PHYSICS-INFORMED NEURAL NETWORKS WAKTU DISKRIT PADA PERSAMAAN GELOMBANG DUA DIMENSI

(SKRIPSI)

Oleh

Muhammad Imron Rosadi
2017031022

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

ABSTRACT

PHYSICS-INFORMED NEURAL NETWORKS DISCRITE TIME FOR TWO DIMENSIONAL WAVE EQUATION

By

Muhammad Imron Rosadi

This study implements Physics-Informed Neural Networks (PINNs) with a discrete-time approach to approximate the solution of the two-dimensional wave equation. The model is trained on a domain $x, y \in [-1,1]$, $t \in [0,1]$ with initial conditions $u(x, y, 0) = \sin(\pi x)\sin(\pi y$, $\partial u / \partial t\,(x, y, 0) = 0$, and homogeneous Dirichlet boundary conditions. Using 4 hidden layers of 100 neurons and the Adam optimizer for 70,000 epochs, the model achieves good accuracy, with mean squared error reaching zero at some points and up to 0.002 in others. The method is accurate for single-point predictions but less stable across the entire domain. These results demonstrate that discrete-time PINNs can effectively approximate solutions to the 2D wave equation and offer potential for more complex future applications.

Keywords: Physics-Informed Neural Networks (PINNs), two-dimensional wave equation, discrete time, partial differential equation, numerical method, deep learning, Dirichlet boundary condition, neural network approximation.

ABSTRAK

PHYSICS-INFORMED NEURAL NETWORKS WAKTU DISKRIT PADA PERSAMAAN GELOMBANG DUA DIMENSI

Oleh

Muhammad Imron Rosadi

Penelitian ini mengimplementasikan metode Physics-Informed Neural Networks (PINNs) dengan pendekatan waktu diskrit untuk mendekati solusi dari persamaan gelombang dua dimensi. Domain permasalahan berada pada $x, y \in [-1,1]$, $t \in [0,1]$ dengan kondisi awal $u(x, y, 0) = \sin(\pi x)\sin(\pi y$, $\partial u/ \partial t\ (x, y, 0) = 0$, serta syarat batas berupa Dirichlet homogen. Model jaringan saraf terdiri dari 4 hidden layer dengan masing-masing 100 neuron dan dioptimasi menggunakan algoritma Adam selama 70.000 epoch. Hasil menunjukkan bahwa model mampu mendekati solusi analitik dengan akurasi yang baik, di mana nilai mean squared error (MSE) mencapai nol pada beberapa titik dan maksimal sekitar 0.002 di titik lainnya. Metode ini cukup akurat untuk prediksi titik tunggal namun kurang stabil di seluruh domain. Secara keseluruhan, pendekatan PINNs waktu diskrit menunjukkan potensi dalam menyelesaikan persamaan gelombang dua dimensi dan dapat dikembangkan lebih lanjut untuk kasus yang lebih kompleks.

Kata-kata Kunci: Physics-Informed Neural Networks (PINNs), persamaan gelombang dua dimensi, waktu diskrit, persamaan diferensial parsial, metode numerik, pembelajaran dalam, syarat batas Dirichlet, pendekatan jaringan saraf.

PHYSICS-INFORMED NEURAL NETWORKS WAKTU DISKRIT PADA PERSAMAAN GELOMBANG DUA DIMENSI

Oleh

Muhammad Imron Rosadi

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Judul Skripsi : **PHYSICS-INFORMED NEURAL NETWORKS WAKTU DISKRIT PADA PERSAMAAN GELOMBANG DUA DIMENSI**

Nama Mahasiswa : **Muhammad Imron Rosadi**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2017031022**

Progam Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Agus Strisno, S.Si., M.Si.	**Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**
NIP. 19700831 199903 1 002	NIP. 1961012 819881 1 2001

2. Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim penguji

Ketua	: **Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	: **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN PENDIDIKAN TINGGI, SAINS, DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS LAMPUNG
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Dr. Eng Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **04 Agustus 2025**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Muhammad Imron Rosadi**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **2017031022**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **PHYSICS-INFORMED NEURAL NETWORKS WAKTU DISKRIT PADA PERSAMAAN GELOMBANG DUA DIMENSI**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung,
Penulis,

Muhammad Imron Rosadi

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Muhammad Imron Rosadi yang lahir di Metro pada tanggal 10 Desember 2001. Putra pertama dari Bapak Supratikno dan Ibu Sunarsih.

Penulis menempuh Pendidikan di TK Aisyiyah Bustanul Athfal lulus pada tahun 2008. Kemudian melanjutkan ke Sekolah Dasar di SDN 3 Purwodadi lulus pada tahun 2014. Sekolah Menengah Pertama di SMP IT Bina Insani lulus pada tahun 2017. Sekolah Menengah Atas di MAN 1 Metro lulus pada tahun 2020. Pada tahun 2020 penulis terdaftar sebagai mahasiswa S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN).

Pada tahun 2023 penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Badan Riset dan Inovasi Nasional (BRIN) Kabupaten Lampung Selatan dan melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kota Agung, Kecamatan Kota Agung, Kabupaten Tanggamus.

KATA INSPIRASI

"Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan."

(QS. Al – Insyirah : 6)

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya."

(QS. Al – Baqarah : 286)

“Hidup ini bukan tentang seberapa lama kamu bertahan, tapi seberapa banyak arti yang kamu tinggalkan.”

(Asuma Sarutobi)

PERSEMBAHAN

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang karena atas limpahan berkah, rahmat, karunia, dan izin-Nya, kepada penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan bahagia, saya persembahkan rasa terima kasih saya kepada:

Keluarga Kecilku

Bapakku Supratikno dan Ibuku Sunarsih serta Adikku Ayu Nur Fatin. Keluarga terindah yang ada dalam hidupku Terima kasih untuk kasih sayang, doa, dukungan, serta pengorbanan dan bimbingan yang diberikan untukku selama ini.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terima kasih telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Untuk seorang teman spesial

Terima kasih sudah selalu menemani dari segala macam kondisi, selalu memberikan semangat, selalu mengingatkan untuk tidak menyerah dan terima kasih sayang sudah datang dan menjadi bagian dari hidupku.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, segala puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang karena atas limpahan berkah, rahmat, karunia, dan izin-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul *"Physics-Informed Neural Networks* Waktu Diskrit Pada Persamaan Gelombang Dua Dimensi*"*. Shalawat beserta salam senantiasa tercurah kepada baginda Nabi Muhammad SAW, suri tauladan untuk kita semua, semoga dikemudian hari mendapat syafaat dari beliau.

