ANALISIS HOMODERIVASI PADA RING

Skripsi

Oleh

DESI WIDIARTI
NPM. 2217031035

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

ABSTRACT

ANALYSIS HOMODERIVATION ON RING

By

Desi Widiarti

Homoderivations on rings constitute a concept that combines the Leibniz rule with the multiplicative property of ring homomorphisms. This study aims to investigate the properties of homoderivations on rings, accompanied by rigorous proofs and supporting examples. The results show that the sum of two homoderivations on a ring is again a homoderivation, provided that the two homoderivations are orthogonal to each other. Moreover, the direct sum of homoderivations on corresponding rings also yields a homoderivation. Furthermore, it is shown that the product of a homoderivation with a constant k in a general ring does not necessarily preserve the homoderivation property. In addition, Inner homoderivations are valid when λ is a central element of the ring R. This study reveals algebraic structures formed by the set of homoderivations, that is semigroup and a $\mathbb{Z}$-module. Finally, it is shown that every homoderivation is a derivation, but the converse does not hold, and this relationship is established when one of three specific conditions is satisfied.

Keywords: group, ring,homomorfism, derivation, homoderivation.

ABSTRAK

ANALISIS HOMODERIVASI PADA RING

Oleh

Desi Widiarti

Homoderivasi pada ring merupakan konsep yang menggabungkan aturan Leibniz dengan sifat perkalian pada homomorfisma ring. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji sifat-sifat homoderivasi pada ring yang disertai dengan pembuktian dan contoh-contoh pendukung. Hasil penelitian menunjukkan bahwa penjumlahan dua pemetaan homoderivasi pada suatu ring tetap merupakan homoderivasi, dengan syarat kedua homoderivasi tersebut saling ortogonal. Selain itu, penjumlahan langsung (*direct sum*) dari pemetaan-pemetaan homoderivasi pada ring-ring yang bersesuaian juga menghasilkan suatu homoderivasi. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa hasil kali suatu konstanta k dengan pemetaan homoderivasi pada ring umum belum tentu mempertahankan sifat homoderivasi. Selain itu, homoderivasi *inner* terbukti berlaku ketika λ merupakan elemen *center* dari ring R. Penelitian ini mengungkap struktur aljabar yang terbentuk oleh himpunan homoderivasi, yaitu semigrup dan $\mathbb{Z}$-modul. Terakhir, ditunjukkan bahwa setiap homoderivasi merupakan derivasi, tetapi tidak berlaku sebaliknya, dan hubungan tersebut tercapai apabila salah satu dari tiga kondisi tertentu terpenuhi. **Kata-kata kunci:** grup, ring, homomorfisma,

derivasi, homoderivasi.

ANALISIS HOMODERIVASI PADA RING

DESI WIDIARTI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

Judul Skripsi	:	**ANALISIS HOMODERIVASI PADA RING**
Nama Mahasiswa	:	Desi Widiarti
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031035**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**
NIP 198406272006042001	NIP 198002062003121003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr.Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	:	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.** ....
Sekretaris	:	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.** ....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **22 Januari 2026**

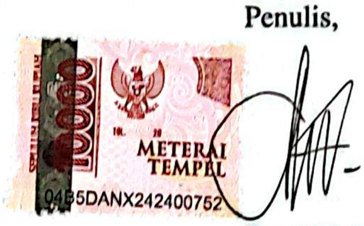
PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Desi Widiarti**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031035**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Analisis Homoderivasi pada Ring**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 22 Januari 2026
Penulis,



Desi Widiarti
NPM. 2217031035

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Desi Widiarti yang lahir di Desa Sidoasih Kabupaten Lampung Selatan pada tanggal 17 Desember 2003. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara.

Penulis memulai pendidikan formal di TK Pembina pada tahun 2009 dan menyelesaikannya pada tahun 2010. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di SD Negeri Sidoasih pada tahun 2010 sampai dengan 2016. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 3 Ketapang pada tahun 2016 sampai dengan tahun 2019, dan menyelesaikan pendidikan di SMA Negeri 1 Kalianda pada tahun 2022.

Pada tahun 2022, penulis diterima di program studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN). Selama masa studi, penulis fokus pada pengembangan akademik.

Pada akhir tahun 2024, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Perencanaan Pembangunan Daerah (BAPPEDA) Kabupaten Lampung Selatan selama 40 hari sampai dengan akhir Januari 2025. Selain itu, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 30 hari di Kelurahan Pesawahan, Kecamatan Teluk Betung Selatan, Kota Bandar Lampung, dari Juli 2025 sampai dengan Agustus 2025.

Penulis berharap hasil dari penelitian ini dapat memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya di bidang Struktur Aljabar.

KATA INSPIRASI

”*Sesungguhnya Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya.*”
(Q.S. Al-Baqarah:286)

“Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan.”
(Q.S. Al-Insyirah: 6)

“Kesabaran dan ketekunan membawa pada keberhasilan.”
(Anonim)

”*You never know until you try*.”

PERSEMBAHAN

Alhadulillahirobbil"alamin
Dengan mengucapkan puji dan syukur atas kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala karena limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya.
Tak lupa shalawat beserta salam selalu tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu Alaihi Wasallam.
Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Bapak dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Analisis Homoderivasi pada Ring" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sepanjang proses penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing 2 yang telah memberikan arahan, dukungan, serta doa sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan saran, kritik, serta evaluasi yang membangun sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Akademik dan Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh guru TK, SD, SMP, dan SMA yang telah mengajarkan dan memberikan ilmu hingga penulis bisa menduduki bangku perkuliahan.

