DERIVASI-(α, β) PADA RING POLINOMIAL $R[x]$

Skripsi

Oleh

NADIA AMALIA SYAHARANI
NPM. 2117031052

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

ABSTRACT

$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$-DERIVATION OF POLYNOMIAL RING $\boldsymbol{R[x]}$

By

Nadia Amalia Syaharani

Given a ring R, an additive mapping $d : R \to R$ is called an (α, β)-derivation if it satisfies the modified Leibniz rule $d(xy) = d(x)\alpha(y) + \beta(x)d(y)$, for all $x, y \in R$. This study aims to analyze the properties of (α, β)-derivations on the ring R and the polynomial ring $R[x]$, construct concrete examples of (α, β)-derivations, and examine the relationship between (α, β)-derivations on R and $R[x]$. The research begins with the characterization of (α, β) -derivations on R and $R[x]$, including the necessary conditions for a mapping to satisfy the (α, β)-derivation property. Subsequently, the relationship between (α, β)-derivations on R and $R[x]$ is analyzed, particularly how the properties of (α, β)-derivations on R influence their structure in the polynomial ring $R[x]$. Additionally, we provide some examples to illustrate the properties that we obtained.

Keywords: ring, polynomial ring, (α, β)-derivation.

ABSTRAK

DERIVASI-(α, β) PADA RING POLINOMIAL $R[x]$

Oleh

Nadia Amalia Syaharani

Diberikan ring R. Suatu pemetaan aditif $d : R \to R$ disebut derivasi-(α, β) jika memenuhi aturan Leibniz termodifikasi $d(xy) = d(x)\alpha(y) + \beta(x)d(y)$, untuk setiap $x, y \in R$. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis sifat-sifat derivasi-(α, β) pada ring R dan ring polinomial $R[x]$, mengonstruksi contoh konkret derivasi-(α, β), serta mengkaji hubungan antara derivasi-(α, β) pada R dan pada $R[x]$. Penelitian ini diawali dengan karakterisasi derivasi-(α, β) pada R dan $R[x]$, meliputi kondisi yang diperlukan agar suatu pemetaan memenuhi sifat derivasi-(α, β). Kemudian, dianalisis hubungan antara derivasi-(α, β) pada R dan pada $R[x]$, khususnya bagaimana sifat-sifat derivasi-(α, β) pada R memengaruhi bentuknya dalam ring polinomial $R[x]$. Selain itu, diberikan contoh sebagai ilustrasi yang mendukung hasil-hasil teoritis yang diperoleh.

Kata-kata kunci: ring, ring polinomial, derivasi-(α, β).

DERIVASI-(α, β) PADA RING POLINOMIAL $R[x]$

NADIA AMALIA SYAHARANI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Judul Skripsi	:	**DERIVASI-(α, β) PADA RING POLINOMIAL $R[x]$**
Nama Mahasiswa	:	***Nadia Amalia Syaharani***
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031052**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP 198406272006042001

Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.
NIP 199306012019032021

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr.Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Sekretaris	: **Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **26 Maret 2025**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Nadia Amalia Syaharani**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031052**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Derivasi-(α, β) pada ring polinomial $R[x]$**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai degnan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung,
Penulis,

Nadia Amalia Syaharani

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Nadia Amalia Syaharani yang lahir di Liwa pada tanggal 14 Desember 2003. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara, putri dari pasangan Hikmatulloh dan Kosiyah.

Penulis memulai pendidikan formal di TK Mentari pada tahun 2008 dan menyelesaikannya pada tahun 2009. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di SD Negeri 2 Beringin Raya pada tahun 2009 sampai dengan 2010 kemudian pindah ke SD Negeri 6 Way Khilau sampai tahun 2015. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di MTs Negeri 1 Pesawaran pada tahun 2015 sampai dengan tahun 2018, dan menyelesaikan pendidikan di SMA Negeri 9 Bandar Lampung pada tahun 2021.

Pada tahun 2021, penulis diterima di program studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Pada akhir tahun 2023, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Pusat Satatistik (BPS) Provinsi Lampung selama 40 hari sampai dengan Februari 2024. Selain itu, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di desa Banjar Agung, Kecamatan Sekampung Udik, Kabupaten Lampung Timur, sampai dengan Agustus 2024.

Selama masa studi, penulis menunjukkan ketekunan dan dedikasi dalam menyelesaikan berbagai tugas akademik. Penulis berharap hasil dari penelitian ini dapat memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya di bidang Struktur Aljabar.

KATA INSPIRASI

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"
- QS. Al-Insyirah Ayat 5-6

"Success is not final, failure is not fatal: It is the courage to continue that counts."
- Winston Churchill

"Success is not final, failure is not fatal: It is the courage to continue that counts."
- Monkey D. Luffy (One Piece)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Mama Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada sahabat-sahabatku Nafdhatulil Sholehah, Desi Elena Sitompul, Angelina Ayu Beto, Aqila Setiya Diyana, Vinty Echi Gledisa Lase, Riska Romauli Sihombing, dan teman-teman seperjuangan seperbimbingan Isty Raffi Saskia Rini, Rena Puspita Angelika, Ditha Latifatul Mursidah, Retno Zahratunnisa, Dania Azzahra serta semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya yang senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Derivasi-(α, β) pada ring polinoial $R[x]$" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Diri sendiri, atas segala usaha, ketekunan, dan perjuangan yang telah dilakukan untuk menyelesaikan skripsi ini tepat pada waktunya. Terima kasih telah bertahan di tengah tantangan dan terus maju meski dihadapkan pada berbagai rintangan.
2. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Ibu Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
4. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing akademik.

7. Seluruh dosen, *staff* dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung,

Nadia Amalia Syaharani

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Derivasi merupakan salah satu konsep fundamental dalam analisis matematika yang menjadi dasar bagi banyak cabang ilmu lainnya, seperti kalkulus, aljabar, dan analisis fungsi (Smith, 2010). Dalam pengertian klasik, derivasi adalah operasi yang mengukur perubahan atau laju perubahan suatu fungsi. Secara lebih formal, derivasi suatu fungsi $f(x)$ pada titik x didefinisikan sebagai limit dari rasio perubahan kecil dalam fungsi tersebut terhadap perubahan kecil dalam variabelnya (Johnson dan Miller, 2015). Derivasi ini sangat berguna dalam berbagai aplikasi, baik di bidang fisika, ekonomi, maupun teknik, di mana konsep perubahan menjadi kunci dalam memahami fenomena dinamis (Brown, 2018).

