle \\ &= \langle (x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1x_2), (y_1^2, y_2^2, \sqrt{2}y_1y_2) \rangle \\ &= x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 \\ &= (x_1y_1 + x_2y_2)^2 \\ &= \langle x, y \rangle^2. \end{aligned}$$

Jadi, fungsi $\kappa(x, y) = \langle x, y \rangle^2$ merupakan fungsi kernel yang bersesuaian dengan ruang fitur $\mathbb{R}^3$.

Contoh 3.2.2 Diberikan $X = \mathbb{R}^2$ dan didefinisikan suatu pemetaan $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ sebagai berikut:

$$\phi : x = (x_1, x_2) \rightarrow \phi(x) = (x_1^2, x_2^2, x_1x_2, x_2x_1) \in \mathbb{R}^4.$$

Diberikan sebarang $x, y \in X$. Berdasarkan Definisi 2.5.1 berlaku

$$\begin{aligned} \kappa(x, y) &= \langle \phi(x), \phi(y) \rangle \\ &= \langle (x_1^2, x_2^2, x_1x_2, x_2x_1), (y_1^2, y_2^2, y_1y_2, y_2y_1) \rangle \\ &= x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_1x_2y_1y_2 + x_2x_1y_2y_1 \\ &= (x_1y_1 + x_2y_2)^2 \\ &= \langle x, y \rangle^2. \end{aligned}$$

Jadi, fungsi $\kappa(x, y) = \langle x, y \rangle^2$ merupakan fungsi kernel yang bersesuaian dengan ruang fitur $\mathbb{R}^4$.

Berdasarkan Contoh 3.2.1 dan Contoh 3.2.2, diperoleh Akibat 3.2.3 sebagai berikut.

Akibat 3.2.3 Ruang fitur secara tunggal ditentukan oleh fungsi kernel.

Dengan kata lain, fungsi kernel yang sama dapat menghasilkan dimensi pemetaan fitur yang berbeda.

Berdasarkan Definisi 2.5.2, Definisi 2.5.3, dan Definisi 2.5.4 diperoleh Proposisi berikut.

Proposisi 3.2.4 Matriks kernel dapat dinyatakan sebagai matriks Gram $\mathbf{G}$ dan merupakan matriks semi definit positif.

Bukti. Diberikan matriks kernel $\mathbf{G}$, dengan

$$G_{ij} = \kappa(x_i, x_j) = \langle \phi(x_i), \phi(x_j) \rangle, \text{ untuk } i, j = 1, 2, \dots, l \text{ dan } x_i, x_j \in X.$$

Diberikan sebarang $v \in V$ berlaku

$$\begin{aligned} v' \mathbf{G} v &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa(x_1, x_1) & \dots & \dots & \kappa(x_1, x_l) \\ \kappa(x_2, x_1) & \dots & \dots & \kappa(x_2, x_l) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa(x_l, x_1) & \dots & \dots & \kappa(x_l, x_l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \phi(x_1), \phi(x_1) \rangle & \dots & \langle \phi(x_1), \phi(x_l) \rangle \\ \langle \phi(x_2), \phi(x_1) \rangle & \dots & \langle \phi(x_2), \phi(x_l) \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle \phi(x_l), \phi(x_1) \rangle & \dots & \langle \phi(x_l), \phi(x_l) \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_l \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i,j=1}^l v_i \langle \phi(x_i), \phi(x_j) \rangle v_j \\ &= \langle \sum_{i=1}^l v_i \phi(x_i), \sum_{j=1}^l v_j \phi(x_j) \rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^l v_i \phi(x_i), \sum_{i=1}^l v_i \phi(x_i) \rangle \\ &= \left\| \sum_{i=1}^l v_i \phi(x_i) \right\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

■

Berikut ini sifat yang diperoleh tentang fungsi kernel.

Teorema 3.2.5 Diberikan sebarang himpunan $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Didefinisikan fungsi dari $X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Misal κ_1 dan κ_2 sebarang fungsi kernel. Jika ϕ pemetaan dari $X \rightarrow \mathbb{R}^n$ maka berlaku sifat berikut.

1. $\kappa(x, z) = \kappa_1(x, z) + \kappa_2(x, z)$ adalah fungsi kernel, untuk sebarang $x, z \in X$.
2. $\kappa(x, z) = \alpha \kappa_1(x, z)$ adalah fungsi kernel, untuk sebarang $x, z \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}^+$.
3. $\kappa(x, z) = \kappa_1(x, z) \kappa_2(x, z)$ adalah fungsi kernel, untuk sebarang $x, z \in X$.

Bukti.

1. Berdasarkan Proposisi 3.2.4, maka untuk sebarang $v \in X$ akan ditunjukkan $v'(\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2)v \geq 0$, dengan $\mathbf{G}_1$ dan $\mathbf{G}_2$ merupakan matriks Gram.

Berdasarkan Definisi 2.5.3,

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} \kappa_1(x_1, x_1) & \dots & \kappa_1(x_1, x_l) \\ \kappa_1(x_2, x_1) & \dots & \kappa_1(x_2, x_l) \\ \dots & \dots & \dots \\ \kappa_1(x_l, x_1) & \dots & \kappa_1(x_l, x_l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \phi_1(x_1), \phi_1(x_1) \rangle & \dots & \langle \phi_1(x_1), \phi_1(x_l) \rangle \\ \langle \phi_1(x_2), \phi_1(x_1) \rangle & \dots & \langle \phi_1(x_2), \phi_1(x_l) \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle \phi_1(x_l), \phi_1(x_1) \rangle & \dots & \langle \phi_1(x_l), \phi_1(x_l) \rangle \end{pmatrix}.$$

Karena κ_1 fungsi kernel artinya $v'(\mathbf{G}_1)v \geq 0$.

Begitu juga

$$\mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} \kappa_2(x_1, x_1) & \dots & \kappa_2(x_1, x_l) \\ \kappa_2(x_2, x_1) & \dots & \kappa_2(x_2, x_l) \\ \dots & \dots & \dots \\ \kappa_2(x_l, x_1) & \dots & \kappa_2(x_l, x_l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \phi_2(x_1), \phi_2(x_1) \rangle & \dots & \langle \phi_2(x_1), \phi_2(x_l) \rangle \\ \langle \phi_2(x_2), \phi_2(x_1) \rangle & \dots & \langle \phi_2(x_2), \phi_2(x_l) \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle \phi_2(x_l), \phi_2(x_1) \rangle & \dots & \langle \phi_2(x_l), \phi_2(x_l) \rangle \end{pmatrix}.$$

Karena κ_2 fungsi kernel, artinya $v'(\mathbf{G}_2)v \geq 0$. Dengan demikian, penjumlahan

$$v'(\mathbf{G}_1)v + v'(\mathbf{G}_2)v = v'(\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2)v \geq 0.$$

Jadi, $\kappa(x, z) = \kappa_1(x, z) + \kappa_2(x, z)$ merupakan fungsi kernel.