7. Bapak, Ibu, Kakak dan Adik yang selalu memberikan dukungan dan doa sehingga penulis dapat segera menyelesaikan skripsi ini.
8. Teman-teman terdekat sejak tahun pertama kuliah, yang telah menemani dan memberi dukungan selama perkuliahan sampai pada pembuatan skripsi ini selesai.
9. Teman-teman sepembimbingan yang sudah membersamai saya dalam setiap bimbingan dan saling membantu ketika dalam kesulitan.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 22 Januari 2026

Desi Widiarti

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Konsep dasar kalkulus yang melandasi ide tentang konsep derivasi pertama kali diperkenalkan pada abad ke-17 oleh Newton melalui gagasan fluks dan oleh Gottfried Wilhelm Leibniz melalui pendekatan diferensial. Pada abad ke-19, tokoh-tokoh seperti Reimann dan Karl Weierstrass memberikan kontribusi penting dalam pengembangan teori fungsi kompleks, termasuk memperluas pemahaman mengenai konsep derivasi. Memasuki abad ke-20, konsep derivasi mengalami perluasan lebih lanjut melalui aljabar abstrak, khususnya diterapkan pada struktur aljabar seperti ring oleh Jacobson. Ring sendiri merupakan himpunan yang dilengkap dengan dua operasi, yaitu operasi penjumlahan dan operasi perkalian. Felzenszwalb dan Lanski (1983) menyatakan bahwa d adalah derivasi dari ring R jika bersifat aditif dan memenuhi aturan Leibniz. Salah satu yang membahas pemetaan aditif pada ring dengan elemen identitas, yang memperluas pemahaman tentang struktur dan sifat dasar ring tersebut adalah Dhara dan Sharma (2009).

Beberapa peneliti yang telah mengkaji konsep derivasi antara lain, Chung dan Kobayashi (1985) membahas sifat-sifat khusus dari derivasi nil dan bagaimana pengaruhnya terhadap struktur ideal dalam ring prima, Ernanto (2018) menelaah sifat-sifat ring faktor yang disertai dengan derivasi, sehingga dapat memberikan pemahaman baru mengenai keterkaitan antara struktur ring dan operasi derivasi yang bekerja di dalamnya. Ali dkk. (2024) memberikan tinjauan komprehensif mengenai berbagai jenis derivasi dalam ring yang menjadi dasar penting untuk memahami perkembangan teori aljabar modern, Ashraf dkk. (2006) mengeksplorasi derivasi pada ring dan aplikasinya, Faisol and Fitriani (2025) mengkaji struktur derivasi dan pemetaan linear pada deret pangkat miring serta sifat-sifat aljabar yang menyertainya, Waluyo dkk. (2025) mempelajari konsep (σ, τ)-derivasi pada ring grup dan hubungannya dengan karakteristik struktur ring tersebut, Ber dkk. (2020)

membahas sifat-sifat dan karakterisasi derivasi pada algebra Murray–von Neumann yang memberikan kontribusi penting dalam analisis fungsional, Chung (1985) meneliti derivasi nil pada ring yang memberikan pemahaman lebih lanjut mengenai struktur internal dan sifat-sifat aljabar dari ring tersebut, Al-Khalaf dkk. (2018) membahas mengenai derivasi pada ring prima, Thomas dkk. (2024) membahas sifat-sifat derivasi pada berbagai jenis ring, Huang dkk. (2023) membahas derivasi ring pada aljabar Murray–von Neumann yang memberikan kontribusi penting dalam pengembangan teori aljabar operator. Selain itu, Fitriani dkk. (2024) membahas mengenai konsep derivasi-f pada modul polinomial khususnya sifat-sifatnya serta kondisi keberadaannya dan memberikan beberapa hasil serta contoh terkait penerapannya dalam struktur aljabar, Fitriani dkk. (2025) juga membahas pemetaan yang saling komutatif dan *centralizing* pada modul termasuk karakteristiknya dan kondisi ketka pemetaan tersebut memenuhi sifat khusus.

Selanjutnya, berikut adalah peneliti-peneliti yang telah meneliti jenis derivasi pada suatu ring. Al-Khalaf dkk. (2018) mengamati tentang karakteristik ring asosiatif yang memiliki struktur Lie ring sederhana yang dibentuk oleh derivasi Lie dan Jordan, Mursyidah dkk. (2025) membahas sifat derivasi nil dan konsep δ-ideal pada ring polinomial beserta implikasi aljabarnya, Helmi dkk. (2013) meneliti ring polinomial diferensial yang merupakan generalisasi dari ring prima Asano sehingga memperluas pemahaman tentang struktur dan sifat ring tersebut, Sitompul dkk. (2025) membahas tentang konsep Derivasi Jordan pada ring polinomial $R[x]$ dengan mengkaji sifat-sifatnya dan memberikan contoh serta menunjukkan hasil terkait hubungan antara derivasu Jordan dengan struktur aljabar pada ring tersebut, Ansari dkk. (2024) membahas mengenai struktur dan sifat dari pemetaan derivasi-n yang dimodifikasi oleh dua automorfisma $(\sigma,\ \rho)$ dalam konteks ring asosiatif, Watase (2021) membahas derivasi pada ring komutatif serta merumuskan formula Leibniz untuk pangkat derivasi.