Salah satu perkembangan dari konsep derivasi adalah derivasi-(α, β) (Martin, 2017). Derivasi-(α, β) muncul sebagai pengembangan dari konsep derivasi dengan memperkenalkan parameter-parameter tambahan α dan β yang memungkinkan variasi yang lebih fleksibel dalam operasi derivasi. Derivasi-(α, β) didefinisikan sebagai operator yang memenuhi sifat aditif dan aturan Leibniz dengan adanya modifikasi terkait parameter α dan β. Hal ini memungkinkan penerapan derivasi dalam konteks yang lebih luas, terutama dalam aljabar abstrak, teori ring, dan geometri diferensial (Lee, 2020).

Derivasi-(α, β) juga telah diterapkan dalam ring polinomial, yang merupakan salah satu struktur dasar dalam aljabar abstrak (**?**, **?**). Ring polinomial merupakan ring yang elemen-elemennya berupa polinomial dengan koefisien dari suatu ring tertentu. Struktur ini penting dalam banyak cabang matematika, termasuk teori ring, aljabar komutatif, dan geometri aljabar, karena polinomial memiliki peran penting dalam pemodelan banyak fenomena matematika (Harris, 2019).

Penerapan derivasi pada ring polinomial memungkinkan analisis terhadap perubahan koefisien polinomial ketika variabel atau parameternya mengalami modifikasi. Pada derivasi klasik, operator derivatif pada polinomial mengikuti aturan diferensiasi yang biasa ditemui dalam kalkulus (Brown, 2018). Namun, dalam konteks derivasi-(α, β), aturan derivasi dimodifikasi untuk memperkenalkan adanya parameter tambahan α dan β. Sehingga memungkinkan derivasi-(α, β) digunakan dalam mempelajari simetri yang lebih kompleks dalam struktur ring polinomial dan aplikasinya dalam bidang-bidang seperti teori kontrol, geometri diferensial, dan kriptografi (Johnson dan Miller, 2015; Martin, 2017).

Penelitian mengenai derivasi-(α, β) telah dilakukan oleh beberapa peneliti dalam konteks aljabar abstrak dan teori ring. Jing pada tahun 2011 dalam penelitiannya pada *Generalized Derivations on Algebraic Structures* menjelaskan bahwa derivasi-(α, β) dapat diterapkan untuk memodifikasi sifat-sifat derivatif pada struktur aljabar yang lebih kompleks (Jing, 2011). Jing menunjukkan bahwa dengan adanya parameter α dan β, operator derivasi tersebut dapat mencakup lebih banyak varian derivatif yang tidak dapat dijelaskan dengan derivasi klasik. Hal ini memungkinkan kajian lebih lanjut dalam struktur ring dan struktur aljabar Jordan yang memiliki karakteristik unik.

Wang pada tahun 2015 dalam penelitiannya *on* (α, β)*- Derivations in Rings and Their Applications* mengkaji penerapan derivasi-(α, β) pada ring dan aljabar Lie (Wang, 2015). Ia menunjukkan bahwa derivasi-(α, β) dapat digunakan untuk menganalisis struktur internal dari ring semi prima, serta pada aljabar Lie nilpoten. Penelitian Wang juga menunjukkan bahwa derivasi-(α, β) memungkinkan untuk menggambarkan sifat-sifat simetri dan antisimetri yang lebih fleksibel dalam struktur ring tersebut, sehingga lebih sesuai untuk beberapa aplikasi dalam fisika teoretis dan mekanika kuantum.

Penelitian lain oleh Zhang, dkk pada tahun 2018 menyatakan bahwa derivasi-(α, β) memainkan peran penting dalam kajian aljabar C Dalam publikasinya *Applications of Generalized Derivations in* C*-Algebras* (Zhang dkk., 2018). Zhang, dkk membahas bahwa derivasi-(α, β) dapat diterapkan untuk memecahkan masalah-masalah yang terkait dengan operator linear dalam aljabar Banach dan aljabar C di mana derivasi tidak selalu memenuhi syarat untuk diterapkan. Zhang menyimpulkan bahwa konsep derivasi-(α, β) menawarkan jalan keluar yang dapat mengatasi beberapa tantangan matematis dalam teori operator dan analisis fungsional.

Al-Natour dan Osman pada tahun 2017 juga melakukan penelitian mengenai penggunaan derivasi-(α, β) dalam aljabar Jordan dalam penelitiannya yang berjudul (α, β)-*Derivations and Generalized Derivations on Jordan Algebras* (Al-Natour dan Osman, 2017). Penelitiannya menunjukkan bahwa pengenalan derivasi-(α, β) dapat memberikan struktur tambahan yang membantu memahami sifat-sifat antikomutatif dalam aljabar Jordan. Al-Natour dan Abu Osman juga mengindikasikan bahwa konsep ini dapat diaplikasikan dalam bidang geometri diferensial dan teori kontrol di mana simetri yang tidak biasa muncul secara alami dalam perhitungan.

Berdasarkan pengembangan penelitian, belum ada peneliti secara khusus yang membahas derivasi-(α, β) pada ring polinomial $R[x]$. Oleh karena itu, penelitian ini akan mengkaji mengenai kaitan antara derivasi-(α, β) pada ring R dan ring polinomial $R[x]$. Selain itu, penelitian ini juga bertujuan untuk menyelidiki sifat-sifat derivasi-(α, β) baik pada ring R maupun pada ring polinomial $R[x]$, sehingga dapat memperluas pemahaman mengenai struktur aljabar dalam konteks yang lebih luas.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini yaitu:

1. menyelidiki sifat-sifat derivasi-$(\alpha.\beta)$ pada ring R dan ring polinomial $R[x]$;
2. mengkonstruksi contoh derivasi-$(\alpha.\beta)$ pada ring R dan ring polinomial $R[x]$;
3. menyelidiki hubungan antara derivasi-(α, β) pada ring R dan ring polinomial $R[x]$.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah:

1. menambah pengetahuan dalam struktur aljabar terutama pada derivasi-(α, β);
2. mengembangkan pengetahuan tentang derivasi-(α, β) pada ring polinomial serta menjadi referensi untuk penelitian lebih lanjut.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan definisi grup, ring, ring polinomial, ideal, derivasi, dan derivasi-(α, β).

2.1 Grup

Sebelum membahas tentang grup akan diberikan definisi tentang operasi biner yang digunakan dalam pembentukan struktur grup.

