

BI-DERIVASI PADA RING POLINOMIAL

Skripsi

Oleh

SELVI DIANA DWI RINANDA
NPM. 2217031034



FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG

2026

ABSTRACT

BI-DERIVATION ON POLYNOMIAL RING

By

Selvi Diana Dwi Rinanda

A mapping $\lambda : R \times R \rightarrow R$ is called a bi-derivation if λ is bi-additive and satisfies $\lambda(xy, z) = \lambda(x, z)y + x\lambda(y, z)$ and $\lambda(x, yz) = \lambda(x, y)z + y\lambda(x, z)$, for every $x, y, z \in R$. Bi-derivatives are a generalization of the concept of derivatives in rings and play an important role in understanding the structural properties of a ring. This study aims to examine bi-derivatives in polynomial rings, present concrete examples of bi-derivative mappings, and analyze the characteristics and properties that arise from these bi-derivatives. Thus, this study is expected to contribute to the development of ring theory, particularly in the context of polynomial rings.

Keywords: ring, polynomial, derivation, bi-derivation.

ABSTRAK

BI-DERIVASI PADA RING POLINOMIAL

Oleh

Selvi Diana Dwi Rinanda

Suatu pemetaan $\lambda : R \times R \rightarrow R$ disebut bi-derivasi jika λ bersifat bi-aditif dan memenuhi $\lambda(xy, z) = \lambda(x, z)y + x\lambda(y, z)$ dan $\lambda(x, yz) = \lambda(x, y)z + y\lambda(x, z)$, untuk setiap $x, y, z \in R$. Bi-derivasi merupakan generalisasi dari konsep derivasi pada ring dan memiliki peranan penting dalam memahami sifat-sifat struktural suatu ring. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji bi-derivasi pada ring polinomial, menyajikan contoh-contoh konkret pemetaan bi-derivasi, serta menganalisis karakteristik dan sifat-sifat yang muncul dari bi-derivasi tersebut. Dengan demikian, penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap pengembangan kajian teori ring, khususnya dalam konteks ring polinomial.

Kata-kata kunci: ring, polinomial, derivasi, bi-derivasi.

BI-DERIVASI PADA RING POLINOMIAL

SELVI DIANA DWI RINANDA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

Judul Skripsi : **BI-DERIVASI PADA RING POLINOMIAL**

Nama Mahasiswa : **Selvi Diana Dwi Rinanda**

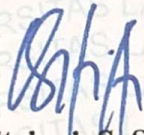
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031034**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

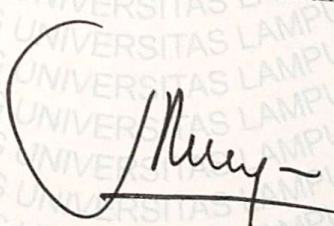


1. Komisi Pembimbing


Dr. Fitriani, S. Si., M. Sc.
NIP 198406272006042001


Dr. Ahmad Faisol, S. Si., M. Sc.
NIP 198002062003121003

2. Ketua Jurusan Matematika


Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Fitriani, S. Si., M. Sc.**

Sekretaris : **Dr. Ahmad Faisol, S. Si., M. Sc.**

Penguji

Bukan Pembimbing : **Dr. Aang Nuryaman, S. Si., M. Si.**

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.

NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **22 Januari 2026**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Selvi Diana Dwi Rinanda**
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031034**
Jurusan : **Matematika**
Judul Skripsi : **Bi-Derivasi pada Ring Polinomial**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 22 Januari 2026

Penulis,



Selvi Diana Dwi Rinanda

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Selvi Diana Dwi Rinanda yang lahir di Kota Agung pada tanggal 19 Desember 2003. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara, putri dari pasangan Lukman dan Heri Yurita.

Penulis memulai pendidikan formal di TK Tunas Bangsa pada tahun 2009 dan menyelesaikannya pada tahun 2010. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di SD Negeri 1 Pendowo Asri pada tahun 2010 sampai dengan 2016. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 1 Dente Teladas pada tahun 2016 sampai dengan tahun 2019, dan menyelesaikan pendidikan di SMA Negeri 1 Kota Agung pada tahun 2022.

Pada tahun 2022, penulis diterima di Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN). Selain menjalani peran sebagai mahasiswa, penulis juga aktif dalam organisasi, salah satunya dengan menjadi anggota Biro Dana dan Usaha pada Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) periode 2023.

Pada awal tahun 2025, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 30 hari di desa Sendang Asih, Kecamatan Sendang Agung, Kabupaten Lampung Tengah. Selain itu, pada Bulan Juni 2025, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di PT. Central Pertiwi Bahari (CPB) selama 40 hari yang berlokasi di desa Bratasena Adiwarna, Kecamatan Dente Teladas, Kabupaten Tulang Bawang.