Salah satu jenis derivasi yang menggabungkan sifat derivasi dengan homomorfisma pada ring disebut homoderivasi. Pada pemetaan homoderivasi, aturan Leibniz dikombinasikan dengan sifat perkalian pada homomorfisma pada ring sehingga bentuknya menjadi $h(ab) = h(a)h(b) + h(a)b + ah(b)$. Beberapa peneliti yang menggunakan topik tersebut sebagai topik penelitiannya adalah sebagai berikut. Engin (2023)mengeksplorasi konsep homoerivasi pada ring prima sebagai perluasan dari teori derivasi yang telah ada, Belkadi dan Taoufiq (2024) mengkaji peran homoderivasi orde tinggi dalam menganalisis struktur internal ring semi-prima, Taoufiq dan Belkadi (2022) melakukan penelitian terhadap sifat-sifat homoderivasi nilpoten dalan ring semiprima, Alharfie dan Muthana (2018) mengkaji kondisi kekomutatifan pada ring prima yang dilengkapi homoderivasi, Turkmen (2024) membahas hubungan antara homoderivasi dan semi-derivasi dalam ring asosiatif, Melaibari dkk. (2016) membahas sifat-sifat homoderivasi dalam ring asosiatif, Hummdi dkk. (2024) mengamati kondisi-kondisi dimana homoderivasi pada ideal Lie bersifat komutatif, Alharfie dan Muthana (2019) meneliti hubungan antara homoderivasi dan sifat kekomititafan pada ring, El-Sayiad dan Almulhem (2025 membahas generalisasi homoderivasi bernama *centrally extended n-homoderivations*, Ali dkk. (2025) mengeksplorasi peran homoderivasi balikan dalam menganalisis struktur aljabar ring (semi)-prima.

Berdasarkan uraian tersebut, dapat disimpulkan bahwa derivasi dan homoderivasi memiliki peran yang sangat penting dalam mengungkap dan memahami struktur internal suatu ring, baik dari sisi teoretis maupun aplikatif. Homoderivasi sebagai perluasan konsep derivasi memberikan kerangka aljabar yang memungkinkan dilakukannya transformasi struktural tanpa menghilangkan sifat-sifat dasar aljabar yang dimiliki. Kebutuhan terhadap transformasi semacam ini semakin meningkat seiring dengan berkembangnya bidang kriptografi, *Artificial Intelligence* (AI), serta analisis data lanjutan. Oleh karena itu, kajian yang mendalam dan sistematis mengenai sifat-sifat struktural dan aljabar dari homoderivasi pada ring menjadi sangat diperlukan, guna memperkaya pengembangan teori aljabar murni sekaligus menyediakan landasan teoritis yang kuat bagi implementasi konsep-konsep tersebut dalam berbagai aplikasi ilmiah modern.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. menganalisis sifat-sifat homoderivasi pada ring R;
2. memberikan contoh ilustrasi dari sifat-sifat yang diperoleh;
3. menyelidiki hubungan antara homoderivasi dan derivasi pada ring R.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang ingin diperoleh dari penelitian ini yaitu:

1. memperdalam pemahaman tentang sifat-sifat homoderivasi pada ring;
2. mengetahui hubungan antara homoderivasi dan derivasi pada ring R;
3. memberikan kontribusi terhadap pengembangan teori homoderivasi dalam matematika, khususnya dalam bidang struktur aljbar.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini menyajikan kajian teori dan konsep-konsep dasar yang relevan sebagai landasan konseptual dalam penelitian ini. Uraian pada bab ini bertujuan untuk memperkuat pemahaman terhadap materi yang dibahas serta menjadi dasar dalam mengembangkan pembahasan dan analisis pada bab-bab selanjutnya.

2.1 Grup

Salah satu tahapan fundamental dalam mempelajari konsep-konsep yang lebih lanjut dalam teori aljabar adalah memahami struktur dasar dalam aljabar abstrak, yaitu grup. Pemahaman terhadap grup sangat penting karena struktur ini menjadi fondasi bagi kajian aljabar selanjutnya. Oleh karena itu, sebelum membahas definisi grup, terlebih dahulu akan diperkenalkan konsep operasi biner sebagai komponen utama dalam pembentukan struktur grup.

Definisi 2.1.1 Operasi biner $*$ pada himpunan H merupakan fungsi dari $H \times H$ ke H. Untuk setiap $(j, l) \in H \times H$, $*(j, l)$ di H dinotasikan dengan $j * l$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.2 Berikut diberikan contoh operasi biner dan bukan operasi biner.

i. Diberikan himpunan $3\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan. Untuk setiap $j, l \in 3\mathbb{Z}$ berlaku $j + l \in 3\mathbb{Z}$. Dengan demikian, penjumlahan merupakan operasi biner pada $3\mathbb{Z}$.

ii. Diberikan himpunan $\mathbb{N}$ dengan operasi pengurangan. Untuk $j, l \in \mathbb{N}$ dengan $j < l$, $j - l \notin \mathbb{N}$. Dengan demikian, pengurangan bukan merupakan operasi biner pada $\mathbb{N}$.

Berdasarkan pengertian operasi biner yang telah diuraikan sebelumnya, suatu struktur aljabar dapat dibentuk dari sebuah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Struktur aljabar tersebut dikenal sebagai grup.