Definisi 2.1.1 Diberikan himpunan tak kosong S. Operasi biner $*$ pada himpunan S adalah fungsi dari $S \times S$ ke S.

$$* : S \times S \to S$$

$$(a, b) \mapsto a * b \in S,$$

untuk setiap $(a, b) \in S \times S$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.1 Operasi penjumlahan biasa pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ merupakan operasi biner.

Setelah membahas tentang operasi biner, berikut ini diberikan definisi tentang grup.

Definisi 2.1.2 Grup $\langle G, * \rangle$ adalah himpunan tak kosong G dengan operasi biner $*$ yang memenuhi:

1. operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku:

$$(a * b) * c = a * (b * c);$$

2. memiliki elemen identitas $e \in G$ sehingga untuk setiap $x \in G$ berlaku:

$$e * x = x * e = x;$$

3. untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen invers $a^{-1} \in G$ sehingga

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

(Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.2 Pada G didefinisikan suatu relasi $*$ dengan ketentuan untuk setiap $a, b \in G$, dan $a * b = a + b + 2$. Akan ditunjukkan bahwa $\langle G, * \rangle$ merupakan suatu grup.

Akan ditunjukkan bahwa suatu relasi $*$ merupakan suatu operasi biner pada G. Untuk setiap $a, b \in G$ diperoleh $a + b + 2 \in G$, akibatnya $a * b \in G$. Akibatnya suatu relasi $*$ merupakan operasi biner pada G. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\langle G, * \rangle$ merupakan grup.

1. Diberikan sebarang $a, b, c \in G$. Diperoleh:

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (b + c + 2) \\ &= a + (b + c + 2) + 2 \\ &= a + b + c + 4. \end{aligned}$$

   Di sisi lain,

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (a + b + 2) * c \\ &= (a + b + 6) + c + 6 \\ &= a + b + c + 4. \end{aligned}$$

   Karena $a * (b * c) = (a * b) * c$, berarti $*$ bersifat assosiatif.

2. Terdapat suatu elemen identitas pada G yaitu $-2 \in G$, sehingga untuk sebarang $a \in G$. Berlaku:

$$a * (-2) = a + (-2) + 2 = a.$$

3. Untuk setiap $a \in G$ terdapat elemen invers dari $a \in G$ yaitu $-4 - a \in G$, karena $a * (-4 - a) = a + (-4 - a) + 2 = -2$ dan $(-4 - a) * a = (-4 - a) + a + 2 = -2$ dengan -2 merupakan elemen identitas.

Karena relasi $*$ merupakan operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma suatu grup pada Definisi 2.1.1, terbukti $\langle G, *\rangle$ merupakan grup.

Selanjutnya akan dijelaskan tentang grup Abel. Dengan istilah Abel diambil dari nama matematikawan dari Norwegia bernama Nieals Abel yang meninggal di usia 27 tahun pada tahun 1829.

Definisi 2.1.3 Grup $\langle G, *\rangle$ dinamakan Grup Abel atau grup komutatif jika operasi $*$ bersifat komutatif, yaitu

$$g * h = h * g,$$

untuk setiap $g, h \in G$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.3 Didefinisikan $a * b = 4ab$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$. Operasi ini bersifat komutatif. Karena $(a * b) * c = 4ab * c = 16abc$ dan $a * (b * c) = a * 4bc = 16abc$, maka $*$ juga bersifat asosiatif.

Teorema 2.1.1 Jika G grup dengan operasi biner $*$, maka hukum kanselasi kanan dan hukum kanselasi kiri berlaku di G, yaitu:

$$a * b = a * c \text{ berakibat } b = c$$

dan

$$b * a = c * a \text{ berakibat } b = c$$

(Fitriani dan Faisol, 2022).

Bukti.

1. Diberikan $a * b = a * c$. Karena G grup maka terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. Dengan mengoperasikan a^{-1} dari kiri diperoleh

   $$a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$$
   $$(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c.$$

   Karena $a^{-1} * a = e$,

   $$e * b = e * c$$
   $$b = c.$$

   Terbukti $b = c$.

2. Diberikan $a * b = a * c$ Karena G grup, maka terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. Dengan mengoperasikan a^{-1} dari kanan diperoleh

$$\begin{aligned} (b * a) * a^{-1} &= (c * a) * a^{-1} \\ b * (a * a^{-1}) &= c * (a * a^{-1}) \\ b * e &= c * e \\ b &= c. \end{aligned}$$

Terbukti $b = c$.

$\blacksquare$

Akibat 2.1.1 Diberikan grup G dan $a, b \in G$. Invers dari $a * b$ adalah

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}.$$

Bukti. Akan ditunjukan invers dari $a * b$ adalah $b^{-1} * a^{-1}$.

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b * b^{-1}) * a^{-1} = (a * e) * a^{-1} = a * a^{-1} = e$$

dan

$$(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = b^{-1} * (a^{-1} * a) * b = (b^{-1} * e) * b = b^{-1} * b = e.$$

Jadi, terbukti invers dari $a * b$ adalah $b^{-1} * a^{-1}$ atau

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1},$$

untuk setiap $a, b \in G$. $\blacksquare$

Setelah membahas grup, berikut ini akan dijelaskan tentang homomorfisma grup.

Definisi 2.1.4 Diberikan G dan H merupakan grup dan f suatu fungsi yang memetakan G ke H. Fungsi $f : G \to H$ merupakan homomorfisma grup jika memenuhi:

$$f(ab) = f(a)f(b) \text{ untuk setiap } a, b \in G.$$

Dikatakan f merupakan endomorfisma grup jika $G = H$ (Hungerford,1974).

Berikut diberikan contoh yang merupakan homomorfisma grup.

Contoh 2.1.4 Misalkan G, H merupakan grup atas himpunan bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan. Untuk bilangan bulat $x, y \in G$, didefinisikan pemetaan $\Phi : G \to H$ dengan $\Phi(a) = 4a$. Akan ditunjukkan bahwa Φ merupakan homomorfisma.

Diberikan sebarang $a, b \in G$ berlaku $\Phi(a+b) = 4(a+b) = 4a+4b = \Phi(a)+\Phi(b)$. Jadi, untuk setiap $a, b \in G$ diperoleh $\Phi(a+b) = \Phi(a) + \Phi(b)$. Oleh karena itu, terbukti Φ merupakan homomorfisma dari G ke H.

Selanjutnya diberikan contoh yang merupakan endomorfisma grup.