Dalam penyusunan skripsi ini penulis banyak mendapatkan bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin mengungkapkan rasa terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing I yang senantiasa memberikan arahan, bantuan, motivasi, serta masukan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
2. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si. selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan dan arahan serta selalu bersedia meluangkan waktu untuk membantu kepada penulis dalam proses penyelesaian skripsi ini.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku dosen pembahas, sekaligus Pembimbing Akademik, dan Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang telah memberikan masukan, kritik, dan saran serta evaluasi kepada penulis dalam penyelesaian skripsi ini. Dan yang telah memberikan bimbingan dan arahan selama perkuliahan
4. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

5. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Orang tuaku Bapak Supratikno dan Ibu Sunarsih, Adikku Ayu Nur Fatin, dan keluarga tercinta yang selalu memberikan dukungan, semangat, motivasi, dan doa yang tak terhingga untuk penulis.
7. Sahabat-sahabat seperjuangan penulis di Jurusan Matematika Abdi, Aji, Apri, Ardi, Boy, Dian, Farrel, Jihad, Nanda, dan Prisko yang telah memberikan bantuan, semangat, serta pengalaman yang berharga bagi penulis.
8. Manusia baik bernama Puja atau yang akrab penulis panggil sayang terima kasih atas waktu, dukungan, doa, dan semuanya
9. Teman-teman Bimbingan Bapak Agus, teman-teman Matematika 2020, teman-teman KKN Kota Agung, dan teman-teman lainnya yang telah memberikan keceriaan, semangat, dan motivasi penulis.
10. Semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Untuk itu, dengan segala kerendahan hati penulis mengharapkan masukan berupa kritik dan saran guna dijadikan bahan perbaikan ke depannya. Semoga skripsi ini dapat berguna dan bermanfaat untuk semua pihak yang membacanya.

Bandar Lampung,

Muhammad Imron Rosadi

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan variabel-variabel tak bebas dan derivatif-derivatifnya terhadap variabel-variabel bebas (Lumbantoruan J. H. 2019). Persamaan diferensial memegang peranan penting dalam rekayasa, fisika, matematika, ilmu ekonomi, dan berbagai macam disiplin ilmu lain. Terdapat dua persamaan diferensial yaitu, persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP). Pada PDP terdapat berbagai persamaan, salah satunya yaitu persamaan gelombang.

Persamaan gelombang dua dimensi merupakan salah satu persamaan yang terdapat pada persamaan gelombang. Persamaan gelombang merupakan persamaan matematis yang menggambarkan propagasi gelombang, seperti gelombang suara, gelombang air, atau gelombang elektromagnetik (Evans, Lawrence C., 1993). Persamaan gelombang dua dimensi sering digunakan untuk menggambarkan perambatan gelombang di permukaan air, suara, dan fenomena gelombang lainnya dalam dua dimensi. Salah satu bentuk umumnya adalah persamaan gelombang dua dimensi pada bidang xy. Solusi untuk penyelesaian persamaan gelombang dua dimensi ini, dapat diselesaikan dengan metode analitik, namun terdapat persamaan gelombang dua dimensi yang sangat kompleks sehingga diperlukan suatu metode lainnya, yaitu metode numerik.

Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan (*arithmetic*)(Triatmodjo, B. 2010). Metode ini umumnya digunakan untuk menyelesaikan masalah yang sulit atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik. Dalam metode numerik, masalah matematis dipecahkan dengan cara mendekati solusi numerik menggunakan algoritma dan komputasi.

Dalam dunia penyelesaian persamaan diferensial parsial (PDP), *neural network* telah muncul sebagai metode numerik yang efektif dan inovatif. *Artificial neural network* pada dasarnya adalah model komputasi paralel masif yang meniru fungsi otak manusia (Dongare A.D., *et al* 2012), dapat digunakan untuk mendekati dan menyelesaikan PDP yang seringkali kompleks dan sulit dipecahkan dengan metode tradisional. Keunggulan utama *neural network* dalam konteks ini terletak pada kemampuannya untuk secara otomatis menyesuaikan diri dan menangkap struktur dan pola dari data *spasial* dan *temporal*, tanpa memerlukan persamaan eksplisit. Dengan memanfaatkan teknik pembelajaran mesin, *neural network* menyajikan pendekatan yang adaptif dan kuat dalam menangani tantangan penyelesaian PDP, menjadikannya sebagai alat yang sangat relevan dan inovatif dalam penelitian ilmiah dan aplikasi teknik.

Sehingga, dalam penelitian ini akan dibahas mengenai salah satu metode yang ada pada *neural network,* yaitu *physics-informed neural networks* (PINNs). Metode ini akan digunakan untuk mencari solusi yang mendekati dari persamaan gelombang dua dimensi dalam waktu diskrit.(Raissi, M., *et al* 2021). PINNs merupakan pendekatan inovatif yang menggabungkan pengetahuan fisika dengan kapabilitas *neural network*, sehingga diharapkan dapat memberikan hasil yang lebih akurat dan efisien dalam pemodelan fenomena fisika kompleks.

1.2. Rumusan Masalah

Bagaimana model *physics-informed neural networks* pada waktu diskrit melakukan interpolasi untuk mendekati solusi dari persamaan diferensial gelombang dua dimensi?

1.3. Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengimplementasikan metode *physics-informed neural networks* pada model waktu diskrit untuk menginterpolasi solusi persamaan diferensial gelombang dua dimensi.

1.4. Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, penulis akan memberikan batasan masalah agar penelitian lebih terarah. Adapun batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Dalam skripsi ini akan membahas solusi pendekatan persamaan gelombang dua dimensi dengan *machine learning* berupa *neural network physics-informed neural networks*, dan solusi analitik sebagai pembanding dengan menggunakan metode pemisahan variabel.

2. Fokus utama akan diarahkan pada implementasi algoritma *physics-informed neural networks*, pengujian, dan evaluasi hasil yang diperoleh dari metode tersebut.