2. Diketahui κ_1 fungsi kernel dan $a \in \mathbb{R}^+$. Akan ditunjukkan $\alpha v' \mathbf{G}_1 v \geq 0$.

Berdasarkan Definisi 2.5.3,

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} \kappa_1(x_1, x_1) & \dots & \kappa_1(x_1, x_l) \\ \kappa_1(x_2, x_1) & \dots & \kappa_1(x_2, x_l) \\ \dots & \dots & \dots \\ \kappa_1(x_l, x_1) & \dots & \kappa_1(x_l, x_l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \phi_1(x_1), \phi_1(x_1) \rangle & \dots & \langle \phi_1(x_1), \phi_1(x_l) \rangle \\ \langle \phi_1(x_2), \phi_1(x_1) \rangle & \dots & \langle \phi_1(x_2), \phi_1(x_l) \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle \phi_1(x_l), \phi_1(x_1) \rangle & \dots & \langle \phi_1(x_l), \phi_1(x_l) \rangle \end{pmatrix}.$$

Karena κ_1 fungsi kernel artinya $v'(\mathbf{G}_1)v \geq 0$. Dengan demikian,

$$v'(\alpha \mathbf{G}_1)v = \alpha v'(\mathbf{G}_1)v \geq 0.$$

Jadi, $\kappa(x, z) = \alpha \kappa_1(x, z)$ merupakan fungsi kernel.

3. Diketahui κ_1 fungsi kernel, artinya $v'(\mathbf{G}_1)v \geq 0$ dan κ_2 fungsi kernel yang artinya $v'(\mathbf{G}_2)v \geq 0$. Akan ditunjukkan $v'(\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2)v \geq 0$. Digunakan Schur *product* berdasarkan Definisi 2.2.3 sehingga

$$v'(\mathbf{G}_1)v \circ v'(\mathbf{G}_2)v = v'(\mathbf{G}_1 \circ \mathbf{G}_2)v \geq 0.$$

Jadi, $\kappa(x, z) = \kappa_1(x, z)\kappa_2(x, z)$ merupakan fungsi kernel.

■

Teorema 3.2.6 Diberikan sebarang himpunan $X \subseteq \mathbb{R}^n$ dan didefinisikan fungsi dari $X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Jika $\kappa_1, \kappa_2, \dots$, dan κ_n fungsi kernel berhingga serta $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, dan α_n sebarang bilangan riil positif maka kombinasi linear berhingga merupakan fungsi kernel.

Bukti. Untuk $i = 1, 2, \dots, n$ setiap fungsi kernel $\kappa_i(x, z)$ terdapat matriks Gram $\mathbf{G}^{(i)}$ sehingga

$$\mathbf{G}_{jk}^{(i)} = \kappa_i(x_j, x_k); \quad j, k = 1, 2, \dots, m \quad \forall x_1, x_2, \dots, m \in X.$$

Karena $\kappa_i(x, z)$ fungsi kernel maka setiap $\mathbf{G}^{(i)}$ berlaku $v' \mathbf{G}^{(i)} v \geq 0, \forall v \in X$. Matriks Gram $\mathbf{G}$ dari kombinasi linear $\kappa(x, z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \kappa_i(x, z)$ adalah

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{G}^{(i)}$$

sehingga $v' \mathbf{G} v = v' (\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{G}^{(i)}) v$. Karena $\alpha_i > 0$ dan $v' \mathbf{G}^{(i)} v \geq 0$ maka

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (v' \mathbf{G}^{(i)} v) \geq 0.$$

■

3.3 Fungsi Kernel Linear

Fungsi kernel linear merupakan salah satu jenis fungsi kernel yang digunakan dalam *machine learning*. Fungsi kernel linear memiliki sifat sederhana namun berguna dalam memetakan data ke dalam ruang fitur yang lebih tinggi. Berikut diberikan sifat fungsi kernel linear.

Proposisi 3.3.1 Diberikan suatu himpunan tak kosong X . Jika $\kappa(x, z)$ suatu kernel atas $X \times X$, dengan $x, z \in X$ maka $\kappa(x, z) = x \cdot z$ adalah fungsi kernel.

Bukti. Berdasarkan Definisi 2.5.1, didefinisikan fungsi

$$\langle \phi(x), \phi(z) \rangle = \langle x, z \rangle = x \cdot z = \sum_{i=1}^n x_i z_i.$$

Berdasarkan Definisi 2.5.4, untuk setiap $c \in X$ berlaku

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_i c_j \kappa(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_i c_j (x_i \cdot x_j) = \left(\sum_{i=1}^m c_i x_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m c_j x_j \right). \quad (3.3.5)$$

Misalkan $v = \sum_{i=1}^m c_i x_i$ maka Persamaan 3.3.5 menjadi $v \cdot v = \|v\|^2 \geq 0$. Jadi, $\kappa(x, z) = x \cdot z$ adalah fungsi kernel. ■

Fungsi kernel $\kappa(x, z) = x \cdot z$ selanjutnya disebut fungsi kernel linear.

3.3.1 Fungsi Kernel Linear pada Klasifikasi *Support Vector Machine*

Support Vector Machine (SVM) adalah algoritma *machine learning* yang bertujuan untuk menemukan *hyperplane* optimal yang memisahkan kelas-kelas data dengan margin maksimum dalam ruang fitur. Prinsip SVM menurut Shawe-Taylor dan Cristianini jika menggunakan fungsi kernel linear $\kappa(x, z) = x \cdot z$ adalah sebagai berikut (Shawe-Taylor dan Cristianini, 2004).