KATA INSPIRASI

Karena sesungguhnya setelah kesulitan itu ada kemudahan.

(QS. Al-Insyirah:5)

Allah tidak membebani seseorang, kecuali menurut kesanggupannya.

(Al-Baqarah: 286)

Jangan pernah berharap bahwa jalan hidupmu akan seperti jalan hidup orang lain. Perjalanan hidup yang kamu miliki merupakan sesuatu yang unik, seperti dirimu.

PERSEMBAHAN

Alhamdulillāhi rabbil ‘ālamīn.

Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Subhanahu wa Ta‘ālā atas limpahan rahmat, taufik, dan karunia-Nya sehingga penulisan skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik serta tepat waktu.

Shalawat dan salam semoga senantiasa tercurah kepada junjungan Nabi Muhammad Shallallāhu ‘Alaihi Wasallam.

Dengan penuh rasa syukur dan ketulusan, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang mendalam kepada:

Ayah dan Ibuku Tercinta

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada kedua orang tua tercinta atas pengorbanan, doa, kasih sayang, serta dukungan tanpa henti. Segala nasihat dan teladan yang diberikan menjadi pelajaran berharga sekaligus motivasi bagi penulis untuk senantiasa berusaha menjadi pribadi yang bermanfaat.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Penulis menyampaikan terima kasih kepada dosen pembimbing dan dosen pembahas atas segala bimbingan, arahan, serta ilmu yang diberikan. Dukungan dan masukan yang berharga tersebut sangat membantu dalam penyusunan dan penyelesaian skripsi ini.

Sahabat-sahabatku

Penulis menyampaikan terima kasih kepada seluruh sahabat dan orang-orang baik atas doa, semangat, motivasi, serta kebersamaan yang senantiasa menguatkan dalam setiap langkah. Kehadiran dan dukungan tersebut menjadi bagian penting dalam perjalanan penulis hingga terselesaikannya skripsi ini.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Subhānahu wa Ta‘ālā atas limpahan rahmat dan karunia-Nya, sehingga skripsi yang berjudul “Bi-derivasi pada Ring Polinomial” dapat diselesaikan dengan baik, lancar, dan tepat waktu. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurah kepada junjungan Nabi Muhammad Shallallāhu ‘Alaihi Wasallam beserta keluarga, sahabat, dan seluruh pengikutnya. Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis memperoleh banyak bantuan berupa

dukungan, arahan, bimbingan, serta masukan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada pihak-pihak berikut:

1. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing I yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, arahan, serta motivasi sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
2. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, arahan, serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku penguji sekaligus dosen pembimbing akademik yang telah berkenan memberikan masukan, kritik, saran, serta evaluasi yang membangun, sehingga membantu penulis menjadi lebih baik.
4. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Ayah, Ibu, Abang serta Adikku tercinta yang senantiasa memberikan doa, dukungan moral, motivasi dan semangat, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

6. *A special and favorite person who always supports, motivates, gives constructive criticism to the author, and always provides meaningful support to the author in the process of writing this thesis.*
7. Sahabat penulis sejak SMP hingga SMA yang telah banyak memberi tawa dan selalu saling membantu.
8. Sahabat seperjuangan dalam grup RACHVIN, yaitu Rahmah Mutiara Ayu Ningtiyas, Amalia Soleha, Rachma Allya Shieffa, dan Intan Arimbi Putri. Terima kasih atas kebersamaan sejak semester pertama hingga sekarang, serta atas dukungan dan motivasi yang selalu diberikan. Kehadiran kalian telah menjadi bagian penting yang sangat membantu penulis selama menempuh perkuliahan.
9. *Derivation Squad* yang telah menemani proses ini dengan kebersamaan, serta senantiasa memberikan dukungan, motivasi, dan saran berharga yang sangat membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi.

Penulis berharap skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak yang membacanya. Penulis juga menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga masukan berupa kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan guna penyempurnaan di masa mendatang.

Bandar Lampung, 22 Januari 2026

Selvi Diana Dwi Rinanda

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Tujuan Penelitian	3
1.3 Manfaat Penelitian	3
II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Grup	5
2.2 Grup Komutatif	6
2.3 Ring	6
2.4 Hasil Jumlah Langsung (<i>Direct Sum</i>) pada Ring	12
2.5 Ring Polinomial	13
2.6 Modul atas Ring	19
2.7 Derivasi pada Ring	21
2.8 Bi-Derivasi Pada Ring	23
III METODE PENELITIAN	28
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	28
3.2 Metode Penelitian	28
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	30
4.1 Bi-Derivasi pada Ring	30
4.2 Bi-Derivasi pada Ring Polinomial	65
V KESIMPULAN DAN SARAN	80
5.1 Kesimpulan	80
5.2 Saran	80
DAFTAR PUSTAKA	81