3. Persamaan diferensial parsial yang digunakan adalah persamaan gelombang dua dimensi :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), x \in [-1,1], y \in [-1,1], t \in [0,1] \quad (1.1)$$

dengan kondisi awal :

$$u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (1.2)$$

dengan kecepatan awal :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0 \quad (1.3)$$

untuk syarat batas pada penelitian ini digunakan syarat batas *Dirichlet* yang homogen:

$$u(-1, y, t) = u(1, y, t) = 0 \quad (1.4)$$

$$u(x, -1, t) = u(x, 1, t) = 0 \quad (1.5)$$

1.5. Manfaat Penelitian

Penulis berharap melalui penelitian ini dapat mengetahui kegunaan *physics-informed neural networks* dalam mencari solusi untuk persamaan diferensial gelombang dua dimensi.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Persamaan Diferensial (PD)

Menurut Darmawijoyo (2019) persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat derivatif (turunan) dari suatu fungsi.

Persamaan diferensial (PD) secara umum persamaan yang menghubungkan suatu fungsi yang tidak diketahui dengan turunan-turunannya. Bentuk umum dari sebuah persamaan diferensial dalam berbagai buku dan artikel diklasifikasikan menjadi persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP).

Berikut beberapa persamaan umum persamaan diferensial.

1. Bentuk Umum Persamaan Diferensial Biasa (PDB) Orde ke-n

   Untuk Persamaan Diferensial Biasa (PDB), yang hanya melibatkan turunan terhadap satu variabel bebas (misalnya x), bentuk umum orde ke-n adalah:

   $$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \tag{2.1}$$

   Di mana:

   - x adalah variabel bebas.
   - y adalah fungsi tak diketahui dari x, yaitu $y(x)$.
   - $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$ adalah turunan pertama, kedua, hingga ke-n dari y terhadap x.
   - F adalah fungsi yang menghubungkan x, y, dan turunan-turunannya.

- Orde n adalah orde turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan.

Kadang-kadang, PDB juga ditulis dalam bentuk eksplisit untuk turunan tertinggi:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) \tag{2.2}$$

PDB orde ke-n adalah yang paling umum digunakan untuk memodelkan fenomena yang melibatkan laju perubahan suatu kuantitas terhadap satu variabel (Boyce, DiPrima, & Meade, 2017).

2. Bentuk Umum Persamaan Diferensial Parsial (PDP)

   Untuk persamaan diferensial parsial, yang melibatkan turunan parsial terhadap dua atau lebih variabel bebas, bentuk umumnya akan jauh lebih kompleks. Sebagai contoh, untuk fungsi u yang bergantung pada variabel bebas x, y, z, t:

$$F\left(x, y, z, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial xy}, \dots\right) = 0 \tag{2.3}$$

   PDP digunakan untuk memodelkan fenomena yang bervariasi dalam ruang dan waktu, seperti difusi panas, gelombang suara, atau dinamika fluida (Finley, 2024).

2.2. Persamaan Diferensial Parsial (PDP)

Persamaan Diferensial Parsial (PDP) adalah suatu persamaan diferensial yang memuat fungsi yang tidak diketahui (variabel tak bebas) yang bergantung pada dua atau lebih variabel bebas, dan melibatkan turunan parsial dari fungsi tersebut terhadap variabel-variabel bebasnya (Zill & Cullen, 2017).

Berbeda dengan Persamaan Diferensial Biasa (PDB) yang hanya melibatkan turunan terhadap satu variabel bebas, PDP digunakan untuk memodelkan fenomena yang bervariasi dalam banyak dimensi, baik itu ruang (dua atau tiga dimensi) maupun waktu (Finley, 2024).

Contoh Persamaan Diferensial Parsial:

Berikut adalah beberapa contoh PDP yang sering muncul dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknik:

Persamaan laplace (PDP Orde 2):

Persamaan ini sering digunakan dalam fisika dan teknik untuk menggambarkan distribusi potensial dalam medan listrik atau gravitasi di daerah bebas muatan, atau distribusi suhu dalam keadaan tunak (*steady-state*).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2.4}$$

Di sini, u adalah fungsi dari x dan y.

Persamaan gelombang (PDP Orde 2):

Persamaan ini memodelkan fenomena gelombang, seperti gelombang suara, gelombang cahaya, atau getaran pada tali atau membran.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.5}$$

Di sini, u adalah fungsi dari posisi (x) dan waktu (t), dan v adalah kecepatan gelombang.

Persamaan panas / difusi (PDP Orde 2):

Persamaan ini menggambarkan bagaimana panas atau konsentrasi suatu zat menyebar melalui suatu medium seiring waktu.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{2.6}$$

Di sini, u adalah fungsi dari posisi (x, y, z) dan waktu (t), dan α adalah konstanta difusivitas termal atau difusi.

2.3. Persamaan Gelombang

Persamaan gelombang merupakan persamaan matematis yang menggambarkan propagasi gelombang, seperti gelombang suara, gelombang air, atau gelombang elektromagnetik. Bentuk persamaan umum gelombang adalah :

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \tag{2.7}$$

Bergantung pada syarat awal dan kondisi batas. Di mana $t > 0$ dan $x \in U$, di mana $U \subset \mathbb{R}^n$ terbuka. $\bar{U} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}, u = u(x, t)$, dan Laplacian Δ diambil sehubungan dengan variable *spasial* $x = (x_1, \dots, x_n)$. Biasanya ditulis sebagai berikut

$$\blacksquare u = u_{tt} - \Delta u. \tag{2.8}$$

(Evans, Lawrence C., 1993)

2.3.1. Persamaan Gelombang Dua Dimensi

Gelombang dua dimensi adalah gelombang yang merambat dalam dua arah pada sebuah permukaan atau bidang. Persamaan umum gelombang dua dimensi adalah

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{2.9}$$

(Bachrun, R. S., Khaeruddin, K., & Mahie, A. G. 2015)

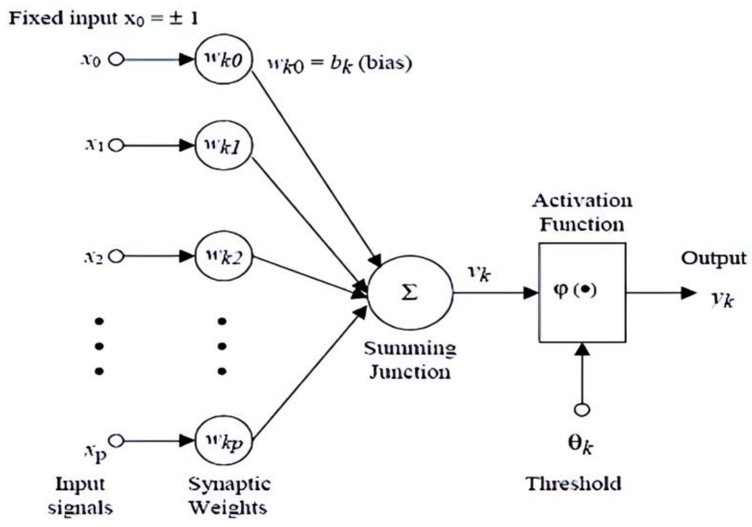
di mana :

- u adalah fungsi perpindahan gelombang pada titik (x, y) pada waktu t.
- c adalah kecepatan rambat gelombang.
- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ adalah percepatan gelombang.
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dan $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ adalah perubahan kedua dari perpindahan gelombang terhadap koordinat x dan y.