Definisi 2.1.3 Suatu grup $\langle G, * \rangle$ terdiri dari himpunan G bersama operasi biner $*$ yang didefinisikan pada G dan memenuhi aksioma berikut:

1. operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $j, l, p \in G$ berlaku $(j * l) * p = j * (l * p)$;
2. terdapat elemen identitas $e \in G$ sehingga untuk setiap $j \in G$ berlaku $j * e = e * j = j$;
3. untuk setiap $j \in G$ terdapat elemen invers $j^{-1} \in G$ sehingga berlaku $j * j^{-1} = j^{-1} * j = e$.

(Fitriani dan Faisol, 2022).

Definisi 2.1.4 Grup G dikatakan grup Abel jika operasi biner $*$ bersifat komutatif, yaitu $j * l = l * j$, untuk setiap $j, l \in G$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.5 Diberikan himpunan $2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $2\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan merupakan grup.

i. Diberikan sebarang $j, l, p \in 2\mathbb{Z}$, dengan $j = 2r$, $l = 2s$, dan $p = 2t$, untuk suatu $r, s, t \in \mathbb{Z}$. Maka,

$$\begin{aligned}(j + l) + p &= (2r + 2s) + 2t \\ &= 2r + (2s + 2t) \\ &= j + (l + p).\end{aligned}$$

Jadi, operasi penjumlahan bersifat asosiatif.

ii. Diberikan sebarang $j \in 2\mathbb{Z}$ dengan $j = 2r$, untuk suatu $r \in \mathbb{Z}$. Terdapat $0 \in 2\mathbb{Z}$ sehingga

$$j + 0 = 0 + j = j.$$

Jadi, 0 merupakan elemen identitas terhadap operasi penjumlahan.

iii. Untuk setiap $j \in 2\mathbb{Z}$ dengan $j = 2r$, terdapat $-j = -2r \in 2\mathbb{Z}$ sehingga

$$j + (-j) = (-j) + j = 0.$$

Dari (i), (ii), dan (iii) diperoleh bahwa $\langle 2\mathbb{Z}, +\rangle$ merupakan grup Abel.

2.2 Ring

Untuk memahami struktur aljabar yang lebih lanjut, diperlukan pemahaman yang kuat terhadap konsep dasar ring. Oleh karena itu, pada bagian ini akan dijelaskan mengenai definisi formal ring beserta syarat-syarat atau aksioma yang harus dipenuhi agar suatu struktur dapat dikatakan sebagai ring.

Definisi 2.2.1 Diberikan himpunan tak kosong R dengan dua operasi yaitu $+$ (penjumlahan) dan $\cdot$ (perkalian). Struktur $\langle R,\ +,\ \cdot\rangle$ dinamakan ring, jika memenuhi aksioma:

1. $\langle R,\ +\rangle$ merupakan grup Abelian, yakni:
   i. operasi $+$ tertutup di R, yaitu untuk setiap $j, l \in R$ memenuhi $j + l \in R$;
   ii. operasi $+$ bersifat assosiatif di R, yaitu untuk setiap $j, l, p \in R$ memenuhi $(j + l) + p = j + (l + p)$;
   iii. terdapat elemen identitas e untuk setiap elemen di R, yakni $j + e = e + j = e$;
   iv. untuk setiap $j \in R$, terdapat $j^{-1} \in R$ sehingga, $j + j^{-1} = j^{-1} + j = e$,
2. $\langle R,\ \cdot\rangle$ merupakan semigrup, yakni:
   i. operasi $\cdot$ tertutup di R, yaitu untuk setiap $j, l \in R$ berlaku $j \cdot l \in R$;
   ii. operasi $\cdot$ bersifat assosiatif, yakni untuk setiap $j, l, p \in R$ berlaku
   $$(j \cdot l) \cdot p = j \cdot (l \cdot p),$$
3. sifat distribusi kiri dan distribusi kanan berlaku di R, yakni: untuk setiap $j, l, p \in R$, berlaku:
   i. $j \cdot (l + p) = (j \cdot l) + (j \cdot p)$;
   ii. $(j + l) \cdot p = (j \cdot p) + (l \cdot p)$.

(Rasiman dkk., 2018).

Contoh 2.2.2 Diberikan himpunan $\mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

(i) Akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup komutatif, sebagai berikut:

   i. untuk setiap $j, l \in \mathbb{Z}$, berlaku $j + l \in \mathbb{Z}$;
   ii. untuk setiap $j, l, p \in \mathbb{Z}$, berlaku $j + (l + p) = (j + l) + p$;
   iii. terdapat elemen identitas $0 \in \mathbb{Z}$, sehingga untuk setiap $j \in \mathbb{Z}$ berlaku $j + 0 = 0 + j = j$;
   iv. untuk setiap $j \in \mathbb{Z}$, terdapat inversnya yaitu $-j$, sehingga $j + (-j) = 0$;
   v. untuk setiap $j, l \in \mathbb{Z}$, berlaku $j + l = l + j$.

(ii) Operasi perkalian bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $j, l, p \in \mathbb{Z}$ berlaku $(j \cdot l) \cdot p = j \cdot (l \cdot p)$.

(iii) Sifat distribusi kiri dan distribusi kanan berlaku di $\mathbb{Z}$, yaitu:

   i. untuk setiap $j, l, p \in \mathbb{Z}$, berlaku $j \cdot (l + p) = j \cdot l + j \cdot p$;
   ii. untuk setiap $j, l, p \in \mathbb{Z}$, berlaku $(j + l) \cdot p = j \cdot p + l \cdot p$.