DAFTAR GAMBAR

3.1	Diagram tahapan penelitian	29
-----	--------------------------------------	----

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Secara konsep aljabar abstrak, struktur ring memegang peranan fundamental sebagai landasan bagi pengembangan berbagai cabang matematika, seperti teori modul, geometri aljabar, serta aplikasi dalam kriptografi, ilmu komputer, teori pengkodean, dan bidang fisika. Ring merupakan suatu sistem aljabar yang terdiri dari himpunan dengan dua operasi biner, dinotasikan sebagai penjumlahan dan perkalian, yang memenuhi sifat-sifat tertentu. Salah satu bentuk ring yang penting adalah ring polinomial, yakni ring yang elemennya berupa polinomial dengan koefisien yang berasal dari suatu ring tertentu. Ring jenis ini memiliki potensi besar untuk dikembangkan lebih lanjut dalam membentuk struktur aljabar yang lebih kompleks dan aplikatif.

Salah satu pokok bahasan dalam teori ring adalah derivasi. Menurut Ali dkk. (2024), derivasi pada ring R adalah suatu fungsi pada R yang bersifat aditif dan memenuhi aturan Leibniz. Konsep ini muncul sebagai analog aljabar dari turunan (derivatif) dalam kalkulus dan memberikan banyak informasi struktural tentang ring yang dikaji. Salah satu pengembangan dari derivasi adalah bi-derivasi. Bi-derivasi merupakan generalisasi dari derivasi yang merupakan pemetaan bi-aditif $R \times R \rightarrow R$ yang memenuhi $\lambda(ln, s) = \lambda(l, s)n + l\lambda(n, s)$ dan $\lambda(l, ns) = \lambda(l, n)s + n\lambda(l, s)$.

Beberapa penelitian terdahulu yang telah mengkaji konsep derivasi pada ring antara lain: Dhara dan Sharma (2009) membahas tentang pemetaan aditif dalam ring asosiatif dengan elemen identitas. Kemudian, Ashraf dkk. (2010) membahas tentang bi-derivasi umum (σ, τ) dalam ring, khususnya pada pemetaan aditif seperti σ -left centralizer traces, σ -left bimultipliers, dan berbagai bentuk biderivasi simetris dan generalisasi Jordan dari (σ, τ) -biderivasi. Penelitian selanjutnya oleh Kuzucuoğlu (2011) yang membahas tentang karakterisasi derivasi Jordan *strictly triangular*

matrix rings dan menunjukkan bahwa setiap derivasi Jordan dapat dituliskan sebagai jumlah dari derivasi biasa dan derivasi ekstremal. Selanjutnya, Kuzucuoglu dan Sayin (2017) membahas semua derivasi dari kelas-kelas tertentu dari ring matrix khususnya pada ring matriks segitiga bawah. Kemudian, Shujat (2018) mengkaji tentang bi-derivasi umum simetris pada ring prima dan semi prima yang berfokus pada struktur bi-derivasi yang membuat ring menjadi komutatif atau menghasilkan struktur yang baru.

Penelitian berikutnya oleh Ernanto (2018) membahas sifat-sifat ring faktor yang dilengkapi dengan derivasi, khususnya syarat perlu dan cukup agar ring faktor menjadi ring sederhana, dan ring prima melalui konsep ideal- d prima dan ideal- d maksimal. Selanjutnya, Reddy dan Reddy (2018) membahas tentang sifat komutatif pada ring prima jika terdapat bi-derivasi simetris pada ideal tak nol dari ring. Kemudian, Khalaf dkk. (2018) membahas karakteristik ring asosiatif R yang memiliki Lie ring sederhana dari derivasi Lie dan derivasi Jordan. Penelitian selanjutnya oleh Khalaf dkk. (2018) yang mengkaji derivasi pada ring diferensial prima, dengan menelaah sifat-sifatnya serta memberikan hasil-hasil baru terkait struktur dan karakteristik ring tersebut. Berikutnya, Sayin dan Kuzucuoglu (2019) membahas derivasi Jordan pada subring khusus dari ring matriks $R_n(K, J)$, dengan K adalah ring bebas 2-torsi dengan elemen identitas. Kemudian, Ayupov dan Yusupov (2020) mengkaji derivasi 2-lokal pada aljabar Lie berdimensi tak hingga dalam bidang karakteristik tak nol. Selanjutnya, penelitian oleh De Filippis dkk. (2021) membahas tentang *generalized (m, n) - G -derivations* pada ring prima, dengan meneliti kondisi-kondisi tertentu yang menjamin sifat komutatif ring. Selanjutnya, Hidayati dkk. (2022) membahas syarat cukup agar ring prima menjadi ring komutatif bila terdapat biderivasi simetris.