2.4. *Artificial Neural Network* (ANN)

Artificial neural network pada dasarnya adalah model komputasi paralel masif yang meniru fungsi otak manusia. Sebuah ANN terdiri dari sejumlah besar prosesor sederhana yang dihubungkan oleh koneksi berbobot. Dengan analogi, *node* pemrosesan dapat disebut "*neuron*". *Output* setiap *node* hanya bergantung pada informasi yang tersedia secara lokal di *node*, baik yang disimpan secara *internal* atau tiba melalui koneksi berbobot. Setiap unit menerima *input* dari banyak *node* lain dan mengirimkan *output* nya ke *node* lain. Dengan sendirinya, satu elemen pemrosesan tidak terlalu kuat; itu menghasilkan *output* skalar dengan nilai numerik tunggal, yang merupakan fungsi non-linier sederhana dari *input* nya.

Saat membuat model fungsional *neuron* biologis, ada tiga komponen dasar yang penting. Pertama, sinapsis *neuron* dimodelkan sebagai bobot. Kekuatan hubungan antara *input* dan *neuron* ditentukan oleh nilai bobotnya. Nilai bobot negatif mencerminkan hubungan penghambatan, sedangkan nilai positif menunjukkan hubungan rangsang. Dua, komponen berikutnya memodelkan aktivitas sebenarnya di dalam sel *neuron*. Penambah merangkum semua *input* yang diubah berdasarkan bobotnya masing-masing. Kegiatan ini disebut sebagai kombinasi linier. Terakhir, fungsi aktivasi mengontrol amplitudo *output neuron*. Kisaran *output* yang dapat diterima biasanya antara 0 (nol) dan 1 (satu), atau -1 (minus satu) dan 1 (satu). Secara matematis, proses ini dijelaskan pada gambar 2.1



Gambar 2. 1. Model matematika ANN

Dari model ini interval aktivitas *neuron* dapat ditunjukan,

$$v_k = \sum_{j=1}^{p} w_{kj} x_j \tag{2.10}$$

Output dari *neuron*, Y_k, oleh karena itu, merupakan hasil dari beberapa fungsi aktivasi pada nilai V_k (Dongare A.D., *et al*. 2012).

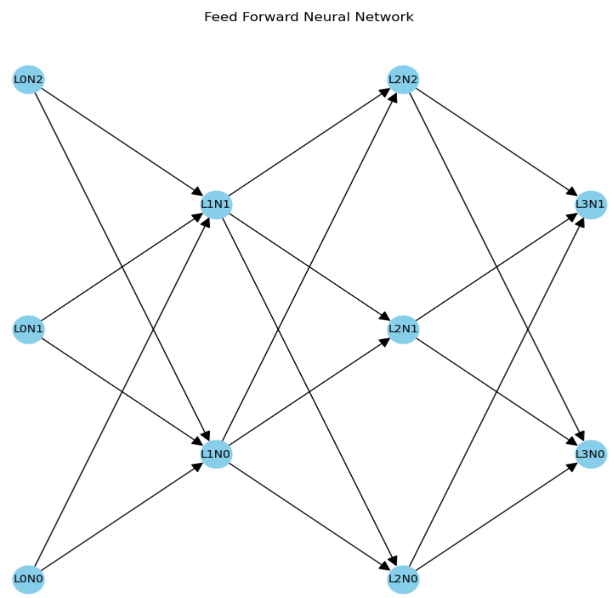
2.4.1. *Feed Forward Networks*

Ini adalah subkelas jaringan *akrilik* di mana koneksi diperbolehkan dari *node* di lapisan i hanya ke *node* di lapisan i+1 seperti yang ditunjukkan pada Gambar.2.2. Jaringan-jaringan ini digambarkan secara ringkas dengan urutan angka yang menunjukkan jumlah *node* di setiap lapisan.

Misalnya saja jaringan yang ditunjukkan pada Gambar 2.2 adalah *feed-forward networks* 3-2-3-2; berisi tiga *node* pada lapisan *input* (*layer* nol), dua *node* pada lapisan tersembunyi pertama (*layer* satu), tiga *node* pada lapisan tersembunyi kedua (*layer* dua), dan dua *node* pada lapisan *output* (*layer* tiga).

Jaringan-jaringan ini, umumnya tidak lebih dari empat lapisan, merupakan salah satu jaringan saraf yang paling umum digunakan, sedemikian rupa sehingga beberapa pengguna mengidentifikasi frasa "*neural network*" sebagai jaringan *feed-forward* saja. Secara konseptual, *node* di lapisan yang lebih tinggi secara berturut-turut mengabstraksi fitur tingkat yang lebih tinggi dari lapisan sebelumnya.

Dalam literatur tentang jaringan saraf, istilah "*feed-forward*" kadang-kadang digunakan untuk merujuk pada jaringan berlapis atau *akrilik* (Dongare A.D., *et al*. 2012).



Gambar 2. 2. *Feed feed-forward networks*

2.4.2. *Back Propagation Network*

Algoritma *back propagation* digunakan dalam ANN *feed-forward* berlapis. Ini berarti bahwa *neuron* buatan disusun berlapis-lapis, dan mengirimkan sinyalnya "*feed-forward*", dan kemudian kesalahan disebarkan ke belakang. Jaringan menerima *input* oleh *neuron* pada lapisan *input*, dan *output* jaringan diberikan oleh *neuron* pada lapisan *output*. Mungkin ada satu atau lebih lapisan tersembunyi perantara.