Diberikan himpunan data $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$, dengan $x_i \in \mathbb{R}^d$, $y_i \in \{-1, 1\}$ SVM bertujuan untuk mencari *hyperplane* dalam bentuk $f(x) = w \cdot x + b$ dengan $w \in \mathbb{R}^d$ adalah vektor bobot dan $b \in \mathbb{R}$ adalah bias. Klasifikasi dilakukan dengan

$$\text{label prediksi} = \text{sign}(f(x)). \quad (3.3.6)$$

SVM memaksimalkan margin antara dua kelas, yaitu jarak antara *hyperplane* dan data terdekat (*support vectors*) dengan formula

$$\text{margin} = \frac{2}{\|w\|}. \quad (3.3.7)$$

Optimasi dilakukan dengan menyelesaikan masalah primal:

$$\min_{w, b} \frac{1}{2} \|w\|^2 \quad (3.3.8)$$

terhadap kendala:

$$y_i(w \cdot x_i + b) \geq 1, \forall i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3.9)$$

Fungsi objektif $\frac{2}{\|w\|}$ merepresentasikan tujuan optimasi, yaitu meminimalkan norma w , yang berhubungan dengan margin maksimum antara dua kelas dalam SVM. Semakin kecil $\|w\|^2$, semakin besar margin pemisahannya. Kendala $y_i(w \cdot x_i + b) \geq 1, \forall i$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$ memastikan bahwa data *training* x_i diklasifikasikan dengan benar, yaitu berada di sisi yang benar dari margin dengan jarak minimal 1.

Jika dimensi data rendah atau jumlah kendala kecil, menyelesaikan masalah primal lebih efisien daripada dual. Namun, untuk masalah SVM dengan data dalam

dimensi tinggi, pendekatan dual lebih dipilih untuk mempermudah perhitungan. Bentuk masalah dualnya adalah

$$\max_{\alpha} \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j \kappa(x_i, x_j), \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3.10)$$

relatif terhadap $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0, \alpha_i \geq 0, \forall i$ dengan α_i adalah pengali Lagrange dan fungsi kernel linear $\kappa(x_i, x_j) = x_i \cdot x_j$ sehingga bobot w dinyatakan dengan

$$w = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_i, \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3.11)$$

dan bias b dapat dihitung sebagai

$$b = y_k - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i (x_i \cdot x_k), \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3.12)$$

dengan k adalah indeks data *support vector*.

Fungsi keputusan untuk prediksi pada data baru x diberikan oleh

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i (x_i \cdot x) + b, \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3.13)$$

dengan (x_i, y_i) adalah *support vectors* dan $\kappa(x_i, x) = x_i \cdot x$ karena menggunakan fungsi kernel linear. Klasifikasi dilakukan berdasarkan fungsi sign $f(x)$ yaitu

$$\text{label prediksi} = \begin{cases} +1 & \text{jika } f(x) > 0, \\ -1 & \text{jika } f(x) \leq 0. \end{cases} \quad (3.3.14)$$

Dengan menggunakan fungsi kernel linear $\kappa(x, z) = x \cdot z$ berarti SVM bekerja langsung di ruang fitur tanpa memetakan data ke ruang berdimensi lebih tinggi. Kernel linear cocok untuk data yang dapat dipisahkan secara linear. Jika data tidak dapat dipisahkan secara linear, kernel nonlinear seperti RBF atau polinomial biasanya digunakan.

3.3.2 Fungsi Kernel Linear pada Regresi *Support Vector Machine*

Regresi SVM menggunakan prinsip serupa dengan Klasifikasi SVM, tetapi difokuskan pada estimasi fungsi regresi $f(x)$. Prinsipnya adalah mencari *hyper-plane* $f(x) = w \cdot x + b$ yang mendekati data dengan toleransi kesalahan ϵ dan

meminimalkan kompleksitas model (Shawe-Taylor dan Cristianini, 2004). Jika diberikan data *training* (x_i, y_i) untuk $i = 1, \dots, n$, dengan x_i adalah vektor fitur dan y_i adalah nilai sebenarnya, Regresi SVM menentukan fungsi prediksi dalam bentuk

$$f(x) = w \cdot x + b, \quad (3.3.15)$$

dengan w adalah vektor bobot, dan b adalah bias.

Regresi SVM bertujuan untuk menemukan fungsi $f(x)$ yang memiliki galat kurang dari ϵ untuk semua titik data dalam set *training*. Artinya, untuk setiap titik data (x_i, y_i) , galatnya $|y_i - f(x_i)| < \epsilon, \forall i, i = 1, 2, \dots, n$.

Untuk menangani data yang mungkin tidak dapat memenuhi batas galat ϵ , Regresi SVM menggunakan variabel *slack* ξ_i dan ξ_i^* untuk mengizinkan beberapa galat yang melebihi ϵ pada titik tertentu, tetapi penalti akan dikenakan untuk galat ini. Tujuan Regresi SVM adalah untuk meminimalkan galat ini dengan menggunakan fungsi berikut

$$\frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^n (\xi_i + \xi_i^*), \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3.16)$$

dengan C adalah parameter yang mengontrol *trade-off* antara margin lebar dan galat (*slack variables*).

Dengan menggabungkan kondisi margin ϵ dan variabel *slack*, Regresi SVM dapat diformulasikan masalah optimasi sebagai berikut.

$$\min_{w, b, \xi, \xi^*} \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^n (\xi_i + \xi_i^*), \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3.17)$$

dengan kendala:

$$y_i - (w \cdot x_i + b) \leq \epsilon + \xi_i, \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3.18)$$

$$(w \cdot x_i + b) - y_i \leq \epsilon + \xi_i^*, \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3.19)$$

$$\xi_i, \xi_i^* \geq 0, \forall i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3.20)$$

Kendala pada Persamaan 3.3.18 dan Persamaan 3.3.19 memastikan bahwa galat antara prediksi dan nilai sebenarnya berada dalam batas ϵ , dengan tambahan *slack* ξ_i dan ξ_i^* jika galat lebih besar dari ϵ .