Kemudian, penelitian oleh Faraj dkk. (2023) membahas *symmetric generalized bi-derivations* (SGBD) pada ring dengan ideal prima serta menunjukkan kondisi-kondisi yang menjamin sifat komutatif dari ring hasil bagi. Penelitian selanjutnya dikaji oleh Khan dkk. (2024) yang membahas penerapan metode langsung dan metode titik tetap untuk membuktikan stabilitas Hyers–Ulam pada bi-derivasi dan bihomomorfisme dalam Banach aljabar. Kemudian, Murty dan Renddy (2024) membahas tentang bi-derivasi simetrik terbalik pada ring semi prima yang berfokus pada kondisi ortogonal antar bi-derivasi. Selanjutnya, Thomas dkk. (2024) mengkaji konstruksi dan sifat derivasi pada beberapa jenis ring. Selanjutnya, Fitriani dkk. (2024) mengkaji konsep dan sifat derivasi $-f$ pada modul polinomial beserta beberapa teorema pendukungnya.

Penelitian berikutnya dikaji oleh Fitriani, dkk. (2025) yang membahas perluasan konsep *commuting* dan *centralizing* modul. Selanjutnya, Faisol dan Fitriani (2025) membahas derivasi dan pemetaan linear pada modul *skew generalized power series* sebagai perluasan teori derivasi klasik. Kemudian, Waluyo dkk. (2025) membahas (σ, τ) -derivasi pada ring grup dengan memberikan contoh konkret serta karakterisasi sifat aljabarnya dalam konteks struktur ring non-komutatif berbasis grup. Selanjutnya, Sitompul dkk. (2025) membahas sifat dan penerapan derivasi Jordan pada ring polinomial $R[x]$ serta hubungan antara derivasi Jordan pada ring R dan $R[x]$.

Penelitian yang membahas bi-derivasi pada ring masih tergolong terbatas. Sebagian besar penelitian yang mengangkat topik ini umumnya berfokus pada ring-ring yang relatif sederhana atau pada jenis ring tertentu, seperti ring matriks. Hingga saat ini, kajian mengenai bi-derivasi pada ring polinomial belum banyak ditemukan dalam literatur. Oleh karena itu, pemilihan topik ini dimaksudkan untuk memperluas pemahaman terhadap konsep bi-derivasi, khususnya dalam konteks ring polinomial, serta diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap pengembangan teori ring secara lebih umum.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. mengkonstruksi pemetaan bi-derivasi pada ring polinomial;
2. memberikan contoh-contoh pemetaan bi-derivasi pada ring polinomial;
3. mengidentifikasi sifat khusus dan karakteristik bi-derivasi pada ring polinomial.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang ingin diperoleh dari penelitian ini yaitu:

1. memperdalam pemahaman tentang sifat dan karakteristik bi-derivasi pada ring polinomial;

2. membantu memahami konsep biderivasi yang dikonstruksikan pada ring polinomial;
3. menjadi bahan acuan atau dasar bagi penelitian lanjutan di bidang matematika murni, khususnya dalam teori derivasi dan generalisasinya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, akan diuraikan konsep dasar yang menjadi landasan teori untuk mendukung pembahasan pada bagian selanjutnya.

2.1 Grup

Salah satu langkah penting dalam memahami konsep-konsep yang lebih kompleks dalam teori aljabar adalah menguasai struktur dasar dalam aljabar abstrak, yaitu grup. Sebagai dasar sebelum membahas pengertian grup, terlebih dahulu akan diberikan definisi mengenai operasi biner, karena konsep ini menjadi fondasi dalam pembentukan struktur grup.

Definisi 2.1.1 Operasi biner $*$ pada himpunan S merupakan fungsi dari $S \times S$ ke S . Untuk setiap $(a, b) \in S \times S$, $*(a, b)$ di S dinotasikan dengan $a * b$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Sebagai ilustrasi, jika dipilih $S = \mathbb{Z}$, dan $*$ adalah operasi penjumlahan bilangan bulat, maka $+$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$ karena $+(a, b)$ yang dinotasikan dengan $a + b$ merupakan bilangan bulat. Berikut diberikan contoh operasi biner pada suatu himpunan tertentu.

Contoh 2.1.2 Operasi penjumlahan biasa pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ merupakan operasi biner.

Struktur aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu dinamakan grup.

Definisi 2.1.3 Suatu grup $\langle G, * \rangle$ terdiri dari himpunan G bersama operasi biner $*$ yang didefinisikan pada G dan memenuhi aksioma berikut:

1. operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$;
2. terdapat elemen identitas e , yaitu untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$;
3. untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen invers $a' \in G$ sehingga berlaku $a * a' = a' * a = e$.