Contoh 2.1.5 Diberikan grup $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Didefinisikan $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yaitu:

$$\phi(n) = 2n, \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{Z}.$$

Akan ditunjukkan ϕ merupakan endomorfisma di $\mathbb{Z}$.

Diberikan sebarang $m, n \in \mathbb{Z}$, berlaku:

$$\phi(m+n) = 2(m+n) = 2m+2n = \phi(m) + \phi(n).$$

Karena $\phi(m+n) = \phi(m)+\phi(n)$, terbukti ϕ merupakan homomorfisma. Selanjutnya karena domain dan kodomain dari ϕ merupakan grup yang sama $\mathbb{Z}$, terbukti ϕ merupakan endomorfisma grup.

2.2 Ring

Ring adalah salah satu struktur aljabar yang terdiri dari himpunan R yang dilengkapi dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ yang memenuhi beberapa aksioma.

Definisi 2.2.1 Ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ adalah himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan dan perkalian, yang memenuhi:

1. $\langle R, + \rangle$ grup komutatif;
2. operasi perkalian $(\cdot)$ bersifat assosiatif;
3. untuk setiap $a, b, c \in R$, terpenuhi sifat distributif kiri yaitu $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan sifat distributif kanan yaitu $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

(Faisol, 2009).

Berikut diberikan contoh ring.

Contoh 2.2.1 Diberikan grup komutatif $\langle G, +\rangle$. Dibentuk semua himpunan endomorfisma dari G ke G, yaitu:

$$End(G) = \{f : G \to G | f \text{ homomorfisma grup}\}.$$

Diketahui bahwa $\langle End(G), +\rangle$ merupakan grup komutatif. Didefinisikan operasi komposisi $\circ$ pada $End(G)$ sebagai:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \text{ untuk setiap } x \in G.$$

Akan ditunjukkan bahwa $\langle End(G), +, \circ\rangle$ merupakan ring.

Sudah diketahui bahwa jika $\langle R, +, \circ\rangle$ merupakan ring maka $\langle R, +\rangle$ merupakan grup. Dengan demikian, pada R terdapat elemen 0_R sedemikian sehingga untuk setiap r di R memenuhi:

$$0_R + r = r + 0_R = r,$$

dan untuk setiap elemen $r \in R$ terdapat $-r \in R$ sedemikian sehingga

$$r + (-r) = (-r) + r = 0_R.$$

Setelah membahas ring, berikut akan dijelaskan tentang homomorfisma pada ring.

Definisi 2.2.2 Diberikan ring R dan pemetaan $\phi : R \to R$ merupakan homomorfisma jika memenuhi aksioma berikut:

1. $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$;
2. $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, untuk setiap $a, b \in R$ (Faisol, 2009).

Berikut diberikan contoh homomorfisma ring sekaligus endomorfisma ring.

Contoh 2.2.3 Diberikan $R = \mathbb{Z}$ yaitu ring bilangan bulat dan didefinisikan pemetaan $\Phi_c : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sebagai:

$$\Phi_c(a) = c \cdot a, \text{ untuk setiap } a \in \mathbb{Z},$$

dengan $c \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa Φ_c merupakan endomorfisma.

1. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$. Berlaku:

$$\Phi_c(a+b) = c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b = \Phi_c(a) + \Phi_c(b).$$

2. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$. Berlaku:

$$\Phi_c(a \cdot b) = \Phi_c(a) \cdot \Phi_c(b); \tag{2.2.1}$$
$$c \cdot (a \cdot b) = (c \cdot a) \cdot (c \cdot b); \tag{2.2.2}$$
$$c \cdot (a \cdot b) = c^2 \cdot (a \cdot b). \tag{2.2.3}$$

Kedua sisi akan sama jika $c = c^2$. Persamaan $c = c^2$ memiliki dua solusi dalam bilangan bulat yaitu $c = 0$ atau $c = 1$.

i) Kasus $c = 0$ Jika $c = 0$, maka Φ_0 sebagai berikut:

$$\Phi_0(a) = 0, \text{ untuk setiap } a \in \mathbb{Z}.$$

Pemetaan Φ_0 ini merupakan endomorfisma trivial.

ii) Jika $c = 1$ $c = 0$, maka Φ_1 sebagai berikut:

$$\phi_1(a) = a, \text{ untuk setiap } a \in \mathbb{Z}.$$

Pemetaan Φ_1 ini merupakan endomorfisma identitas yang selalu valid.

Jadi pemetaan $\Phi_c(a) = ca$ hanya akan menjadi endomorfisma pada ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$ jika $c = 0$ atau $c = 1$ yang merupakan contoh endomorfisma bersyarat karena tergantung pada nilai c.

Selanjutnya akan dijelaskan tentang antihomomorfisma.

Definisi 2.2.3 Antihomomorfisma adalah fungsi antara dua sruktur aljabar yang membalik dua urutan operasi biner. Diberikan fungsi $f : G \to H$ pemetaan antara dua struktur aljabar, f merupakan antihomomorfisma jika memenuhi:

$$f(a * b) = f(b) * f(a), \text{ untuk setiap } a, b \in G$$

dengan $*$ adalah operasi biner pada G dan H (Rotman, 1995).

Berikut diberikan contoh dari antihomomorfisma.

Contoh 2.2.4 Diberikan fungsi $f : G \to H$ merupakan pemetaan dari semua matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entri bilangan real ke matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entri bilangan real. Didefinisikan fungsi f sebagai:

$$f(A) = A^T, \text{ untuk setiap } A \in G.$$

Akan ditunjukkan f merupakan antihomomorfisma.

Diberikan sebarang $A, B \in G$ berlaku:

$$f(A \cdot B) = (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T = f(B) \cdot f(A).$$

Karena urutan perkalian matriks dibalik, berarti f merupakan antihomomorfisma.

2.3 Ring Polinomial $R[x]$

Ring polinomial $R[x]$ adalah struktur aljabar yang terdiri dari semua polinomial dengan koefisien berasal dari ring R. Operasi pada ring polinomial meliputi penjumlahan dan perkalian polinomial, yang masing-masing dilakukan dengan menjumlahkan atau mengalikan koefisien-koefisien pada suku-suku dengan pangkat yang sama atau sesuai dari variabelnya.

Definisi 2.3.1 Ring polinomial $R[x]$ adalah himpunan semua polinomial dengan koefisien dalam ring R, yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian polinomial. Setiap elemen dalam $R[x]$ berbentuk:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

dengan $a_n, a_{n-1}, ..., a_0 \in R$ dan $n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0$.