Untuk menyelesaikan masalah pada Persamaan 3.3.16, digunakan pengali

Lagrange. Fungsi Lagrangian berbentuk sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
L(w, b, \xi, \xi^*, \alpha, \alpha^*, \eta, \eta^*) = & \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^n (\xi_i + \xi_i^*) \\
& - \sum_{i=1}^n \alpha_i (\epsilon + \xi_i - y_i + w \cdot x_i + b) \\
& - \sum_{i=1}^n \alpha_i^* (\epsilon + \xi_i^* + y_i - w \cdot x_i - b) \\
& - \sum_{i=1}^n \eta_i \xi_i - \sum_{i=1}^n \eta_i^* \xi_i^*, \forall i, i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Dari Persamaan 3.3.21, turunan parsial terhadap w , b , ξ_i , dan ξ_i^* untuk memperoleh bentuk dual. Bentuk dual dari masalah optimasi ini adalah

$$\begin{aligned}
\max_{\alpha, \alpha^*} - & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) (\alpha_j - \alpha_j^*) \kappa(x_i, x_j) \\
& + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) y_i - \epsilon \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha_i^*), \forall i, i = 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{3.3.22}$$

dengan kendala

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) = 0, \quad 0 \leq \alpha_i, \alpha_i^* \leq C, \forall i, i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.3.23}$$

Fungsi kernel linear $\kappa(x, z) = x \cdot z$ menjadikan perhitungan lebih sederhana karena kernel linear hanya mengalikan dua vektor fitur tanpa transformasi nonlinear tambahan. Setelah memperoleh nilai α_i dan α_i^* dari masalah dual, fungsi prediksi untuk titik data baru x adalah

$$\begin{aligned}
f(x) = & \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) \kappa(x_i, x) + b \\
= & \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) (x_i \cdot x) + b, \forall i, i = 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

dan galat b diperoleh dengan $b = y_k - \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) (x_i \cdot x)$. Fungsi $\kappa(x_i, x)$ adalah fungsi kernel yang mengukur kemiripan antara data *training* dan data yang akan diprediksi.

Nilai $(\alpha_i - \alpha_i^*)$ adalah koefisien yang diperoleh dari solusi masalah optimasi Regresi SVM untuk setiap titik data training x_i . Nilai $x_i \cdot x$ adalah (*dot product*)

antara vektor fitur data *training* $\mathbf{x}_i$ dan vektor fitur data baru x sehingga fungsi prediksi ini menghasilkan model regresi linear yang sederhana, dengan $f(x)$ adalah kombinasi linear dari data *training* x_i dan data baru x .

3.4 Fungsi Kernel Polinomial

Berikut ini merupakan proposisi yang menyatakan bahwa fungsi polinomial dari suatu fungsi kernel juga merupakan fungsi kernel.

Proposisi 3.4.1 Diberikan suatu himpunan tak kosong X . Untuk sebarang $x, z \in X$, jika $\kappa_1(x, z)$ suatu kernel atas $X \times X$ dan

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (3.4.25)$$

suatu polinomial dengan koefisien bernilai bilangan riil positif maka

$$\kappa(x, z) = p(\kappa_1(x, z)) \quad (3.4.26)$$

adalah fungsi kernel.

Bukti. Polinomial $p(\kappa_1(x, z))$ dijabarkan menjadi

$$\begin{aligned} p(\kappa_1(x, z)) &= a_0 + a_1\kappa_1(x, z) + a_2\kappa_1(x, z)^2 + \cdots + a_n\kappa_1(x, z)^n \\ &= \sum_{i=0}^n a_i\kappa_i(x, z)^i. \end{aligned}$$

Karena $a_i \geq 0$ dan κ_1 fungsi kernel maka $a_i\kappa_i(x, z)^i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Berdasarkan Teorema 3.2.5 (i) bahwa penjumlahan fungsi kernel menghasilkan fungsi kernel maka $\kappa(x, z) = p(\kappa_1(x, z))$ adalah fungsi kernel. ■

Fungsi kernel $\kappa(x, z) = a_0 + a_1\kappa_1(x, z) + a_2\kappa_1(x, z)^2 + \cdots + a_n\kappa_1(x, z)^n$ selanjutnya disebut fungsi kernel polinomial.

3.4.1 Fungsi Kernel Polinomial pada Klasifikasi *Support Vector Machine*

Dalam Klasifikasi SVM, fungsi kernel polinomial memetakan data ke ruang fitur yang lebih tinggi sehingga memudahkan pemisahan data yang tidak dapat dipisahkan secara linear dalam ruang asli (memungkinkan model untuk menangkap pola nonlinear dalam data).

Prinsip utama SVM menurut Shawe-Taylor dan Cristianini adalah mencari *hyperplane* dalam bentuk

$$f(x) = w \cdot x + b \quad (3.4.27)$$

yang memaksimalkan margin dan meminimalkan kesalahan klasifikasi dengan

$$w \in \mathbb{R}^d$$

adalah vektor bobot dan $b \in \mathbb{R}$ adalah bias (Shawe-Taylor dan Cristianini, 2004). Masalah primal untuk SVM dinyatakan dengan

$$\min_{w,b,\xi} \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^n \xi_i, \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4.28)$$

dengan kendala

$$y_i(w \cdot x_i + b) \geq 1 - \xi_i, \forall \xi_i \geq 0, \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4.29)$$

dengan x_i adalah data *training*, C disebut parameter yang mengatur offset atau bias, d menyatakan derajat polinomial yang mengatur kompleksitas kernel, dan ξ_i adalah variabel *slack*.

Masalah primal diubah menjadi masalah dual

$$\max_{\alpha} \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j \kappa(x_i, x_j), \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4.30)$$

dengan kendala

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0, 0 \leq \alpha_i \leq C, \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4.31)$$

dengan α_i adalah pengali Lagrange dan fungsi kernel polinomial

$$\kappa(x_i, x_j) = a_0 + a_1 \kappa_1(x, z) + a_2 \kappa_1(x, z)^2 + \dots + a_n \kappa_1(x, z)^n.$$

Misal dipilih fungsi κ_1 yang didefinisikan sebagai $\kappa_1(x, z) = x \cdot z$.

Setelah menyelesaikan proses *training* SVM (mencari nilai α_i melalui optimasi), fungsi keputusan untuk klasifikasi pada data baru x diberikan oleh

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \kappa(x_i, x) + b \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i (a_0 + a_1 (x_i \cdot x) + a_2 (x_i \cdot x)^2 + \dots + a_n (x_i \cdot x)^n) + b \end{aligned} \quad (3.4.32)$$

dengan (x_i, y_i) adalah *support vectors*. Klasifikasi dilakukan berdasarkan fungsi

sign $f(x)$ adalah

$$\text{label prediksi} = \begin{cases} +1 & \text{jika } f(x) > 0, \\ -1 & \text{jika } f(x) \leq 0. \end{cases} \quad (3.4.33)$$

Kernel polinomial dalam Klasifikasi SVM digunakan untuk menangani data yang tidak dapat dipisahkan secara linear dengan cara memetakan data ke dalam ruang fitur yang lebih tinggi, misalnya data yang tersebar dalam bentuk melingkar atau bentuk nonlinear lainnya dapat dipisahkan dengan *hyperplane* yang sederhana.