Algoritma *back propagation* menggunakan pembelajaran terawasi, artinya kita memberikan contoh *input* dan *output* yang ingin dihitung oleh jaringan kepada algoritma, lalu kesalahan (perbedaan antara hasil aktual dan yang diharapkan) dihitung.

Ide dari algoritma *back propagation* adalah untuk mengurangi kesalahan ini, hingga ANN mempelajari data pelatihan. Pelatihan dimulai dengan bobot acak, dan tujuannya adalah untuk menyesuaikannya sehingga kesalahannya minimal.

Jaringan *back propagation* menjadi penting karena kekurangan jaringan lain yang tersedia. Jaringan merupakan jaringan *multi* lapisan (*multi layer perception*) yang memuat paling sedikit satu *hidden layer* selain lapisan *input* dan *output*. Jumlah *hidden layer* & jumlah *neuron* di setiap *hidden layer* harus ditetapkan berdasarkan aplikasi, kompleksitas masalah, dan jumlah *input* dan *output*. Penggunaan fungsi transfer *log-sigmoid* non-linier memungkinkan jaringan untuk mensimulasikan non-linier dalam sistem praktis. Karena banyaknya keuntungan ini, jaringan *back propagation* dipilih untuk algoritma pekerjaan ini.

Implementasi model *back propagation* terdiri dari dua tahap. Fase pertama disebut pelatihan, sedangkan fase kedua disebut pengujian.

Pelatihan dalam *back propagation* didasarkan pada aturan gradien yang layak yang cenderung menyesuaikan bobot dan mengurangi kesalahan sistem dalam jaringan. *Input layer* memiliki jumlah *neuron* yang sama dengan *input*. Demikian pula, *neuron output layer* sama jumlahnya dengan jumlah *output*. Jumlah *neuron hidden layer* ditentukan dengan metode coba-coba menggunakan data eksperimen (Dongare A.D., *et al*. 2012).

2.4.3. *Multi Layer Perceptron*

Multi Layer Perceptron merupakan salah satu varian dari *artificial neural network*. Arsitektur MLP dapat terdiri dari satu atau lebih *hidden layer* (lapisan tersembunyi). Proses pelatihan (*training*) pada MLP terdiri dari dua bagian utama: yaitu perhitungan maju (*feed-forward*) dan perhitungan mundur (*backward*). Perhitungan maju digunakan untuk menghitung *output* dari masing-masing *hidden layer* berdasarkan nilai *input*, nilai bobot saat ini, dan berdasarkan fungsi aktivasi yang digunakan. Sedangkan perhitungan mundur digunakan untuk memperbarui nilai bobot sesuai dengan nilai *error* yang telah ditentukan. Proses pelatihan akan berhenti saat nilai MSE (*Mean Square Error*) sudah dapat diterima (Naf'an, M. Z., & Arifin, J. 2017).

2.4.4. Fungsi Aktivasi

Dalam *neural network*, setiap *node* pada *hidden layer* dan *output node* menggunakan suatu fungsi linear atau nonlinier yang fungsinya untuk menentukan nilai dari *output node* tersebut. Fungsi tersebut dikenal dengan fungsi aktivasi (Goodfellow I., Bengio Y., & Courville A. 2016).

Fungsi aktivasi dalam jaringan saraf tiruan memperkenalkan non-linearitas, memungkinkan jaringan untuk memodelkan dan belajar dari pola-pola kompleks dalam data. Ini juga membantu mengendalikan *output* jaringan dalam rentang tertentu, yang sangat penting untuk tugas-tugas seperti klasifikasi. Berikut adalah beberapa fungsi aktivasi yang umum digunakan dalam *neural network*,

1. Sigmoid

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \tag{2.11}$$

2. Tanh (Hyperbolic Tangent)

$$\tanh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \tag{2.12}$$

3. ReLU (Rectified Linear Unit)

$$ReLu(x) = \max(0, x) \tag{2.13}$$

4. Leaky ReLU

$$Leaky\ ReLU(x) = \begin{cases} x & jika\ x > 0 \\ \alpha x & jika\ x \leq 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

   dengan α adalah nilai kecil seperti 0.001.

5. Softmax

$$Softmax(x_i) = \frac{e^{x_i}}{\sum_{j=1}^{N} e^{x_j}} \tag{2.15}$$

2.5. *Mean Squared Error*

Mean squared error (MSE) adalah metrik evaluasi yang umum digunakan dalam statistik dan *machine learning* untuk mengukur seberapa akurat sebuah model regresi dalam memprediksi nilai numerik. MSE menghitung selisih antara nilai prediksi model dan nilai analitik dari data, kemudian mengkuadratkan selisih tersebut agar tidak ada selisih yang bernilai negatif.

Kemudian, selisih kuadrat dijumlahkan dan diambil rata-rata dari semua sampel data.

Secara matematis, MSE dapat dihitung dengan menggunakan persamaan berikut:

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(y_n - \hat{y}_n)^2 \qquad (2.16)$$

di mana N adalah jumlah sampel data, y_n adalah nilai sebenarnya dari data ke-n, dan $\hat{y}_n$ adalah nilai prediksi dari model untuk data ke-n (Liu, B. *et al*. 2021).

2.6. *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs)

Physics informed neural networks (PINNs) adalah kelas model pembelajaran mesin di mana PDP yang mengatur dipenuhi melalui MSE . Kemampuan optimasi dan prediksi jaringan saraf yang efisien dieksploitasi dalam pendekatan PINN. Dalam PINN, jaringan saraf dilatih untuk memprediksi solusi pada titik mana pun di seluruh domain *spasial-temporal*. Perhatikan bentuk umum persamaan diferensial parsial m^{th} orde (PDP) :

$$u_t = F\left(u(x,t), u_x^{(1)}(x,t), u_x^{(2)}(x,t), \dots, u_x^{(m)}(x,t)\right), x \in \Omega \subset \mathbb{R}, t \in (0,T] \qquad (2.17)$$

Di mana, Ω adalah himpunan terbuka ℝ. F adalah fungsi non linier solusi dari $u(x,t)$ dan turunan *spasial* $\left(u_x^{(1)}(x,t), u_x^{(2)}(x,t), \dots, u_x^{(m)}(x,t)\right)$ di mana x dan t masing masing adalah koordinat ruang dan waktu. Kondisi batas dan awal yang sesuai adalah

$$u(x,0) = \phi(x),\ x \in \Omega \qquad (2.18)$$

$$u(-x,t) = u(x,t),\ (x,t) \in T \times (0,T] \qquad (2.19)$$

$$u_x^{(1)}(-x,t) = u_x^{(1)}(x,t),\ (x,t) \in T \times (0,T] \tag{2.20}$$

Di mana, T adalah batas dari Ω. PD, kondisi awal dan batas (ditunjukan pada (2.12-2.13) membentuk masalah syarat awal dan batas yang dipertimbangkan. Kondisi batas diambil secara periodik dan kondisi awal merupakan fungsi real.