Dengan demikian, $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

Definisi 2.2.3 Diberikan suatu ring $\langle R, +, \cdot \rangle$. Jika R komutatif terhadap perkalian, yaitu untuk setiap $j, l \in R$ berlaku $jl = lj$, maka ring R disebut ring komutatif (Wahyuni dkk., 2021).

Contoh 2.2.4 Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5 \rangle$ merupakan ring komutatif.

1. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}_5, +_5 \rangle$ merupakan grup komutatif.
   Untuk menunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_5$ dengan operasi $+_5$ membentuk suatu grup, digunakan tabel Cayley guna memperlihatkan sifat tertutup, unsur identitas, dan invers dari setiap elemen. Oleh karena itu, tabel Cayley untuk $\mathbb{Z}_5$ disajikan sebagai berikut.

Tabel 2.1 Tabel Cayley $\mathbb{Z}_5$ dengan Operasi Penjumlahan Modulo 5

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

i. Operasi $+_5$ tertutup di $\mathbb{Z}_5$;
ii. Operasi $+_5$ bersifat asosiatif;
iii. Elemen identitas terhadap $+_5$ adalah $\overline{0}$;
iv. Setiap elemen memiliki invers terhadap $+_5$;
v. Operasi $+_5$ bersifat komutatif.

2. Operasi perkalian bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $j, l, p \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $(j \cdot_5 l) \cdot_5 p = j \cdot_5 (l \cdot_5 p)$.
3. Sifat distribusi kiri dan kanan berlaku di $\mathbb{Z}_5$:
   i. $j \cdot_5 (l +_5 p) = (j \cdot_5 l) +_5 (j \cdot_5 p)$;
   ii. $(j +_5 l) \cdot_5 p = (j \cdot_5 p) +_5 (l \cdot_5 p)$.
4. Operasi perkalian bersifat komutatif, yaitu $j \cdot_5 l = l \cdot_5 j$.

Dengan demikian, $\langle \mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5 \rangle$ merupakan ring komutatif.

Selanjutnya, akan diperkenalkan konsep homomorfisma pada ring, yang merupakan pemetaan struktur aljabar yang mempertahankan operasi ring. Berikut ini diberikan definisi homomorfisma pada ring.

Definisi 2.2.5 Diberikan ring $\langle R_1, +_1, \cdot_1 \rangle$, $\langle R_2, +_2, \cdot_2 \rangle$ dan pemetaan $f : R_1 \to R_2$. Pemetaan f disebut homomorfisma ring apabila memenuhi:

i. $f(j +_1 l) = f(j) +_2 f(l)$,
ii. $f(j \cdot_1 l) = f(j) \cdot_2 f(l)$,

untuk setiap $j, l \in R_1$ (Wahyuni dkk., 2021).

Contoh 2.2.6 Diberikan ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ dan $\langle \mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6 \rangle$. Didefinisikan pemetaan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$ dengan $f(j) = \overline{j}$, untuk setiap $j \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa f merupakan homomorfisma ring.

Untuk setiap $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$, berlaku:

i.
$$f(j_1 + j_2) = \overline{j_1 + j_2} = \overline{j_1} +_6 \overline{j_2} = f(j_1) +_6 f(j_2),$$

ii.
$$f(j_1 \cdot j_2) = \overline{j_1 \cdot j_2} = \overline{j_1} \cdot_6 \overline{j_2} = f(j_1) \cdot_6 f(j_2).$$

Dengan demikian, f merupakan homomorfisma ring (Wahyuni dkk., 2021).

2.3 Pemetaan Ortogonal

Dalam kajian struktur aljabar, khususnya teori ring dan pemetaan aditif, sering digunakan asumsi tambahan yang berkaitan dengan perilaku pemetaan terhadap operasi perkalian. Salah satu konsep yang digunakan adalah pemetaan ortogonal.

Diberikan ring R. Dua pemetaan aditif $f_1, f_2 : R \to R$ disebut pemetaan ortogonal (*orthogonal maps*) apabila untuk setiap $j, l \in R$ memenuhi

$$f_1(j)f_2(l) + f_2(j)f_1(l) = 0$$

(Brešar, 2004). Untuk memperjelas pengertian pemetaan ortogonal, berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.3.1 Diberikan ring $M = \left\{ \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \middle| \, j, l \in \mathbb{R} \right\}$. Definisikan pemetaan aditif $f_1, f_2 : M \to M$ dengan

$$f_1\left(\begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dan
$$f_2\left(\begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -l \end{bmatrix}.$$

untuk setiap $A = \begin{bmatrix} j_1 & 0 \\ 0 & l_1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} j_2 & 0 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} \in M$,. Diperoleh:

$$f_1(A)f_2(B) + f_2(A)f_1(B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sehingga f_1 dan f_2 merupakan pemetaan ortogonal.

2.4 Derivasi pada Ring

Dalam struktur aljabar, kondep derivasi berperan penting untuk mengkaji perubahan dan hubungan antar elemen alam sebuah ring. Sebelum membahas lebih lanjut aplikasinya, bagian berikut akan memaparkan definisi formal dari derivasi.

Definisi 2.4.1 Diberikan ring R. Pemetaan aditif d dari suatu ring R ke dirinya sendiri yang memenuhi aturan Leibniz:

$$d(jl) = d(j)l + jd(l), \text{untuk setiap } j, l \in R$$

disebut derivasi (Ali dkk., 2024).