3.4.2 Fungsi Kernel Polinomial pada Regresi *Support Vector Machine*

Serupa dengan Klasifikasi SVM, kernel polinomial pada Regresi SVM menentukan model untuk memetakan data ke ruang berdimensi tinggi untuk menangani data yang tidak dapat dipisahkan secara linear dan menangkap pola-pola nonlinear dalam data.

Menurut Shawe-Taylor dan Cristianini, Regresi SVM bertujuan untuk meminimalkan kesalahan dalam suatu batas toleransi ϵ sehingga fungsi prediksi $f(x)$ hanya perlu sedekat mungkin dengan y (Shawe-Taylor dan Cristianini, 2004). Fungsi objektif primal pada Regresi SVM dirumuskan dengan

$$\min_{w,b,\xi,\xi^*} \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^n (\xi_i + \xi_i^*), \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4.34)$$

dengan kendala

$$y_i - (w \cdot x_i + b) \leq \epsilon + \xi_i, \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4.35)$$

$$(w \cdot x_i + b) - y_i \leq \epsilon + \xi_i^*, \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4.36)$$

$$\xi_i, \xi_i^* \geq 0, \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4.37)$$

dengan ϵ adalah parameter toleransi kesalahan, w vektor bobot, b bias, ξ dan ξ^* adalah variabel slack untuk menangani data yang berada di luar margin ϵ , dan C parameter regulasi yang mengontrol *trade-off* antara margin besar dan pelanggaran toleransi ϵ .

Untuk menyederhanakan masalah, formulasi primal diubah menjadi masa-

lah dual

$$\begin{aligned} \max_{\alpha, \alpha^*} & \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) y_i - \epsilon \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha_i^*) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) (\alpha_j - \alpha_j^*) \kappa(x_i, x_j), \forall i, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.4.38)$$

dengan kendala

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) = 0, \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4.39)$$

$$0 \leq \alpha_i, \alpha_i^* \leq C, \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4.40)$$

dengan x_i dan x_j adalah titik data *training*, serta C adalah konstanta yang mengatur offset atau bias.

Setelah mendapatkan nilai α_i dan α_i^* melalui proses optimasi Regresi SVM, fungsi prediksi untuk data baru x dapat dihitung sebagai

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) \kappa(x_i, x) + b \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) (a_0 + a_1 \kappa_1(x_i, x) + a_2 \kappa_1(x_i, x)^2 \\ &\quad + \dots + a_n \kappa_1(x_i, x)^n) + b. \end{aligned} \quad (3.4.41)$$

Misal dipilih fungsi κ_1 yang didefinisikan sebagai $\kappa_1(x, z) = x \cdot z$ maka

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) (a_0 + a_1 (x_i \cdot x) + a_2 (x_i \cdot x)^2 + \dots + a_n (x_i \cdot x)^n) + b.$$

Parameter bias b dapat dihitung menggunakan data *support vector* x_k yang memenuhi $0 < \alpha_k < C$ atau $0 < \alpha_k^* < C$ dengan formula

$$\begin{aligned} b &= y_k - \epsilon - \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) (a_0 + a_1 (x_i \cdot x) \\ &\quad + a_2 (x_i \cdot x)^2 + \dots + a_n (x_i \cdot x)^n). \end{aligned} \quad (3.4.42)$$

Penggunaan kernel polinomial dalam Regresi SVM menghasilkan fungsi prediksi yang lebih kompleks dan mampu menangani data nonlinear. Fungsi prediksi tersebut bergantung pada produk titik antara data pelatihan dan data baru, tetapi dihitung dalam ruang fitur yang lebih tinggi yang dihasilkan oleh kernel polinomial.

3.5 Fungsi Kernel Gaussian

Salah satu pendekatan untuk membentuk fungsi kernel baru adalah dengan menggunakan operasi nonlinear terhadap suatu fungsi kernel yang telah terdefinisi. Proposisi berikut menunjukkan bahwa eksponensial dari suatu fungsi kernel merupakan fungsi kernel.

Proposisi 3.5.1 Diberikan suatu himpunan tak kosong X . Untuk sebarang $x, z \in X$, jika $\kappa_1(x, z)$ suatu kernel atas $X \times X$ maka

$$\kappa(x, z) = \exp(\kappa_1(x, z)) \quad (3.5.43)$$

adalah fungsi kernel.

Bukti. Fungsi eksponensial $\exp(\kappa_1(x, z))$ dinyatakan sebagai ekspansi deret Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa_1(x, z)^n}{n!}.$$

Karena κ_1 fungsi kernel dan $n \geq 0$ maka setiap pangkat fungsi kernel adalah fungsi kernel. Berdasarkan Teorema 3.2.5 (i) bahwa penjumlahan fungsi kernel menghasilkan fungsi kernel maka $\kappa(x, z) = \exp(\kappa_1(x, z))$ adalah fungsi kernel. ■

Berdasarkan Proposisi 3.5.1, dapat dibentuk suatu fungsi kernel yang disebut fungsi kernel Gaussian.

Proposisi 3.5.2 Diberikan suatu himpunan tak kosong X . Jika $x, z \in X$ maka $\kappa(x, z) = \exp(-\frac{\|x-z\|^2}{2\sigma^2})$ adalah fungsi kernel.

Bukti. Diberikan suatu fungsi $\kappa(x, z) = \exp(-\frac{\|x-z\|^2}{2\sigma^2})$. Diperhatikan bahwa $\|x-z\|^2 = \|x\|^2 + \|z\|^2 - 2\langle x, z \rangle$ sehingga $-\frac{\|x-z\|^2}{2\sigma^2} = -\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2} - \frac{\|z\|^2}{2\sigma^2} + \frac{2\langle x, z \rangle}{2\sigma^2}$.