PINNs memperkirakan peta antar titik dalam domain *spatio-temporal* dengan solusi PDP. Parameter *neural network* diinisialisasi secara acak dan diperbarui secara berulang dengan meminimalkan MSE yang menerapkan PDP. MSE PINNs terdiri dari tiga komponen kesalahan, untuk prediksi *neural network* seperti pada kondisi awal, kondisi batas, dan PDP. Misalkan $\hat{u}(x,t)$ adalah *output neural network*. Tiga komponen MSE PINNs diberikan di bawah ini:

- MSE pada kondisi awal

$$\mathrm{MSE}_I = \frac{1}{N_i}\sum_{k=1}^{N_i}\left(\hat{u}\left(x_k^i,0\right) - u_k^i\right)^2, \qquad x_k^i \in \Omega \tag{2.21}$$

  di mana $\hat{u}(x_k^i, 0)$ adalah keluaran jaringan saraf dan u_k^i adalah kondisi awal yang diberikan pada $(x_k^i, 0)$. Di sini, *superskrip*, $(\bullet)^i$ berarti kondisi awal.

- MSE pada kondisi batas

$$\mathrm{MSE}_B = \frac{1}{N_b}\sum_{k=1}^{N_b}\sum_{d=1}^{n_d}\left(\hat{u}^{(d-1)}\left(x_k^b,t_k^b\right) - \hat{u}^{(d-1)}\left(-x_k^b,t_k^b\right)\right)^2,$$
$$\left(x_k^b,t_k^b\right) \in T \times (0,T] \tag{2.22}$$

  di mana n_d adalah turunan tertinggi yang periodisitasnya diterapkan pada batasnya, T. Di sini, *superskrip* $(\bullet)^b$ berarti kondisi batas.

- MSE akibat sisa persamaan diferensial parsial

$$R \coloneqq \hat{u}_t - F\left(\hat{u}, \hat{u}_x^{(1)}, \hat{u}_x^{(2)}, \dots, \hat{u}_x^{(m)}\right)$$

$$\text{MSE}_R = \frac{1}{N_r}\sum_{k=1}^{N_r}\left(R(x_k^r, t_k^r)\right)^2,\ (x_k^r, t_k^r) \in \Omega \times (0, \text{T}] \qquad (2.23)$$

Superskrip, $(\bullet)^r$ adalah singkatan dari sisa PDP. x_k^i dan $\left(x_k^b, t_k^b\right)$, mewakili himpunan titik di mana kesalahan awal dan batas dihitung. Kesalahan sisa/kolokasi dihitung pada titik kolokasi (x_k^r, t_k^r). Titik-titik pada domain dan batas ini diperoleh dengan menggunakan pendekatan latin *hypercube* sampling. Oleh karena itu, MSE total *neural network* diberikan dengan menambahkan semua MSE yang disebutkan di atas.

$$\text{MSE} = \text{MSE}_I + \text{MSE}_B + \text{MSE}_R \qquad (2.24)$$

Setelah PINNs dilatih, keakuratan solusi yang diprediksi dihitung sehubungan dengan solusi yang benar/tepat pada titik yang tidak diketahui (disebut titik pengujian). Solusi yang sangat akurat dari masalah nilai batas awal diperoleh dengan algoritma numerik berbasis polinomial *chebyshev* dan dianggap sebagai solusi numerik. Kesalahan total relatif (ε_{total}) dari prediksi PINNs pada seluruh domain diperoleh dengan menormalkan kesalahan terhadap solusi sebenarnya sebagai

$$\varepsilon_{total} = \frac{\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(\hat{u}(x_k, t_k) - u(x_k, t_k))^2\right]^{1/2}}{\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(u(x_k, t_k))^2\right]^{1/2}} \qquad (2.25)$$

Kesalahan relatif (ε) prediksi PINNs pada setiap titik diperoleh dengan menormalkan kesalahan absolut terhadap solusi analitiknya sebagai

$$\varepsilon(x_k, t_k) = \frac{|\hat{u}(x_k, t_k) - u(x_k, t_k)|}{[\sum_{k=1}^{N}(u(x_k, t_k))^2]^{1/2}} \qquad (2.26)$$

Di mana $u(x_k, t_k)$ adalah solusi sebenarnya dan $\hat{u}(x_k, t_k)$ adalah prediksi jaringan saraf untuk himpunan N titik pengujian $\{(x_k, t_k)\}_{k=1}^{N}, (x_k, t_k) \in \Omega \times (0, T]$ Untuk semua perbandingan antara solusi yang benar dan solusi yang diprediksi, kesalahan total relatif 'ε_{total}' dan kesalahan relatif 'ε' digunakan (Mattey, R., & Ghosh, S. 2021).

2.6.1 Model Waktu PINNs

Dalam PINNs terdapat dua kelas masalah utama (Raissi, M., *et al* 2021): solusi berbasis data dan penemuan berbasis data dari persamaan diferensial parsial. Bergantung pada sifat dan pengaturan data yang tersedia, Raissi et al merancang dua jenis algoritma yang berbeda, yaitu model waktu kontinu dan model waktu diskrit.

1. Waktu Kontinu

   Pada model waktu kontinu membentuk keluarga baru dari aproksimator fungsi *spasial-temporal* yang efisien terhadap data. Karakteristik pendekatan waktu kontinu menganggap waktu (t) sebagai variabel kontinu, yang merupakan bagian dari domain *input neural network*. Persamaan diferensial parsial (PDP) yang digunakan untuk mendeskripsikan fenomena fisik diperlakukan dalam ruang-waktu kontinu. Derivatif terhadap waktu $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ dihitung menggunakan teknik diferensiasi otomatis langsung pada jaringan.