(Fitriani dan Faisol, 2022).

Untuk lebih memahami definisi grup G , berikut diberikan contoh grup.

Contoh 2.1.4 Himpunan $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ dan $\mathbb{R}$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan. Himpunan $\mathbb{R}^*$ (Himpunan bilangan real yang tak nol), $\mathbb{C}^*$ (Himpunan bilangan kompleks yang tak nol) merupakan grup terhadap operasi perkalian.

2.2 Grup Komutatif

Berikut diberikan definisi mengenai grup komutatif, yang merupakan salah satu struktur dasar dalam teori grup dan berperan penting dalam pengembangan berbagai konsep aljabar abstrak.

Definisi 2.2.1 Grup G dikatakan grup komutatif (grup Abel) jika operasi biner $*$ bersifat komutatif, yaitu:

$$a * b = b * a,$$

untuk setiap $a, b \in G$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berikut diberikan contoh grup Abel.

Contoh 2.2.2 Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan merupakan grup Abel, karena $a + b = b + a$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$.

2.3 Ring

Suatu struktur aljabar yang merupakan himpunan tak kosong dan memiliki dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian disebut dengan ring.

Definisi 2.3.1 Diberikan suatu himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi yakni $+$ (operasi penjumlahan) dan $\cdot$ (operasi perkalian), selanjutnya

dilambangkan dengan $\langle R, +, \cdot \rangle$. Struktur $\langle R, +, \cdot \rangle$ dinamakan ring, jika memenuhi aksioma:

1. $\langle R, + \rangle$ merupakan grup Abelian yaitu memenuhi:
 - (a) untuk setiap $a, b \in R, a + b \in R$;
 - (b) untuk setiap $a, b, c \in R, (a + b) + c = a + (b + c)$;
 - (c) terdapat elemen identitas, yakni terdapat $e \in R$, untuk setiap $a \in R$, berlaku $a + e = e + a = a$;
 - (d) setiap elemen punya invers, yakni untuk setiap $a \in R$, terdapat $-a \in R$ berlaku, $a + (-a) = (-a) + a = e$;
 - (e) untuk setiap $a, b \in R, a + b = b + a$.
2. $\langle R, \cdot \rangle$ merupakan semigrup yaitu memenuhi:
 - (a) untuk setiap $a, b \in R, a \cdot b \in R$;
 - (b) untuk setiap $a, b, c \in R, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. Berlaku sifat distributif kiri dan kanan, yakni untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku:
 - (a) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$;
 - (b) $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

(Rasiman dkk., 2018).

Suatu ring dikatakan sebagai ring komutatif jika operasi perkalian pada ring bersifat komutatif, artinya untuk setiap $x, y \in R, xy = yx$ (Muniri, 2016).

Untuk memberikan gambaran mengenai definisi ring, berikut akan diberikan contoh ring.

Contoh 2.3.2 Himpunan bilangan bulat, yang dinotasikan dengan $\mathbb{Z}$ adalah ring atas operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan bulat.

Untuk memperjelas pemahaman, berikut diberikan contoh lain dari ring.

Contoh 2.3.3 Diberikan F himpunan semua fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Untuk setiap $f, g \in F$ dan $x \in \mathbb{R}$ didefinisikan $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dan $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Akan ditunjukkan $\langle F, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

1. $\langle F, + \rangle$ merupakan grup Abel.
2. Untuk setiap $f, g, h \in F$ dan $x \in \mathbb{R}$ berlaku

$$((fg)h)(x) = (fg)h(x) = f(x)g(x)h(x) = f(x)(gh)(x) = (f(gh))(x).$$

Jadi, $(fg)h = f(gh)$ untuk setiap $f, g, h \in F$.

3. Untuk setiap $f, g, h \in F$ dan $x \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\begin{aligned} (f(g+h))(x) &= f(x)(g+h)(x) \\ &= f(x)(g(x) + h(x)) \\ &= f(x)g(x) + f(x)h(x) \\ &= (fg)(x) + (fh)(x) \\ &= (fg + fh)(x). \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} ((f+g)h)(x) &= (f+g)(x)h(x) \\ &= (f(x) + g(x))h(x) \\ &= f(x)h(x) + g(x)h(x) \\ &= (fh)(x) + (gh)(x) \\ &= (fh + gh)(x). \end{aligned}$$

Jadi, hukum distributif kiri dan hukum distributif kanan berlaku pada F .

Akibatnya $\langle F, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

Berikut diberikan contoh lain dari ring.

Contoh 2.3.4 Diberikan himpunan $M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \mid b, d \in \mathbb{Z} \right\}$. Akan ditunjukkan

$\langle M, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

Diberikan sebarang $X = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & b_3 \\ 0 & d_3 \end{bmatrix} \in M$.