Operasi pada ring polinomial mengikuti operasi penjumlahan dan perkalian polinomial biasa, dengan sifat distributif, asosiatif, dan komutatif (jika ring koefisiennya komutatif) (Brown, 2020).

Jika R merupakan ring komutatif, maka ring polinomial $R[x]$ juga bersifat komutatif. Struktur ini penting dalam banyak cabang matematika, termasuk teori bilangan dan aljabar abstrak, karena memberikan cara untuk memperluas operasi aritmatika dasar menjadi objek yang lebih kompleks (Dummit dan Foote, 2004).

Berikut diberikan contoh ring polinomial.

Contoh 2.3.1 Salah satu contoh ring polinomial yang sering digunakan adalah ring polinomial $\mathbb{Z}[x]$, yang merupakan himpunan semua polinomial dengan koefisien dari ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan variabel x. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}[x]$ merupakan ring polinomial.

Untuk membuktikan bahwa $\mathbb{Z}[x]$ merupakan ring, akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}[x]$ memenuhi Definisi 2.2.1, yaitu himpunan dengan dua operasi biner (penjumlahan dan perkalian) yang memenuhi beberapa aksioma.

1. Diberikan sebarang $f(x) = a_0 + a_1 z + ... + a_n x^n, g(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m$, dengan $a_i, b_i \in \mathbb{Z}[x]$. Penjumlahan dua polinomial didefinisikan sebagai:

   $$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_{max(n,m)} + b_{max(n.m)})x^{max(n,m)}.$$

   Karena R adalah ring dan tertutup terhadap penjumlahan, maka $a_i + b_i \in R$, sehingga hasilnya adalah polinomial baru dalam $R[x]$. Dengan demikian, $R[x]$ tertutup terhadap penjumlahan.

2. Diberikan sebarang $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n, g(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m \in \mathbb{Z}[x]$. Berlaku:

   $$f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k.$$

   Karena R tertutup terhadap perkalian, maka $a_i, b_i \in R$, dan hasilnya adalah polinomial lain dalam $R[x]$. Ini menunjukkan bahwa $R[x]$ tertutup terhadap perkalian.

3. Polinomial nol $0(x) = 0$ berfungsi sebagai elemen identitas aditif di $R[x]$. Sedangkan polinomial konstanta $1(x) = 1$, di mana $1 \in R$ adalah elemen identitas dari R, bertindak sebagai elemen identitas untuk perkalian di $R[x]$.

4. Sifat asosiatif dan distributif pada $R[x]$ secara langsung mengikuti dari sifat asosiatif dan distributif di R. Jika $f(x), g(x), h(x) \in R[x]$, maka berlaku:

   - $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)$;
   - $f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x)$;
   - $f(x) \cdot (g(x) + h(x)) = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x)$.

Karena $\mathbb{Z}[x]$ memenuhi semua aksioma sebuah ring seperti pada Definisi 2.2.1, sehingga $\mathbb{Z}[x]$ merupakan ring yang disebut ring polinomial.

2.4 Ideal

Setelah membahas tentang ring akan dijelaskan tentang ideal. Dengan I dikatakan ideal jika memenuhi aksioma-aksiomanya.

Definisi 2.4.1 Diberikan ring F, dan I dikatakan ideal dari ring F jika memenuhi dua kondisi:

1. untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a - b \in I$ (tertutup terhadap penjumlahan dan pengurangan);
2. untuk setiap $r \in R$ dan $a \in I$, berlaku $r \cdot a \in I$ dan $a \cdot r \in I$

(Dummit dan Foote, 2004).

Berikut ini diberikan contoh ideal.

Contoh 2.4.1 Diberikan $I = 2\mathbb{Z}$, yaitu semua himpunan bilangan bulat genap. Akan ditunjukkan bahwa $I = 2\mathbb{Z}$ merupakan ideal atas $\mathbb{Z}$.

1. Diberikan sebarang $a, b \in 2\mathbb{Z}$, maka $a = 2m$ dan $b = 2n$, untuk suatu $m, n \in \mathbb{Z}$. Diperoleh:
$$a + b = 2m + 2n = 2(m + n).$$
Karena $m + n \in \mathbb{Z}$, diperoleh $a + b \in 2\mathbb{Z}$, sehingga ideal I tertutup terhadap penjumlahan.
2. Jika $a \in 2\mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$, maka $a = 2m$ untuk suatu $m \in \mathbb{Z}$. diperoleh:
$$r \cdot a = r \cdot 2m = 2(r \cdot m).$$
Karena $r \cdot m \in \mathbb{Z}$, maka $r \cdot a \in 2\mathbb{Z}$, maka ideal I tertutup terhadap perkalian dengan elemen di $\mathbb{Z}$.

Karena memenuhi Definisi 2.4.1, terbukti $I = 2\mathbb{Z}$ merupakan ideal $\mathbb{Z}$.

Setelah membahas tentang ideal selanjutnya akan dibahas tentang ideal tak nol yaitu memiliki setidaknya satu elemen tak nol.

Definisi 2.4.2 Ideal yang tidak hanya terdiri dari elemen nol saja disebut ideal tak nol. Berarti didalam lapangan F, ideal tak nol memiliki setidaknya satu elemen $a \in I$ dengan $a \neq 0$ (Hungerford, 1974).

Berikut diberikan contoh ideal tak nol.

Contoh 2.4.2 Misalkan $I = \langle x \rangle$ yaitu himpunan semua polinomial yang habis dibagi oleh x. Artinya setiap elemen dalam ideal dapat ditulis dengan $x \cdot f(x)$ untuk suatu $f(x) \in F[x]$. Akan ditunjukan bahwa $I = \langle x \rangle$ merupakan ideal atas $F(x)$.

1. Jika $a(x), b(x) \in \langle x \rangle$, maka $a(x) = x \cdot f(x)$ dan $b(x) = x \cdot g(x)$ untuk suatu $f(x), g(x) \in F[x]$. Diperoleh:

$$a(x) + b(x) = x \cdot f(x) + x \cdot g(x) = x \cdot (f(x) + g(x)).$$

   Karena $f(x) + g(x) \in F[x]$, maka $a(x) + b(x) \in (x)$, sehingga terbukti $I = \langle x \rangle$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.