Contoh 2.4.2 Diberikan ring $M_2(\mathbb{Z})$. Didefinisikan $d : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z})$, dengan

$$d\left(\begin{bmatrix} j & l \\ p & w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -l \\ p & 0 \end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan bahwa d merupakan derivasi pada ring $M_2(\mathbb{Z})$.

Diberikan sebarang matriks $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} j_1 & l_1 \\ p_1 & w_1 \end{bmatrix}$$

dan

$$B = \begin{bmatrix} j_2 & l_2 \\ p_2 & w_2 \end{bmatrix}.$$

1. Akan ditunjukkan bahwa $d(A+B) = d(A) + d(B)$.

$$\begin{aligned}
d(A+B) &= d\left(\begin{bmatrix} j_1 & l_1 \\ p_1 & w_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_2 & l_2 \\ p_2 & w_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= d\left(\begin{bmatrix} j_1 + j_2 & l_1 + l_2 \\ p_1 + p_2 & w_1 + w_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -(l_1 + l_2) \\ p_1 + p_2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -l_1 \\ p_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -l_2 \\ p_2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= d(A) + d(B).
\end{aligned}$$

2. Akan ditunjukkan bahwa $d(AB) = d(A)B + Ad(B)$.

$$\begin{aligned}
d(AB) &= d\left(\begin{bmatrix} j_1 & l_1 \\ p_1 & w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_2 & l_2 \\ p_2 & w_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= d\left(\begin{bmatrix} j_1 j_2 + l_1 p_2 & j_1 l_2 + l_1 w_2 \\ p_1 j_2 + w_1 p_2 & p_1 l_2 + w_1 w_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -(j_1 l_2 + l_1 w_2) \\ p_1 j_2 + w_1 p_2 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

   Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
d(A)B + Ad(B) &= \begin{bmatrix} 0 & -l_1 \\ p_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_2 & l_2 \\ p_2 & w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_1 & l_1 \\ p_1 & w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -l_2 \\ p_2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -l_1 p_2 & -l_1 w_2 \\ p_1 j_2 & p_1 l_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 p_2 & -j_1 l_2 \\ w_1 p_2 & -p_1 l_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -(j_1 l_2 + l_1 w_2) \\ p_1 j_2 + w_1 p_2 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Karena kedua syarat terpenuhi, terbukti bahwa d merupakan derivasi pada $M_2(\mathbb{Z})$.

Sebagai bentuk khusus dari derivasi pada ring, diperkenalkan konsep derivasi *inner* yang memiliki peranan penting dalam kajian struktur aljabar.

Definisi 2.4.3 Diberikan suatu ring R. Didefinisikan pemetaan $d : R \to R$ disebut derivasi *inner* apabila terdapat $\lambda \in R$ yang memenuhi $d(j) = [j, \lambda] = \lambda j - j\lambda$, untuk setiap $j \in R$ (Waluyo dkk., 2025).

Contoh 2.4.4 Diberikan ring $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} j & l \\ p & w \end{bmatrix} \mid j, l, p, w \in \mathbb{Z} \right\}$. Didefinisikan pemetaan $d : M_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ disebut derivasi *inner* apabila terdapat $\lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ yang memenuhi $d(A) = [A, \lambda] = \lambda A - A\lambda$, untuk setiap $A = \begin{bmatrix} j & l \\ p & w \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$. Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} j_1 & l_1 \\ p_1 & w_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} j_2 & l_2 \\ p_2 & w_2 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$. Akan ditunjukkan bahwa d bersifat aditif.

$$
\begin{aligned}
d\left(\begin{bmatrix} j_1 & l_1 \\ p_1 & w_1 \end{bmatrix}\right) + d\left(\begin{bmatrix} j_2 & l_2 \\ p_2 & w_2 \end{bmatrix}\right) &= \lambda \begin{bmatrix} j_1 & l_1 \\ p_1 & w_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j_1 & l_1 \\ p_1 & w_1 \end{bmatrix} \lambda \\
&\quad + \lambda \begin{bmatrix} j_2 & l_2 \\ p_2 & w_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j_2 & l_2 \\ p_2 & w_2 \end{bmatrix} \lambda \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -2l_1 \\ 2p_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2l_2 \\ 2p_2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -2(l_1 + l_2) \\ 2(p_1 + p_2) & 0 \end{bmatrix} \\
&= d\left(\begin{bmatrix} j_1 + j_2 & l_1 + l_2 \\ p_1 + p_2 & w_1 + w_2 \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa d memenuhi aturan Leibniz.

$$
\begin{aligned}
d(A)B + Ad(B) &= [A, \lambda]B + A[B, \lambda] \\
&= (\lambda A - A\lambda)B + A(\lambda B - B\lambda) \\
&= d(AB).
\end{aligned}
$$

Karena $d(AB) = d(A)B + Ad(B)$, maka terbukti bahwa d merupakan derivasi *inner* pada $M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$.

2.5 Homoderivasi pada Ring

Pada tahun 2000, El Sofy memberikan konsep menarik mengenai penggabungan konsep homomorfisma dan derivasi yang diberi nama homoderivasi. Ia menunjukkan bahwa pemetaan tersebut bukanlah homomorfisma maupun derivasi.

Definisi 2.5.1 Diberikan ring R. Pemetaan aditif h dari suatu ring R ke dirinya sendiri yang memenuhi kondisi:

$$h(jl) = h(j)h(l) + h(j)l + jh(l), \text{untuk setiap } j, l \in R$$

disebut homoderivasi (Ali dkk., 2024).