1. Akan ditunjukkan $\langle M, + \rangle$ merupakan grup Abel.

(a) Diberikan sebarang $X, Y \in M$, berlaku:

$$\begin{aligned} X + Y &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 + b_2 \\ 0 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in M. \end{aligned}$$

(b) Diberikan sebarang $X, Y, Z \in M$, berlaku:

$$\begin{aligned} (X + Y) + Z &= \left(\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 & b_3 \\ 0 & d_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 + b_2 \\ 0 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_3 \\ 0 & d_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 + b_2 + b_3 \\ 0 & d_1 + d_2 + d_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 & b_2 + b_3 \\ 0 & d_2 + d_3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_3 \\ 0 & d_3 \end{bmatrix} \right) \\ &= X + (Y + Z). \end{aligned}$$

(c) Diberikan sebarang $X \in M$ terdapat $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$ sehingga,

$$\begin{aligned} X + 0 &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \\ &= X. \end{aligned}$$

(d) Diberikan sebarang $X \in M$, terdapat $-X \in M$ sehingga berlaku:

$$\begin{aligned} X + (-X) &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b_1 \\ 0 & -d_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(e) Diberikan sebarang $X, Y \in M$, berlaku:

$$\begin{aligned} X + Y &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \\ &= Y + X. \end{aligned}$$

Jadi, $\langle M, + \rangle$ merupakan grup Abel.

2. Akan ditunjukkan $\langle M, \cdot \rangle$ merupakan semigrup.

(a) Diberikan sebarang $X, Y \in M$, berlaku:

$$\begin{aligned} XY &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 d_2 \\ 0 & d_1 d_2 \end{bmatrix} \in M. \end{aligned}$$

(b) Diberikan sebarang $X, Y, Z \in M$, berlaku:

$$\begin{aligned} (XY)Z &= \left(\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & b_3 \\ 0 & d_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 d_2 \\ 0 & d_1 d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_3 \\ 0 & d_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 d_2 d_3 \\ 0 & d_1 d_2 d_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
 X(YZ) &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_3 \\ 0 & d_3 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_2 d_3 \\ 0 & d_2 d_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 d_2 d_3 \\ 0 & d_1 d_2 d_3 \end{bmatrix} \in M.
 \end{aligned}$$

3. Berlaku hukum distributif kiri dan hukum distributif kanan, untuk setiap $X, Y, Z \in M$ berlaku:

$$\begin{aligned}
 X \cdot (Y + Z) &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_3 \\ 0 & d_3 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_2 + b_3 \\ 0 & d_2 + d_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 d_2 + b_1 d_3 \\ 0 & d_1 d_2 + d_1 d_3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
 XY + XZ &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_3 \\ 0 & d_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 d_2 \\ 0 & d_1 d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_1 d_3 \\ 0 & d_1 d_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 d_2 + b_1 d_3 \\ 0 & d_1 d_2 + d_1 d_3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 (X + Y)Z &= \left(\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & b_3 \\ 0 & d_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 + b_2 \\ 0 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_3 \\ 0 & d_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 d_3 + b_2 d_3 \\ 0 & d_1 d_3 + d_2 d_3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
 XZ + YZ &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_3 \\ 0 & d_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_3 \\ 0 & d_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 d_3 \\ 0 & d_1 d_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_2 d_3 \\ 0 & d_2 d_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 d_3 + b_2 d_3 \\ 0 & d_1 d_3 + d_2 d_3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Jadi, $\langle M, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

2.4 Hasil Jumlah Langsung (*Direct Sum*) pada Ring

Berikut diberikan definisi hasil jumlah langsung (*direct sum*) pada ring.

Definisi 2.4.1 Diberikan ring $R_1, R_2, \dots, R_n$. R adalah hasil kali kartesian pada himpunan R_i , dengan didefinisikan operasi pada R secara komponen demi komponen, yaitu:

$$\text{i } (r_1, r_2, \dots, r_n) + (s_1, s_2, \dots, s_n) = (r_1 + s_1, r_2 + s_2, \dots, r_n + s_n);$$

$$\text{ii } -(r_1, r_2, \dots, r_n) = (-r_1, -r_2, \dots, -r_n);$$

$$\text{iii } (r_1, r_2, \dots, r_n) \cdot (s_1, s_2, \dots, s_n) = (r_1 \cdot s_1, r_2 \cdot s_2, \dots, r_n \cdot s_n),$$

dengan $(0, 0, \dots, 0)$ sebagai elemen identitas. R disebut jumlahan langsung eksternal dari $R_1, R_2, \dots, R_n$ dan dinotasikan sebagai

$$R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n.$$

(Hartley dan Hawkes, 1970).