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} \kappa(x, z) &= \exp(-\frac{\|x-z\|^2}{2\sigma^2}) = \exp(-\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2} - \frac{\|z\|^2}{2\sigma^2} + \frac{2\langle x, z \rangle}{2\sigma^2}) \\ &= \exp(-\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2}) \exp(-\frac{\|z\|^2}{2\sigma^2}) \exp(\frac{2\langle x, z \rangle}{2\sigma^2}). \end{aligned}$$

Bentuk $\exp(-\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2})$ dan $\exp(-\frac{\|z\|^2}{2\sigma^2})$ nilainya bergantung pada masing-masing x dan z sehingga tidak mempengaruhi sifat semi definit positif dari matriks kernel (merupakan skalar). Berdasarkan Proposisi 3.5.1, $\exp(\frac{2\langle x, z \rangle}{2\sigma^2})$ merupakan kernel dengan $\langle x, z \rangle$ merupakan fungsi kernel linear. Jadi, $\kappa(x, z) = \exp(-\frac{\|x-z\|^2}{2\sigma^2})$ adalah fungsi kernel. ■

Fungsi kernel $\kappa(x, z) = \exp(-\frac{\|x-z\|^2}{2\sigma^2})$ selanjutnya disebut fungsi kernel Gaussian atau *radial basis function*.

Fungsi kernel lain yang tergolong dalam kelas fungsi kernel eksponensial adalah fungsi kernel Laplacian yang dinyatakan dalam proposisi berikut.

Proposisi 3.5.3 Diberikan suatu himpunan tak kosong X . Jika $x, z \in X$ dan didefinisikan $\|x - z\| = \sum_{i=1}^n |x_i - z_i|$ maka $\kappa(x, z) = \exp(-\frac{\|x-z\|}{2\sigma^2})$ adalah fungsi kernel.

Bukti. Diberikan suatu fungsi $\kappa(x, z) = \exp(-\frac{\|x-z\|}{2\sigma^2})$. Diperhatikan bahwa

$$\|x - z\| = \sum_{i=1}^n |x_i - z_i|$$

merupakan jarak Manhattan. Fungsi $|x_i - z_i|$ merupakan fungsi kernel karena untuk sebarang $c \in X$ berlaku

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_i c_j |x_i - z_i| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_i c_j w_i \geq 0.$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} \kappa(x, z) &= \exp(-\frac{\|x-z\|}{2\sigma^2}) \\ &= \exp(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n |x_i - z_i|) \\ &= \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}) \exp(\sum_{i=1}^n |x_i - z_i|). \end{aligned}$$

Bentuk $\exp(-\frac{1}{2\sigma^2})$ tidak mempengaruhi sifat definit positif dari matriks kernel karena merupakan konstanta. Karena fungsi $|x_i - z_i|$ merupakan fungsi kernel maka berdasarkan Teorema 3.2.6, $\sum_{i=1}^n |x_i - z_i|$ merupakan fungsi kernel. Berdasarkan Proposisi 3.5.1, $\exp(\sum_{i=1}^n |x_i - z_i|)$ merupakan fungsi kernel. Jadi, $\kappa(x, z) = \exp(-\frac{\|x-z\|}{2\sigma^2})$ adalah fungsi kernel. ■

3.5.1 Fungsi Kernel Gaussian pada Klasifikasi *Support Vector Machine*

Dalam Klasifikasi SVM, tujuan utama kernel Gaussian adalah untuk mengukur kemiripan antara titik data pelatihan x_i dan data yang akan diprediksi x . Kernel Gaussian juga berguna dalam menangani data nonlinear yang tidak dapat dipisahkan secara linear dalam ruang fitur asli. Berdasarkan Proposisi 3.5.2, fungsi kernel Gaussian didefinisikan sebagai

$$\kappa(x, z) = \exp(-\frac{\|x - z\|^2}{2\sigma^2}) \quad (3.5.44)$$

dengan x dan z merupakan vektor input dalam ruang fitur asli, $\|x - z\|^2$ adalah jarak Euclidean antara x dan z , dan σ disebut juga parameter skala merupakan parameter

yang mengontrol lebar kernel.

Menurut Shawe-Taylor dan Cristianini, asalah primal untuk SVM dinyatakan sebagai

$$\min_{w,b,\xi} \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^n \xi_i, \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5.45)$$

dengan kendala

$$y_i(w \cdot \phi(x_i) + b) \geq 1 - \xi_i, \forall \xi_i \geq 0, \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5.46)$$

dengan $\phi(x_i)$ adalah pemetaan nonlinear dari ruang asli ke ruang berdimensi tinggi menggunakan kernel Gaussian, C disebut parameter yang mengatur offset atau bias, dan ξ_i adalah variabel *slack* (Shawe-Taylor dan Cristianini, 2004).

Masalah primal diubah menjadi masalah dual

$$\max_{\alpha} \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j \kappa(x_i, x_j), \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5.47)$$

dengan kendala $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0, 0 \leq \alpha_i \leq C, \forall i, i = 1, 2, \dots, n$. Variabel dual α_i adalah pengali Lagrange yang mengontrol kontribusi tiap data dalam menentukan *hyperplane* dan fungsi kernel Gaussian $\kappa(x, z) = \exp(-\frac{\|x-z\|^2}{2\sigma^2})$.

Setelah menyelesaikan proses *training* SVM (mencari nilai α_i) melalui optimasi), fungsi keputusan untuk klasifikasi pada data baru x diberikan oleh

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \kappa(x_i, x) + b \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \left(\exp\left(-\frac{\|x - z\|^2}{2\sigma^2}\right) \right) + b \end{aligned} \quad (3.5.48)$$

dengan (x_i, y_i) adalah *support vectors*. Klasifikasi dilakukan berdasarkan fungsi sign $f(x)$ adalah

$$\text{label prediksi} = \begin{cases} +1 & \text{jika } f(x) > 0, \\ -1 & \text{jika } f(x) \leq 0. \end{cases} \quad (3.5.49)$$

Fungsi kernel Gaussian mengukur kemiripan antara titik data *training* x_i dan data baru x . Nilai kernel akan mendekati 1 jika data baru sangat mirip dengan data *training*, dan mendekati 0 jika data baru jauh dari data *training*. Seiring bertambahnya jarak antara titik data *training* dan titik data baru, nilai kernel akan semakin kecil.

3.5.2 Fungsi Kernel Gaussian pada Regresi *Support Vector Machine*

Serupa dengan kernel polinomial, Regresi SVM dengan fungsi kernel Gaussian juga dirancang untuk mencari fungsi $f(x)$ yang mendekati hubungan input x dan output y , dengan margin ϵ yang membatasi kesalahan prediksi.