   Model menerima *input* berupa pasangan (x, t), di mana x adalah posisi spasial dan t adalah *temporal*. PDP yang memodelkan sistem fisik dievaluasi pada *output* jaringan. Misalnya, persamaan panas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u = 0$$

   di mana turunan waktu $\frac{\partial u}{\partial t}$ dan turunan *spasial* Δu dihitung secara otomatis oleh jaringan.

Keuntungan waktu kontinu tidak memerlukan diskritisasi waktu, cocok untuk masalah di mana solusi kontinu atau halus diinginkan, dan fleksibilitas lebih tinggi untuk berbagai domain waktu.

2. Waktu Diskrit

   Pada model waktu diskrit memungkinkan penggunaan skema penjejakan waktu *Runge–Kutta* implisit yang sangat akurat dengan jumlah tahap yang tidak terbatas.

   Karakteristik pendekatan waktu diskrit memandang waktu dalam langkah-langkah diskrit $(t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots)$, pendekatan ini menggunakan teknik semidiskritisasi, di mana waktu diperlakukan sebagai diskrit tetapi variabel *spasial* tetap kontinu, turunan waktu $\frac{\partial u}{\partial t}$ diaproksimasi menggunakan skema numerik seperti metode beda hingga.

   Diskritisasi waktu pada rentang waktu $([0, T])$ dibagi menjadi beberapa langkah diskrit $t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots$, dan untuk diskritisasi PDP kontinu diubah menjadi bentuk diskrit untuk waktu, tetapi tetap kontinu dalam ruang. Contohnya:

$$\frac{u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)}{\Delta t} - \alpha \Delta u = 0$$

   di mana Δt adalah langkah waktu diskrit.

   Kelebihan dari model waktu diskrit lebih cocok untuk masalah dengan perubahan waktu yang diskrit atau kasus dengan langkah waktu eksplisit dan mengurangi kompleksitas turunan terhadap waktu dalam jaringan.

III. METODE PENELITIAN

3.1. Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam Universitas Lampung dan waktu penelitian dilakukan pada semester genap tahun akademik 2024/2025

3.2. Metodologi Penelitian

Physics informed neural networks (PINNs) adalah kelas model pembelajaran mesin di mana PDP yang mengatur dipenuhi melalui MSE *neural network*. Kemampuan optimasi dan prediksi *neural network* yang efisien dieksploitasi dalam pendekatan PINNs. Dalam PINNs, jaringan saraf dilatih untuk memprediksi solusi pada titik mana pun di seluruh domain *spasial-temporal* (Mattey, R., & Ghosh, S. 2021). Berikut langkah langkah dalam penelitian ini:

1. Menentukan persamaan gelombang dua dimensi yang akan digunakan.
   Persamaan gelombang secara umum:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{3.1}$$

   dengan kondisi awal :

$$u(x, y, 0) = f(x, y) \tag{3.2}$$

dengan kecepatan awal :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = g(x, y) \tag{3.3}$$

untuk syarat batas pada penelitian ini digunakan syarat batas Dirichlet yang homogen:

$$u(x_{min}, y, t) = u(x_{max}, y, t) = 0 \tag{3.4}$$

$$u(x, y_{min}, t) = u(x, y_{max}, t) = 0 \tag{3.5}$$

2. Diskritisasi *spasial* dan *temporal*.

   Untuk mendefinisikan *grid* diskrit bagi sebuah domain, kita perlu menentukan langkah diskrit untuk dimensi *spasial* dan *temporal*.

   1. Diskritisasi *spasial*

      Dalam dimensi spasial, domain dibatasi oleh interval $x \in [x_{min}, x_{max}]$dan $y \in [y_{min}, y_{max}]$. Untuk mendiskritisasi interval ini, kita membaginya menjadi Nx dan Ny titik diskrit, masing-masing untuk x dan y. Jika kita misalkan $i = 0,1, \dots, Nx$ dan $j = 0,1, \dots, Ny$, maka langkah diskrit *spasial* Δx dan Δy dapat dihitung sebagai:

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{Nx} \tag{3.6}$$

      Dan

$$\Delta y = \frac{y_{max} - y_{min}}{Ny} \tag{3.6}$$

      Dengan langkah diskrit ini, titik-titik *grid spasial* x_i dan y_j didefinisikan sebagai:

$$x_i = -1 + i\Delta x \text{ dengan } i = 0,1,2, \dots, Nx \tag{3.8}$$

      Dan

$$y_j = -1 + j\Delta y \text{ dengan } j = 0,1,2, \dots, Ny \qquad (3.9)$$

2. Diskritisasi *temporal*

   Di dimensi *temporal*, domain dibatasi oleh interval $t \in [t_{min}, t_{max}]$. Interval ini dibagi menjadi Nt titik diskrit. Jika kita misalkan $k = 0,1, \dots, Nt$, maka langkah diskrit *temporal* Δt adalah:

$$\Delta t = \frac{t_{max} - t_{min}}{Nt} \qquad (3.10)$$

   Selanjutnya, *grid* waktu t_k didefinisikan sebagai:

$$t_k = -1 + k\Delta t \text{ dengan } k = 0,1,2, \dots, Ny \qquad (3.9)$$

3. Membuat struktur *physics-informed neural networks* yang sesuai.

   Untuk membuat struktur *physics-informed neural networks* pertama, pilih model struktur jaringan yang diinginkan. Kedua, pilih model *physics-informd neural networks* dan lapisan-lapisan *input, hidden,* dan *output* serta jumlah *neuron* setiap lapisan.

4. Memformulasikan MSE.

   Formulasikan MSE yang menggabungkan *error* dari PDP, kondisi awal, dan kondisi batas.