Untuk memperoleh pemahaman yang lebih mendalam mengenai konsep hasil jumlah langsung pada ring, pada bagian ini diberikan sebuah contoh yang menggambarkan penerapannya.

Contoh 2.4.2 Diberikan sebarang ring $\mathbb{Z}_2$ dan $\mathbb{Z}_4$, dengan $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Jumlahan langsung dari $\mathbb{Z}_2$ dan $\mathbb{Z}_4$ adalah: $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}\} \oplus \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3})\}$.

2.5 Ring Polinomial

Ring polinomial merupakan himpunan yang terdiri atas semua polinomial dengan koefisien berasal dari suatu ring R . Berikut definisi formal ring polinomial.

Definisi 2.5.1 Diberikan ring R . Himpunan $R[x]$, dinotasikan sebagai himpunan barisan tak hingga $(a_0, a_1, a_2, \dots)$, dengan $a_i \in R$, untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots$ dan terdapat $n \in \mathbb{Z}^+$, sehingga untuk $k \geq n$ berlaku $a_k = 0$. Elemen-elemen $R[x]$ disebut polinomial atas ring.

Operasi penjumlahan dan perkalian pada $R[x]$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} + : R[x] \times R[x] &\rightarrow R[x] \\ (a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) &= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots) \\ \\ \cdot : R[x] \times R[x] &\rightarrow R[x] \\ (a_0, a_1, a_2, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \dots) &= (c_0, c_1, c_2, \dots), \end{aligned}$$

dengan $c_j = \sum_{i=0}^j a_i b_{j-i}$ untuk $j = 0, 1, 2, \dots$

$R[x]$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan ring yang disebut ring polinomial (Dummit dan Foote, 2004).

Jika R adalah ring komutatif, maka $R[x]$ juga komutatif, hal ini disebabkan oleh operasi perkalian pada ring $R[x]$ didasarkan pada komutativitas dari koefisien-koefisien dalam R . Berikut diberikan teorema yang mendukung pembahasan mengenai ring polinomial.

Teorema 2.5.2 Jika R adalah suatu ring komutatif, maka $R[x]$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian polinomial merupakan ring (Apriyani, 2024).

Bukti. Diberikan

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots,$$

dan

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots$$

dengan $a_i, b_i, c_i \in R$ dan $i \in \mathbb{Z}^+$,

Akan dibuktikan $R[x]$ merupakan ring.

1. Diberikan sebarang $f(x), g(x) \in R[x]$, berlaku:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots) + (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \\ &\quad + \cdots) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots \end{aligned}$$

(karena bersifat tertutup terhadap penjumlahan di R)

dengan

$$d_n = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) \in R,$$

sehingga

$$f(x) + g(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n + \cdots \in R[x].$$

2. Diberikan sebarang $f(x), g(x), h(x) \in R[x]$ berlaku:

$$\begin{aligned} [f(x) + g(x)] + h(x) &= [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots] \\ &\quad + (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + \cdots) \\ &= [(a_0 + b_0) + c_0] + [(a_1 + b_1) + c_1]x + \cdots + [(a_n + b_n) + c_n]x^n + \cdots \\ &= [a_0 + (b_0 + c_0)] + [a_1 + (b_1 + c_1)]x + \cdots + [a_n + (b_n + c_n)]x^n + \cdots \\ &= (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots) + [(b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \cdots) + (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + \cdots)] \\ &= f(x) + [g(x) + h(x)]. \end{aligned}$$

3. Diberikan sebarang $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \in R[x]$,
terdapat $0(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots \in R[x]$ sehingga,

$$\begin{aligned} f(x) + 0(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots) + (0 + 0x + 0x^2 + \cdots) \\ &= (a_0 + 0) + (a_1 + 0)x + (a_2 + 0)x^2 + \cdots + (a_n + 0)x^n + \cdots \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama,

$$0(x) + f(x) = f(x).$$

Sehingga, $R[x]$ mempunyai elemen identitas terhadap penjumlahan, yakni $0(x)$.

4. Diberikan sebarang $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \in R[x]$
terdapat $[-f(x)] = (-a_0) + (-a_1)x + (-a_2)x^2 + \cdots + (-a_n)x^n + \cdots \in R[x]$
sehingga,

$$\begin{aligned} f(x) + [-f(x)] &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots) \\ &\quad + [(-a_0) + (-a_1)x + \cdots + (-a_n)x^n + \cdots] \\ &= [a_0 + (-a_0)] + [a_1 + (-a_1)]x + \cdots + [a_n + (-a_n)]x^n \\ &\quad + \cdots \\ &= 0 + 0x + 0x^2 + \cdots \\ &= 0(x), \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} [-f(x)] + f(x) &= [(-a_0) + (-a_1)x + \cdots + (-a_n)x^n + \cdots] \\ &\quad + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots) \\ &= [(-a_0) + a_0] + [(-a_1) + a_1]x + \cdots + [(-a_n) + a_n]x^n \\ &\quad + \cdots \\ &= 0 + 0x + 0x^2 + \cdots \\ &= 0(x). \end{aligned}$$