Contoh 2.5.2 Diberikan ring M. Didefinisikan $h : M \to M$ dengan

$$h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j & 0 & l \\ p & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan h merupakan homoderivasi dari $M_3(\mathbb{Z})$.

Diberikan sebarang matriks $A, B \in M_3(\mathbb{Z})$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j_1 & 0 & l_1 \\ p_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j_2 & 0 & l_2 \\ p_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

i. Akan ditunjukkan bahwa h bersifat aditif.

$$
\begin{aligned}
h(A+B) &= h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j_1 & 0 & l_1 \\ p_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j_2 & 0 & l_2 \\ p_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j_1+j_2 & 0 & l_1+l_2 \\ p_1+p_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j_1+j_2 & 0 & 0 \\ p_1+p_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j_1 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j_2 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= h(A) + h(B).
\end{aligned}
$$

Terbukti h bersifat aditif.

ii. Akan ditunjukkan bahwa h memenuhi $h(AB) = h(A)h(B) + h(A)B + Ah(B)$.

$$
\begin{aligned}
h(AB) &= h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j_1 & 0 & l_1 \\ p_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j_2 & 0 & l_2 \\ p_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l_1p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l_1p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} h(A)h(B)+h(A)B+Ah(B) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j_1 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j_2 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j_1 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j_2 & 0 & l_2 \\ p_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j_1 & 0 & l_1 \\ p_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j_2 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l_1 p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $h(AB) = h(A)h(B) + h(A)B + Ah(B)$.

Jadi, terbukti bahwa h merupakan homoderivasi pada ring M.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada tahun ajaran 2025/2026 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung, yang berlokasi di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Provinsi Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur dan analisis teoritis dengan mengkaji berbagai referensi yang relevan, seperti jurnal ilmiah, artikel, buku teks, serta sumber-sumber lain yang berkaitan dengan topik penelitian. Secara umum, langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. mempelajari materi terkait teori grup, ring, derivasi, dan homoderivasi;
2. menganalisis sifat-sifat homoderivasi pada ring R;
3. memberikan contoh-contoh ilustrasi dan sifat-sifat yang diperoleh;
4. menyelidiki hubungan antara homoderivasi dengan derivasi pada ring.

Selanjutnya, langkah-langkah penelitian dapat dilihat pada diagram berikut:

Mengkaji teori aljabar abstrak yaitu grup (Fitriani dan Faisol, 2022), semigrup, ring, subring (Rasiman dkk., 2018), dan ideal (Wahyuni dkk., 2021). Memperlajari derivasi (Huang dkk., 2023), komposisi derivasi, kombinasi linear derivasi, ideal-δ (Helmi dkk., 2013). Mempelajari homoderivasi pada ring (Ali dkk., , 2024)

↓

Tahap 1 Menganalisis sifat-sifat homoderivasi pada ring R

↓

Tahap 2 Memberikan contoh-contoh ilustrasi dan sifat-sifat yang diperoleh

↓

Tahap 3 Menyelidiki hubungan antara homoderivasi dengan derivasi pada ring R

Gambar 3.1 Langkah-langkah penelitian

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, homoderivasi pada ring merupakan gabungan antara aturan Leibniz dengan sifat perkalian homomorfisma pada ring. Penelitian ini menunjukkan beberapa sifat homoderivasi pada ring lengkap dengan bukti dan contohnya. Di antaranya, penjumlahan dua pemetaan homoderivasi pada ring juga merupakan pemetaan homoderivasi pada ring, dengan syarat pemetaan homoderivasi h_1 dan h_2 ortogonal. Selanjutnya, penelitian ini menemukan bahwa penjumlahan langsung antara pemetaan-pemetaan homoderivasi pada ring masing-masing membentuk suatu pemetaan homoderivasi. Namun demikian, secara umum hasil kali suatu konstanta k dengan pemetaan homoderivasi tidak selalu menghasilkan homoderivasi. Namun, jika ring R bersifat komutatif dan k merupakan elemen idempoten, maka pemetaan kh merupakan homoderivasi.

Selain itu, diperoleh pula bahwa homoderivasi *inner* yang mengadopsi konsep derivasi *inner* berlaku apabila elemen λ merupakan elemen *center* dari ring R. Penelitian ini juga menunjukkan adanya struktur aljabar yang terbentuk yaitu semigrup dan $\mathbb{Z}$-modul. Dalam penelitian ini juga menunjukkan bahwa setiap homoderivasi juga merupakan derivasi, tetapi tidak berlaku sebaliknya. Kondisi tersebut dapat dicapai apabila terpenuhi salah satu dari tiga syarat yang ditemukan.

5.2 Saran

Penelitian selanjutnya disarankan untuk memperluas kajian mengenai pemetaan homoderivasi pada kelas ring tertentu serta meneliti keterkaitannya dengan pemetaan aljabar lainnya, sehingga diperoleh pemahaman yang lebih mendalam mengenai struktur dan sifat homoderivasi.

DAFTAR PUSTAKA

Alharfie, E. F. & Muthana, N. M. (2018). The Commutativity uf Prime Rings with Homoderivations. *International Journal of Advanced and Applied Sciences*, 5(5), 79-81.

Alharfie, E. F. & Muthana, N. M. (2019). On Homoderivations and Commutativity of Rings. *Bulletin of the International Mathematical Virtual Istitute*, 5, 301-304.

Ali, S., Rafiquee, N. N., & Varshney, V. (2024). Certain types of derivations in rings: A survey. *J. Indones. Math. Soc.*, 30(02), 256-306.