Menurut Shawe-Taylor dan Cristianini, fungsi objektif primal pada Regresi SVM dirumuskan

$$\min_{w,b,\xi,\xi^*} \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^n (\xi_i + \xi_i^*), \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5.50)$$

dengan kendala

$$y_i - (w \cdot \phi(x_i) + b) \leq \epsilon + \xi_i, \quad \xi_i \geq 0, \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5.51)$$

$$(w \cdot \phi(x_i) + b) - y_i \leq \epsilon + \xi_i^*, \quad \xi_i^* \geq 0, \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5.52)$$

$$\xi_i, \xi_i^* \geq 0, \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5.53)$$

dengan ϵ adalah parameter toleransi kesalahan, w vektor bobot, b bias, ξ dan ξ^* adalah variabel *slack* untuk menangani data yang berada di luar margin ϵ , dan C parameter regulasi yang mengontrol *trade-off* antara margin besar dan pelanggaran toleransi ϵ (Shawe-Taylor dan Cristianini, 2004).

Untuk menyederhanakan masalah, formulasi primal diubah menjadi masalah dual

$$\max_{\alpha, \alpha^*} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) y_i - \epsilon \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha_i^*) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) (\alpha_j - \alpha_j^*) \kappa(x_i, x_j) \quad (3.5.54)$$

dengan kendala

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) = 0, \quad 0 \leq \alpha_i, \alpha_i^* \leq C, \forall i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5.55)$$

dengan x_i dan x_j adalah titik data *training*, serta C adalah konstanta yang mengatur offset atau bias.

Setelah mendapatkan nilai α_i dan α_i^* melalui proses optimasi Regresi SVM,

fungsi prediksi untuk data baru x dirumuskan dengan

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) \kappa(x_i, x) + b \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) \left(\exp\left(-\frac{\|x - x_i\|^2}{2\sigma^2}\right) \right) + b. \end{aligned} \quad (3.5.56)$$

Parameter bias b dapat dihitung menggunakan data *support vector* x_k yang memenuhi $0 < \alpha_k < C$ atau $0 < \alpha_k^* < C$ dengan formula

$$b = y_k - \epsilon - \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) \left(\exp\left(-\frac{\|x - x_i\|^2}{2\sigma^2}\right) \right). \quad (3.5.57)$$

Fungsi $f(x)$ adalah nilai prediksi dari model Regresi SVM untuk data baru x . Nilai $f(x)$ dihitung dengan menjumlahkan kontribusi dari semua titik data *training*, masing-masing dikalikan dengan koefisien $\alpha_i - \alpha_i^*$ yang diperoleh selama proses *training*. Kontribusi setiap titik data bergantung pada kemiripannya dengan data yang diprediksi, yang dihitung menggunakan kernel Gaussian.

Fungsi keputusan $f(x)$ dalam regresi, tidak ada pemisahan kelas seperti dalam klasifikasi. Sebaliknya, $f(x)$ memberikan nilai kontinu yang mewakili prediksi untuk data baru x . Nilai ini bisa digunakan untuk memprediksi variabel respon.

Fungsi kernel Gaussian dalam Regresi SVM memungkinkan model untuk mengukur kemiripan antara data *training* dan data baru dalam ruang fitur berdimensi tinggi, meskipun secara eksplisit tidak pernah melakukan pemetaan ke ruang tersebut. Sebaliknya, kernel menghitung kemiripan langsung dalam ruang asli menggunakan jarak Euclidean antara titik data.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Ruang Hilbert dengan elemen unit dapat dikonstruksi menjadi *reproducing kernel Hilbert space* (RKHS) melalui definisi hasil kali dalam antara pemetaan fitur dan fungsi kernel sebagai ruang Hilbert khusus yang memungkinkan representasi eksplisit fungsi kernel dalam suatu ruang vektor dengan sifat reproduksi.
2. Berdasarkan sifat-sifat fungsi kernel yang berlaku dalam RKHS, telah dibuktikan bahwa kombinasi linear, perkalian skalar positif, serta perkalian dua fungsi kernel tetap menghasilkan fungsi kernel yang valid. Hal ini menegaskan bahwa himpunan fungsi kernel bersifat tertutup terhadap operasi-operasi tersebut, yang mendukung fleksibilitas dalam membangun fungsi kernel baru.
3. Fungsi kernel linear dapat dikonstruksi sebagai hasil kali dalam antara dua vektor fitur. Fungsi kernel polinomial merupakan fungsi polinomial dari fungsi kernel lain dengan koefisien positif. Fungsi kernel Gaussian dinyatakan sebagai fungsi eksponensial berbasis jarak antara dua titik dalam ruang fitur. Konstruksi ini membuktikan bahwa ketiga fungsi kernel tersebut memenuhi syarat sebagai kernel valid dalam RKHS.
4. Pada implementasi data set, fungsi kernel linear adalah pilihan terbaik untuk data set ini karena memberikan hasil paling konsisten dan akurat pada semua split rasio, menunjukkan hubungan linear yang kuat dalam data. Fungsi kernel Gaussian cukup fleksibel dalam menangani elemen nonlinear tetapi tidak lebih baik dari kernel linear dalam kasus ini. Fungsi kernel polinomial memiliki kinerja terendah, karena kompleksitasnya yang tidak sesuai dengan pola data.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil dan pembahasan, berikut ini saran bagi pengembangan penelitian selanjutnya.

1. Pengembangan fungsi kernel baru.
Pengembangan fungsi kernel baru yang lebih spesifik untuk aplikasi tertentu, seperti data spasial, data *time-series*, atau data gambar.
2. Penelitian dalam ruang Hilbert yang lebih kompleks.
Kajian penerapan RKHS dalam ruang Hilbert yang lebih kompleks seperti ruang Banach, ruang probabilitas Hilbert, atau ruang Hilbert tak terhingga, untuk menyelesaikan masalah dengan data yang memiliki struktur kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