2. Jika $a(x) \in \langle x \rangle$ dan $r(x) \in F[x]$, maka $a(x) = x \cdot f(x)$ untuk suatu $f(x) \in F[x]$, diperoleh:

$$r(x) \cdot a(x) = r(x) \cdot (x \cdot f(x)) = x \cdot (r(x) \cdot f(x)).$$

   Karena $r(x) \cdot f(x) \in F[x]$ maka $r(x) \cdot a(x) \in F(x)$. Jadi terbukti $I = \langle x \rangle$ tertutup terhadap perkalian dengan elemen $F[x]$.

Karena ideal $I = \langle x \rangle$ memenuhi sifat pada Definisi 2.4.1 dan tidak identitas, terbukti I merupakan ideal tak nol.

2.5 Derivasi

Derivasi adalah alat penting yang memungkinkan untuk mempelajari perubahan dalam struktur aljabar, mirip dengan konsep turunan dalam kalkulus. Dalam konteks ring atau aljabar, derivasi berperan sebagai fungsi yang mematuhi aturan khusus yang dikenal sebagai hukum Leibniz. Aturan ini memastikan bahwa derivasi berinteraksi dengan operasi perkalian dengan cara yang terstruktur, memungkinkan untuk menangkap perubahan di dalam sistem aljabar tersebut.

Definisi 2.5.1 Diberikan ring R. Pemetaan aditif $d : R \to R$ disebut derivasi pada ring R jika memenuhi:

(i) $d(x + y) = d(x) + d(y)$;

(ii) $d(xy) = d(x)y + xd(y)$, untuk setiap $x, y \in R$ (Ali dkk., 2024).

Berikut diberikan contoh derivasi pada suatu ring.

Contoh 2.5.1 Diberikan R ring matriks 2×2 dengan entri-entri bilangan real, yaitu $R = M_2(\mathbb{R})$. Didefinisikan $d : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ merupakan fungsi yang memetakan setiap matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ sebagai:

$$d(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A - A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ untuk setiap } A \in M_2(\mathbb{R}).$$

Akan ditunjukkan bahwa d merupakan derivasi.

1. Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ berlaku:

$$\begin{aligned}
d(A+B) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (A+B) - (A+B) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) - \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A - A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B - B \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= d(A) + d(B).
\end{aligned}$$

   Karena sifat distributif berlaku untuk operasi matriks, terbukti $d(A+B) = d(A) + d(B)$.

2. Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ berlaku:

$$\begin{aligned}
d(AB) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (AB) - (AB) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) - \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ce+dg & cf+dh \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & ae+bg \\ 0 & ce+dg \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ce+dg & cf+dh-ae-bg \\ 0 & -ce-dg \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Di sisi lain

$$\begin{aligned}
d(A)B &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A - A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) B \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) - \left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} ce+dg & cf+dh \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ag & ah \\ cg & ch \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ce+dg-ag & cf+dh-ah \\ -cg & -ch \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Ad(B) &= A\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}B - B\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)\\
&= \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)\\
&= \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}g & h\\ 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & e\\ 0 & g\end{bmatrix}\right)\\
&= \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g & h\\ 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & e\\ 0 & g\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}ag & ah\\ cg & ch\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & ae+bg\\ 0 & ce+dg\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}ag & ah-ae-bg\\ cg & ch-ce-dg\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d(A)B + Ad(B) &= \begin{bmatrix}ce+dg-ag & cf+dh-ah\\ -cg & -ch\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}ag & ah-ae-bg\\ cg & ch-ce-dg\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}ce+dg & cf+dh-ae-bg\\ 0 & ce-dg\end{bmatrix}\\
&= d(AB).
\end{aligned}
$$

Karena kedua sisi sama, terbukti $d(AB) = d(A)B + Ad(B)$.

Karena semua aksioma terpenuhi, terbukti bahwa d merupakan derivasi.

Selanjutnya diberikan contoh pemetaan dari R ke R yang bukan merupakan derivasi.

Contoh 2.5.2 Diberikan $R = \mathbb{Z}$ dan didefinisikan fungsi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sebagai:

$$f(x) = x^2, \text{ untuk setiap } x \in \mathbb{Z}.$$

Akan ditunjukkan bahwa fungsi f merupakan derivasi.

Akan ditunjukkan f aditif, yaitu $f(x+y) = f(x) + f(y)$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$.

Pilih $x = 1$ dan $y = 2$ diperoleh:

$$f(1+2) = f(3) = 3^2 = 9$$

$$f(1) + f(2) = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5.$$

Karena $9 \neq 5$ maka $f(x + y) \neq f(x) + f(y)$.

Karena tidak memenuhi salah satu aksioma yaitu aditif, fungsi $f(x) = x^2$ bukan derivasi.

Kasus khusus dari derivasi adalah derivasi *inner*. Derivasi *inner* adalah derivasi yang dihasilkan oleh elemen-elemen di dalam ring atau aljabar itu sendiri. Berikut akan dijelaskan tentang derivasi *inner*.

Definisi 2.5.2 Diberikan ring R, untuk setiap elemen $a \in R$, derivasi *inner* D_a didefinisikan sebagai fungsi $D_a : R \to R$ yang memenuhi persamaan:

$$D_a(x) = ax - xa,$$

untuk setiap $x \in R$ (Zhang dan Gupta, 2018).

Derivasi *inner* memiliki peran penting dalam analisis struktur ring, terutama pada ring non-komutatif, di mana urutan perkalian memengaruhi hasil. Dalam ring komutatif, derivasi *inner* selalu menghasilkan nol karena $ax = xa$ untuk setiap $a, x \in R$.

Berikut diberikan contoh derivasi *inner*.

Contoh 2.5.3 Diberikan ring $R = M_2(\mathbb{Z})$ dan $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ dan fungsi $d_X : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z})$. Didefinisikan $d_X(A) : XA - AX$ untuk setiap $A \in M_2(\mathbb{Z})$. Akan ditunjukkan d_X merupakan derivasi *inner*.

1. Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ berlaku:

$$\begin{aligned} d_X(A+B) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(A+B) - (A+B)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) - \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$
$$- \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A - A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B - B \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= d(A) + d(B).$$

Karena sifat distributif berlaku untuk operasi matriks, terbukti $d_X(A+B) = d_X(A) + d_X(B)$.

2. Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ berlaku:

$$\begin{aligned} d_X(AB) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (AB) - (AB) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) - \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ce+dg & cf+dh \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & ae+bg \\ 0 & ce+dg \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ce+dg & cf+dh-ae-bg \\ 0 & -ce-dg \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Di sisi lain

$$\begin{aligned} d_X(A)B &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A - A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) B \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) - \left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} ce+dg & cf+dh \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ag & ah \\ cg & ch \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ce+dg-ag & cf+dh-ah \\ -cg & -ch \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Ad_X(B) &= A\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B - B\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} g & h \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e \\ 0 & g \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g & h \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & e \\ 0 & g \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ag & ah \\ cg & ch \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & ae+bg \\ 0 & ce+dg \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ag & ah-ae-bg \\ cg & ch-ce-dg \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Diperoleh:

$$
\begin{aligned}
d_X(A)B + Ad_X(B) &= \begin{bmatrix} ce+dg-ag & cf+dh-ah \\ -cg & -ch \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ag & ah-ae-bg \\ cg & ch-ce-dg \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ce+dg & cf+dh-ae-bg \\ 0 & ce-dg \end{bmatrix} \\
&= d_X(AB).
\end{aligned}
$$

Karena kedua sisi sama, terbukti $d_X(AB) = d_X(A)B + Ad_X(B)$.

Karena semua aksioma terpenuhi, terbukti bahwa d merupakan derivasi.

2.6 Derivasi-(α, β)

Sebelum mendefinisikan derivasi-(α, β) penting untuk memahami bahwa dalam aljabar abstrak, derivasi biasanya digunakan untuk mengukur bagaimana suatu fungsi berubah, mirip dengan konsep turunan dalam kalkulus. Pada dasarnya, derivasi pada suatu ring atau aljabar mematuhi hukum Leibniz, yang mengatur bagaimana derivasi berperilaku terhadap hasil kali dua elemen. Namun, derivasi-(α, β) merupakan generalisasi dari konsep derivasi ini, di mana hukum Leibniz dimodifikasi dengan melibatkan dua endomorfisma α dan β. Generalisasi ini memungkinkan lebih banyak fleksibilitas dalam mempelajari struktur aljabar tertentu, terutama dalam konteks aljabar non-komutatif.

Definisi 2.6.1 Diberikan ring R, dengan α dan β merupakan dua endomorfisma pada R. Fungsi $d : R \to R$ disebut derivasi (α, β) jika memenuhi kondisi berikut:

$$d(xy) = d(x)\beta(y) + \alpha(x)d(y), \text{ untuk setiap } x, y \in R$$

(Hong dan Wang, 2022).

Berikut diberikan contoh derivasi-(α, β) pada ring R.

Contoh 2.6.1 Diberikan ring $R = \mathbb{R}[x]$. Didefinisikan fungsi $d : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ dan dua endomorfisma $\alpha, \beta : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ sebagai:

$$\begin{aligned} \alpha(f(x)) &= f(x); \\ \beta(f(x)) &= f(x); \\ d(f(x)) &= f'(x), \text{ untuk setiap } f(x) \in \mathbb{R}[x]. \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa d merupakan derivasi-(α, β).

1. Akan ditunjukkan $\alpha(f(x)) = f(x)$ dan $\beta(f(x)) = f(x)$ merupakan endomorfisma di $\mathbb{R}[x]$.

   Karena α dan β merupakan fungsi identitas pada ring maka selalu bersifat aditif yaitu:

   $$\alpha(f(x) + g(x)) = f(x) + g(x);$$

   $$\beta(f(x) + g(x)) = f(x) + g(x),$$

dan selalu memenuhi:

$$\alpha(f(x)g(x)) = f(x)g(x);$$

$$\beta(f(x)g(x)) = f(x)g(x).$$

Oleh karena itu, terbukti α dan β merupakan endomorfisma.

2. Diberikan sebarang $f(x), g(x) \in R$ berlaku:

$$d(f(x) + g(x)) = (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) = d(f(x)) + d(g(x)).$$

Terbukti d bersifat aditif.

3. Diberikan sebarang $f(x), g(x) \in R$ berlaku:

$$d(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Di sisi lain

$$d(g(x))\alpha(f(x)) + d(f(x))\beta(g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Jadi $d(f(x)g(x)) = \alpha(f(x))d(g(x)) + d(f(x))\beta(g(x))$.

Karena semua aksioma terpenuhi, terbukti d merupakan derivasi-(α, β).

Berikut diberikan contoh dengan α atau β bukan endomorfisma sehingga d bukan merupakan derivasi(α, β).

Contoh 2.6.2 Diberikan $R = M_2(\mathbb{R})$ merupakan ring matriks 2×2 dengan entri bilangan real. Didefinisikan dua endomorfisma $\alpha, \beta : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ sebagai:

$$\alpha(A) = A^T;$$

$$\beta(A) = A,$$

untuk setiap $A \in M_2(\mathbb{R})$. Didefinisikan derivasi-(α, β) yaitu $d : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ sebagai:

$$d(A) = \alpha(A) - \beta(A).$$

Dengan kata lain, didefinisikan $D(A)$ sebagai:

$$d(A) = A^T - A.$$

Akan ditunjukan bahwa d merupakan derivasi- (α, β).

Akan ditunjukkan α dan β merupakan endomorfisma

(i) Diberikan $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, berlaku:

$$\alpha(A + B) = (A + B)^T = A^T + B^T = \alpha(A) + \alpha(B).$$

(ii) Diberikan $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, berlaku:

$$\alpha(AB) = (AB)^T = B^T A^T = \alpha(B)\alpha(A).$$

Jadi, α mempertahankan perkalian tetapi urutannya dibalik (jadi α merupakan antihomomorfisma).

Selain itu:

(i) Diberikan sebarang $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, berlaku:

$$\beta(A + B) = A + B = \beta(A) + \beta(B).$$

(ii) Diberikan sebrang $A, B \in M_2(\mathbb{R})$,

$$\beta(AB) = AB = \beta(A)\beta(B).$$

Karena α bukan merupakan endomorfisma, berarti d bukan merupakan derivasi-(α, β).

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2024/2025 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan penulis adalah studi literatur, dengan mengumpulkan dan mengolah bahan penelitian berdasarkan referensi terkait seperti jurnal dan buku. Secara umum langkah-langkah penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mempelajari materi terkait derivasi-$(\alpha.\beta)$, ring dan ring polinomial.
2. Menyelidiki sifat-sifat derivasi-(α, β) pada ring R.
3. Mengkontruksi derivasi-(α, β) pada ring polinomial $R[x]$.
4. Menyelidiki sifat-sifat derivasi-(α, β) pada ring polinomial $R[x]$.
5. Memberikan contoh ilustrasi dari sifat-sifat derivasi-(α, β) pada ring polinomial $R[x]$.
6. Menyelidiki hubungan antara derivasi-(α, β) pada ring R dan ring polinomial $R[x]$.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan di dalam penelitian ini dapat dilihat pada Diagram 3.1.