Ali, S., Rafiquee, N. N., & Varshney, V. (2025). Reverse Homoderivations on (Semi)-prime Rings. *J. Indones. Math. Soc.*, 31(03), 1-13.

Al-Khalaf, A., Artemavych, O. D., & Taha, I. (2018). Derivations in Differentially Prime Rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, 17(7), 1-11.

Al-Khalaf, A., Artemavych, O. D., & Taha, I. (2018). Rings with Simple Lie Rings of Lie and Jordan Derivations. *Journal of Algebra and Its Applications*, 17(4), 1-11.

Ansari, A. Z., Shujat, F., & Fallah, A. (2024). Structure of $(\sigma,\ \rho)$-n-Derivations on Rings. *Universal Wiser*, 5(4), 5666-5678.

Ashraf, M., Ali, S., & Haetinger, C. (2006). On Derivations In Rings and Their Applications. *The Aligaph Bull. of Math.*, 25(02), 79-107.

Belkadi, S. & Taoufiq, L. (2024). On Higher Order Homoderivations in Semi-prime Rings. *Jordan Journal of Mathematics and Statistics*, 17(1), 99-112.

Ber, A., Kudaybergenov, K., & Sukochev, F. (2020). Notes on Derivations of Murray–von Neumann algebras. *Journal of Functional Analysis*, 279(1), 1-26.

Brešar, M. (2004). Commuting Maps: A Survey. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 8(3), 361-397.

Chung, L. O.(1985). Nil derivations. *Journal of Algebra*, 95(1), 20-30.

Chung, L. O., & Kobayashi, Y. (1985). Nil derivations and chain conditions in prime rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 94(2), 201-205.

Dhara, B., & Sharma, R. K. (2009). On additive mappings in rings with identity element. *International Mathematical Forum*, 4(15), 727-732.

El-Sayiad, M. S., & Almulhem, M. (2025). On Centrally-Extended n-Homoderivations on Rings. *AIMS Mathematics*, 10(3), 7191-7205.

Engin, A. & Aydin, N. (2023). Homoderivation in Prime Rings. *Journal of New Theory*, 43, 23-34.

Ernanto, I. (2018). Sifat-sifat ring faktor yang dilengkapi derivasi. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 1(1), 12-21.

Faisol, A. & Fitriani (2025). A Study of Derivations and Linear Mappings on Skew Generalized Power Series Modules. *BarekengJ.Math.App.*, 19(4), 3047-3058.

Felzenszwalb, B., & Lanski, C. (1983). On the Centralizers of Ideals and Nil Derivations. *Journal of Algebra*, 83(1), 520-530.

Fitriani, & Faisol, A. (2022). *Grup*. Matematika, Yogyakarta.

Fitriani, Wijayanti, I. E. Faisol, A. & Ali, S. (2024). On f-derivations on polynomial modules. *J. Algebr.its Appl.*, 24(6), 1-14.

Fitriani, Wijayanti, I. E. Faisol, A. & Ali, S. (2025). Commuting and Centralizing Maps on Modules. *J. Algebr.its Appl.*, 10(3), 691-697.

Helmi, M.R., Marubayashi, H., & Ueda, A. (2013). Differential Polynomial Rings Which Are Generalized Asano prime Ring. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 44(5), 673-681.

Huang, J., Kudaybergenov, K., & Sukochev, F. (2023). Ring Derivations of Murray–von Neumann algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 672(1), 28-52.

Hummdi, A. Y., Bedir, Z., Sögütcü, E. K., Gölba¸sı, Ö., & Rehman, N.(2024). Lie Ideals and Homoderivations in Semiprime Rings. *Mathematics*, 13(4), 1-13.

Melaibari, A., Muthana, N., & Al-Kenani, A. (2016). Homoderivations on Rings. *General Mathematics Notes*, 35(1), 1-8.

Mursyidah, D. L., Fitriani, Utami, B. H. S. & Faisol, A. (2025). Nil Derivation and δ-ideal on Polynomial Ring. *Barekeng J.Math.App*, 20(1), 325-334.

Rasiman, Rubowo, M. R., & Pramasdyahsari, A. S. (2018). *Teori Ring*. Univ. PGRI Semarang Press, Semarang.

Sitompul, D. E., Fitriani, Chasanah, S. L. & Faisol, A. (2024). Jordan Derivation on the Polynomial Ring $R[x]$. *Integr. J. Math. Comput. Sci.*, 2(2), 41-47

Taoufiq, L., & Belkadi, S. (2019). On Nilpotent Homoderivations in Semiprime Rings. *Boletim da Sociedade Paransence de Matematica*, 22(2), 1-10.

Thomas, A. B., Puspita, N. P., & Fitriani, F. (2024). Derivation on Several Rings. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 18(3), 1729-1738.

Turkmen, S. (2024). Relationship Between a Homoderivation and a Semi-Derivation. *Journal of New Theory*. 47(3), 28-38.

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, d. A., & Hartanto, A. d. (2021). *Teori ring dan modul*. UGM Press, Yogyakarta.

Waluyo, R., Faisol, A. & Fitriani. (2025). (σ, τ)-derivasi pada Ring Grup. *Euler J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol*, 13(2), 142-146.

Watase, Y. (2021). Derivation of Commutative Rings and the Leibniz Formula for Power of Derivation. *Formalized Mathematics*, 29(1), 1-8.