   - Persmaan gelombang dua dimensi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

   - Kondisi awal :

$$u(x, y, 0) = f(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = g(x, y)$$

   - Syarat batas :

$$u(x_{min}, y, t) = u(x_{max}, y, t) = 0$$
$$u(x, y_{min}, t) = u(x, y_{max}, t) = 0$$

Formulasikan MSE:

- MSE dari PDP:

$$MSE_R = \frac{1}{N_r}\sum_{k=1}^{N_r}\left(\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial t^2}(x_k^r, y_k^r, t_k^r) - c^2\left(\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2}(x_k^r, y_k^r, t_k^r) + \frac{\partial^2\hat{u}}{\partial y^2}(x_k^r, y_k^r, t_k^r)\right)\right)^2 \tag{3.12}$$

- MSE dari kondisi awal:

$$MSE_I = \frac{1}{N_i}\sum_{k=1}^{N_i}\left(\left(\hat{u}\left(x_k^i, y_k^i, 0\right) - \sin(\pi x_k)\sin(\pi y_k)\right)^2 + \left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}\left(x_k^i, y_k^i, 0\right)\right)^2\right) \tag{3.13}$$

- MSE dari kondisi batas:

$$MSE_B = \frac{1}{N_b}\sum_{k=1}^{N_b}\left(\hat{u}\left(x_k^b, y_k^b, t_k^b\right)\right)^2 + \left(\hat{u}\left(x_k^b, y_k^b, t_k^b\right)\right)^2 + \left(\hat{u}\left(x_k^b, y_k^b, t_k^b\right)\right)^2 + \left(\hat{u}\left(x_k^b, y_k^b, t_k^b\right)\right)^2 \tag{3.14}$$

Gabungkan semua MSE menjadi MSE total:

$$MSE = MSE_R + MSE_I + MSE_B \tag{3.15}$$

5. Pelatihan *physics-informed neural networks*.

Pilih optimasi seperti Adam, L-BFGS, Evolusioner, dll. Serta gunakan *software* yang ada untuk menjalankan progam dan pilih fungsi aktivasi.

6. Evaluasi dan validasikan.

   Setelah pelatihan, evaluasi performa model dengan membandingkan hasil prediksi dengan solusi analitik atau solusi numerik dari metode konvensional.

7. Analisis.

   Analisis kecepatan konvergensi, akurasi solusi, dan kestabilan metode.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis, model *physics-informed neural networks* pada waktu diskrit pada persamaan diferensial gelombang dua dimensi dapat mendekati nilai solusi. Ditunjukan dengan gambar 4.4.(Plot perbandingan solusi PINNs dengan solusi analitik) yang memiliki bentuk yang sama, yang berarti metode dapat mendekati solusi persamaan gelombang dua dimensi untuk $x, y \in [-1,1]$ dan $t[0,1]$, serta syarat awal berupa $u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ dan $\partial u/\partial t\,(x, y, 0) = 0$, dengan syarat batas berupa batas Dirichlet homogen.

Model dengan 4 *hidden layer* 100 *neuron* yang di optimasi oleh optimasi Adam terdiri dari 70000 *epoch* berhasil dengan waktu sekitar 6 jam, yang menghasilkan MSE yang ditunjukan pada gambar 4.4, dengan warna yang mana semakin cerah nilai MSE akan semakin besar, yaitu sampai dengan 0.002 dan paling kecil sampai mendekati 0. Maka metode *physic-informed neural networks* dapat mendekati solusi dengan akurat di sepanjang interval titik-titik x, y dengan waktu $t = 0.1$ serta $c = 1$.

Kemudian untuk kasus titik tunggal yang direpresentasikan tabel 4.1. dan gambar grafik 4.5 serta tabel 4.2 dan gambar grafik 4.5 menunjukan MSE sama dengan 0. Hasil tersebut menunjukan keakuratan metode PINNs untuk kasus titik tunggal baik untuk $t = 0.1$ ataupun $t = 0.5$.

Dan penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam penerapan PINNs pada simulasi fisika dua dimensi dan membuka peluang untuk perluasan pada kasus nonlinier atau domain kompleks.

5.2. Saran

Berdasarkan analisis hasil, penulis memberikan saran untuk peneltian selanjutnya dapat menambah jumlah *hidden layer* dan jumlah *neuron* setiap *hiden layer*-nya, juga menambahkan *epoch* yang lebih tinggi, dan dapat menggunakan optimasi L-BFGS untuk *fine tuning* agar MSE *error*-nya semakin kecil, namun diperlukan RAM, CPU, dan GPU yang cukup agar proses berjalannya algoritma lebih stabil dan meminimalkan waktu yang diperlukan algoritma ketika dijalankan. Serta penulis memberikan saran untuk menggunakan persamaan diferensial parsial lainnya, baik yang homogen maupun non-homogen, dengan dimensi yang lebih tinggi dan menggunakan model waktu lainnya yaitu waktu kontinu.

DAFTAR PUSTAKA

Bachrun, R. S., Khaeruddin, K., & Mahie, A. G. (2015). Solusi Numerik Persamaan Gelombang Dua Dimensi Menggunakan Metode *Alternating Direction Implicit*. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, 11(2), 105-114.

Dongare A.D., Kharde R.R., A. Kachare D. 2012. *Introduction to Artificial Neural network*. *International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT) Volume* 2, Issue 1. Page no : 190-192.

Evans, Lawrence C., 1993. *Partial differential equations*. *American Mathematical Society*.

Goodfellow I., Bengio Y., & Courville A. 2016. *Deep Learning* (*Adaptive* Computation and *Machine learning* series). *Massachusetts London: MIT press.*

Liu, B., Mohandes, M., Nuha, H., Deriche, M., Fekri, F., & McClellan, J. H. (2021). *A multitone modelbased seismic data compression*. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 52(2), 1030-1040.

Darmawijoyo. (2019). Persamaan Diferensial Biasa: Suatu Pengantar (Edisi Kedua). Penerbit Erlangga.

Mattey, R., & Ghosh, S. 2021. *A physics informed neural network for time-dependent nonlinear and higher order partial differential equations*. *arXiv preprint arXiv:2106.07606*.

Naf'an, M. Z., & Arifin, J. (2017). Identifikasi Tanda Tangan Berdasarkan *Grid Entropy* Menggunakan *Multi Layer Perceptron*. *Jurnal Infotel*, *9*(2), 172-176.

Raissi, M., Perdikaris, P., Karniadakis, G.E. 2019. *Physics-informed neural Networks: A deep learning framework for solving feed-forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations*. *Journal of Computational Physics* (378) 686–707.

Triatmodjo, B. 2010. Buku “METODE NUMERIK”. Cetakan ke-8. Halaman 1-239.

Boyce, W. E., DiPrima, R. C., & Meade, D. B. (2017). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (11th ed.). John Wiley & Sons.

Finley, J. D. (2024). *Differential Equations For Dummies. For Dummies.*

Zill, D. G., & Cullen, M. R. (2017). *Differential Equations with Boundary-Value Problems* (9th ed.). *Cengage Learning*.