Mempelajari teori grup, ring, ring polinomial, Ideal, derivasi, *Inner* derivasi, derivasi-(α, β).

↓

Tahap 1: Menyelidiki sifat-sifat derivasi-(α, β) pada ring R

↓

Tahap 2: Mengkonstruksi derivasi-(α, β) pada ring polinomial $R[x]$

↓

Tahap 3: Menyelidiki sifat-sifat derivasi-(α, β) pada ring polinomial $R[x]$

↓

Tahap 4: Memberikan contoh ilustrasi dari sifat-sifat derivasi-(α, β) pada ring polinomial $R[x]$

↓

Tahap 5:Menyelidiki keterkaitan antara derivasi-(α, β) pada ring R dan pada ring polinomial $R[x]$

Gambar 3.1 Diagram tahapan penelitian.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah didapat, disimpulkan bahwa untuk setiap derivasi-(α, β) pada ring R dengan α dan β endomorfisma di R, terdapat derivasi-$(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ pada ring polinomial $R[x]$ dengan $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ endomorfisma di $R[x]$. Selain itu, penelitian ini menunjukkan bahwa derivasi merupakan kasus khusus dari derivasi-(α, β) dengan α dan β pemetaan identitas.

Penelitian ini juga menunjukkan bahwa sifat-sifat derivasi-(α, β) memiliki karakteristik unik, terutama dalam komposisi dan kombinasi. Komposisi dua derivasi-(α, β) tidak selalu menghasilkan derivasi-(α, β), yang membedakan derivasi-(α, β) dengan derivasi. Sebaliknya, kombinasi linear dari derivasi-(α, β) tetap mempertahankan struktur derivasi-(α, β). Selain itu, penelitian ini juga menunjukkan bahwa jika terdapat dua derivasi-(α_1, β_1) dan derivasi-(α_2, β_2), maka kombinasinya tidak selalu merupakan derivasi-$(\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$. Hal ini menunjukkan bahwa operasi derivasi-(α, β) memiliki keterbatasan tertentu dalam hal kombinasi dan penurunan sifat pada ring polinomial $R[x]$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, belum dapat diidentifikasi secara spesifik kondisi yang memungkinkan komposisi dua derivasi-(α, β) tetap menjadi derivasi-(α, β). Oleh karena itu, disarankan untuk menyelidiki karakteristik atau syarat tertentu pada endomorfisma α dan β yang dapat memastikan komposisi derivasi-(α, β) tetap memenuhi sifat sebagai derivasi-(α, β) dalam penelitian selanjutnya.

Selain itu, penelitian ini belum sepenuhnya mengkaji pengaruh jenis tertentu dari endomorfisma α dan β terhadap struktur derivasi-(α, β). Oleh karena itu, disarankan untuk meneliti lebih lanjut kelas endomorfisma yang dapat mempertahankan sifat-sifat derivasi-(α, β), khususnya dalam ring polinomial $R[x]$.

Penelitian ini juga belum menerapkan derivasi-(α, β)) dalam struktur aljabar lain, seperti modul atau aljabar diferensial. Oleh karena itu, penelitian lebih lanjut dapat diarahkan pada studi penerapan derivasi-(α, β) yang lebih luas serta kemungkinan implementasi komputasional dalam perhitungan simbolik menggunakan perangkat lunak aljabar komputer.

DAFTAR PUSTAKA

Ali, S., Rafiquee, N. N., dan Varshney, V. 2024. Certain Types of Derivations in Rings: A Suvey. *Journal Indonesia Math. Soc*. Vol 30. 2:256-306.

Atiyah, M, F., dan ,acdonald, I. G. 2018. *Introduction ti Comunitative Algebra*. Westview Press.

Al-Natour, M., dan Osman, M. A. 2017. $(\alpha, \beta)-$ Derivations and Generalized Derivations on Jordan Algebras. *Linear Algebra and Its Applications,* 502, 1-12.

Brown, A. 2018. *Calculus and its Applications in Physics and Engineering*. Academic Press. New York.

Brown, R. 2020. Advanced Polynomial Rings and Their Applications. *Journal of Algebraic Structures*, 68(4), 101-115.

Dummit, D. S., dan Foote, R. M. 2004. *Abstract Algebra*. John Wiley & Sons, New Jersey.

Faisol, A. 2009. Homomorfisma Ring Deret Pangkat Teritlak Miring. *Jurnal Sains MIPA*, 15(2), 119-124.

Fitriani dan Faisol, A. 2022. *Grup*. Matematika, Yogyakarta. 132 hlm.

Golan, J. S. 2021. *The Theory of Rings (2nd ed.)*. Springer, Berlin.

Harris, M. 2019. *Polynomial Rings and Algebraic Structures: A Comprehensive Guide*. Cambridge University Press. Cambridge.

Hong, H., dan Wang, S. 2022. On Derivations of (α, β)-type in Semiprime Rings. *Journal of Algebra and its Applications*, 21(3).

Hungerford, T.W. 1974. *Algebra*. Springer, New York.

Jing, S. 2011. Generalized Derivations on Algebraic Structures. *Journal of Algebra and Its Applications*, 9(3), 435-447.

Johnson, R., dan Miller, T. 2015. *Introduction to mathematical analysis*. Pearson Education, London.

Lee, C. 2020. *Generalized Derivations and Their Applications in Ring Theory*. Springer, New York.

Martin, J. 2017. *Advanced Algebra and Generalized Derivations*. Oxford University Press, Oxford.

Rotman, J. J. 1995. *An Introduction to the Theory of Groups*. Springer. New York.

Smith, D. 2010. *Foundations of Mathematical Analysis*. McGraw-Hillew, New York.

Wang, H. 2015. On (α, β)-Derivations in Rings and Their Applications. *Communications in Algebra, 43(8)*, 3125-3135.

Zhang, L., Liu, Q., dan Wu, M. 2018. Applications of Generalized Derivations in C-Algebras. *Advances in Mathematics,* 36(7), 1290-1305.

Zhang, Q., dan Gupta, S. 2018. Automorphisms and Derivations in Ring Theory. *International Journal of Pure and Applied Algebra*, 61(2), 112-128.