- Akgül, A. 2019. Reproducing Kernel Hilbert Space Method based on Reproducing Kernel Functions for Investigating Boundary Layer Flow of a Powell–Eyring non-Newtonian Fluid. *Journal of Taibah University for Science*. 13(1): 858–863.
- Arqub, O. A., Al-Smadi, M., dan Shawagfeh, N. 2013. Solving Fredholm Integro-Differential Equations using Reproducing Kernel Hilbert Space Method. *Applied Mathematics and Computation*. 219(17): 8938–8948.
- Awan, D. A., Renato, L. G. C., Yukawa, M., dan Stanczak, S. 2020. Adaptive Learning for Symbol Detection: A Reproducing Kernel Hilbert Space Approach. *Machine Learning for Future Wireless Communications*. 1: 197–211.
- Azarnavid, B., Parvaneh, F., dan Abbasbandy, S. 2015. Picard-Reproducing Kernel Hilbert Space Method for Solving Generalized Singular Nonlinear Lane-Emden Type Equations., *Mathematical Modelling and Analysis*. 20(6): 754–767.
- Baltagi, B. H., Egger, P. H., dan Kesina, M. 2012. Small Sample Properties and Pre-test Estimation of a Spatial Hausman-Taylor Model. *Advances in Econometrics*. 29: 215-236.
- Berlinet, A. dan Thomas-Agnan, C. 2004. *Reproducing Kernel Hilbert Spaces in Probability and Statistics*. Springer, New York. 368 hlm.
- Bowman, A. W. dan Azzalini, A. 1997. *Applied Smoothing Techniques for Data Analysis: The Kernel Approach*. Clarendon Press, Oxford. 205 hlm.
- Cervantes, J., Farid, G.-L., Rodríguez-Mazahua, L., dan Lopez, A. 2020. A Comprehensive Survey on Support Vector Machine Classification: Applications, Challenges, and Trends. *Neurocomputing*. 408(1): 189–215.
- Chen, S. B., Soradi-Zeid, S., Dutta, H., Mesrizadeh, M., Jahanshahi, H., dan Chu, Y. M. 2021. Reproducing Kernel Hilbert Space Method for Nonlinear Second Order Singularly Perturbed Boundary Value Problems with Time-Delay. *Chaos, Solitons and Fractals*. 144(1): 1–10.

- Ghojogh, B., Ghodsi, A., Karray, F., dan Crowley, M. 2021. Reproducing Kernel Hilbert Space, Mercer's Theorem, Eigenfunctions, Nystrom Method, and Use of Kernels in Machine Learning: Tutorial and Survey. *CoRR* 1: 1-31.
- Ghosh, S., Dasgupta, A., dan Swetapadma, A. 2019. A Study on Support Vector Machine based Linear and Non-linear Pattern Classification. *Proceedings of the International Conference on Intelligent Sustainable Systems*. 1(1): 24–28.
- López, O. A. M., López, A. M., dan Crossa, J. 2022. *Reproducing Kernel Hilbert Spaces Regression and Classification Methods*. Springer, Cham. 336 hlm.
- Mohan, L., Pant, J., Suyal, P., dan Kumar, A. 2020. Support Vector Machine Accuracy Improvement with Classification. *Proceedings 12th International Conference on Computational Intelligence and Communication Networks*. 12(1): 477–481.
- Muthukrishnan, S., Krishnaswamy, H., Thanikodi, S., Sundaresan, D., dan Venkatraman, V. 2020. Support Vector Machine for Modelling and Simulation of Heat Exchangers. *Thermal Science*. 24(1B): 499–503.
- Paiva, A. R. C., Park, I., dan Principe, J. C. 2019. A Reproducing Kernel Hilbert Space Framework for Spike Train Signal Processing. *Neural Computation*. 21 (2): 424–449.
- Parapat, I. M., Furqon, M. T., dan Sutrisno, S. 2018. Penerapan Metode Support Vector Machine (SVM) Pada Klasifikasi Penyimpangan Tumbuh Kembang Anak. *Jurnal Pengembangan Teknologi Informasi Dan Ilmu Komputer*. 2(10): 3163–3169.
- Paulsen, V. I. dan Raghupathi, M. 2009. *An Introducing to The Theory of Reproducing Kernel Hilbert Spaces*. Cambridge University Press, Cambridge. 192 hlm.
- Pisner, D. A. dan Schnyer, D. M. 2020. *Support Vector Machine*. Machine Learning: Methods and Applications to Brain Disorders. Elsevier Inc, New York. 121 hlm.
- Rampisela, T. V. dan Rustam, Z. 2018. Classification of Schizophrenia Data Using Support Vector Machine (SVM). *Journal of Physics: Conference Series*. 1108: 1–7.
- Roman, S. 2008. *Advanced Linear Algebra*. Springer, New York. 488 hlm.
- Rosipal, R. dan Trejo, L. J. 2001. Kernel Partial Least Square Regression in Reproducing Kernel Hilbert Space. *Journal of Machine Learning Research*. 2: 97–123.

- Schölkopf, B., Burges, C. J. C., dan Smola, A. J. 1999. *Advances in Kernel Methods: Support Vector Learning*. Massachusetts Institute of Technology Press, Massachusetts. 306 hlm.
- Shawe-Taylor, J. dan Cristianini, N. 2004. *Kernel Methods for Pattern Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge. 471 hlm.
- Shukla, S., Badal, N., dan Thakur, B. K. 2023. *Sustainable Computing: Transforming Industry 4.0 to Society 5.0*. Springer, New York. 352 hlm.
- Small, C. G. dan McLeish, D. L. 1994. *Hilbert Space Methods in Probability and Statistical Inference*. John Wiley and Sons, New Jersey. 256 hlm.
- Suyanto. 2018. *Machine Learning Tingkat Dasar dan Lanjut*. Informatika, Bandung. 466 hlm.
- Tsitsiklis, J. N. dan van Roy, B. 1999. Optimal Stopping of Markov Processes: Hilbert Space Theory, Approximation Algorithms, and An Application to Pricing High-dimensional Financial Derivatives. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 44(10): 1840-1851.
- Tuo, R., He, S., Pourhabib, A., Ding, Y., dan Huang, J. Z. 2023. A Reproducing Kernel Hilbert Space Approach to Functional Calibration of Computer Models. *Journal of the American Statistical Association*. 118(542): 883–897.
- Utami, B. H. S., Usman, M., Warsono, dan Fitriani. 2023. The Form of σ -Algebra on Probability Hilbert Space. *Mathematics and Statistics*. 11(3): 446-453.
- Yang, H. 2016. *Learning Methods in Reproducing Kernel Hilbert Space Based on High-Dimensional Features*. University of California Press, California. 156 hlm.
- Zhu, W., Song, Y., dan Xiao, Y. 2020. Support Vector Machine Classifier with Huberized Pinball Loss. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. 91: 1–9.