5. Diberikan sebarang $f(x), g(x) \in R[x]$ berlaku,

$$\begin{aligned}
 f(x) + g(x) &= (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots) + (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \cdots) \\
 &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots \\
 &\quad \text{(karena bersifat komutatif terhadap penjumlahan di } R) \\
 &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + \cdots + (b_n + a_n)x^n + \cdots \\
 &= (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \cdots) + (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots) \\
 &= g(x) + f(x).
 \end{aligned}$$

6. Diberikan sebarang $f(x), g(x), h(x) \in R[x]$ berlaku, $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \in R[x]$.

7. Diberikan sebarang $f(x), g(x), h(x) \in R[x]$ berlaku,

$$\begin{aligned}
 [f(x) \cdot g(x)] \cdot h(x) &= [(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots) \cdot (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n)] \cdot (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + \cdots) \\
 &= [(a_0 \cdot b_0) + (a_1 \cdot b_1)x + \cdots + (a_n \cdot b_n)x^n + \cdots] \cdot (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + \cdots) \\
 &= [(a_0 \cdot b_0) \cdot c_0 + ((a_1 \cdot b_1) \cdot c_1)x + \cdots + ((a_n \cdot b_n) \cdot c_n)x^n + \cdots] \\
 &= [a_0 \cdot (b_0 \cdot c_0) + (a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1))x + \cdots + (a_n \cdot (b_n \cdot c_n))x^n + \cdots] \\
 &= (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots) \cdot [(b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n) \cdot (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + \cdots)] \\
 &= f(x) \cdot [g(x) \cdot h(x)].
 \end{aligned}$$

8. Diberikan sebarang $f(x), g(x), h(x) \in R[x]$ berlaku,

$$(a) \quad f(x)[g(x) + h(x)] = f(x)g(x) + f(x)h(x)$$

$$(b) \quad [f(x) + g(x)]h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x).$$

Karena $R[x]$ memenuhi semua aksioma sebuah ring seperti pada Definisi 2.3.1, maka terbukti $R[x]$ merupakan ring. ■

Untuk memperoleh pemahaman yang lebih mendalam mengenai konsep ring polinomial, pada bagian berikut diberikan sebuah contoh ring polinomial.

Contoh 2.5.3 Diberikan sebarang ring polinomial $\mathbb{Z}[x]$, yang merupakan himpunan semua polinomial dengan koefisien dari ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan variabel x . Akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}[x], +, \cdot \rangle$ merupakan ring polinomial. Diberikan sebarang $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$ dengan

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m, \quad r(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k,$$

dengan $a_i, b_j, c_\ell \in \mathbb{Z}$.

1. Diberikan sebarang $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ berlaku,

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots \in \mathbb{Z}[x],$$

karena $a_i + b_i \in \mathbb{Z}$ untuk setiap i , maka $p(x) + q(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Dengan demikian, $\mathbb{Z}[x]$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.

2. Diberikan sebarang $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$, berlaku:

$$\begin{aligned} (p(x) + q(x)) + r(x) &= ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots) + (c_0 + c_1x + \cdots) \\ &= (a_0 + b_0 + c_0) + (a_1 + b_1 + c_1)x + \cdots, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} p(x) + (q(x) + r(x)) &= (a_0 + (b_0 + c_0)) + (a_1 + (b_1 + c_1))x + \cdots \\ &= (a_0 + b_0 + c_0) + (a_1 + b_1 + c_1)x + \cdots. \end{aligned}$$

Jadi, $(p(x) + q(x)) + r(x) = p(x) + (q(x) + r(x))$.

3. Diberikan sebarang $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$, berlaku

$$p(x) + 0(x) = p(x),$$

dengan $0(x)$ adalah polinomial nol (semua koefisien nol).

4. Diberikan sebarang $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ dengan,

$$-p(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \cdots + (-a_n)x^n.$$

Karena $-a_i \in \mathbb{Z}$ untuk setiap i , maka $-p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Selain itu,

$$\begin{aligned} p(x) + (-p(x)) &= (a_0 + (-a_0)) + (a_1 + (-a_1))x + \cdots + (a_n + (-a_n))x^n \\ &= 0(x). \end{aligned}$$

Sehingga $-p(x)$ adalah invers dari $p(x)$.

5. Diberikan sebarang $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, berlaku:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots \\ &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + \cdots \\ &= q(x) + p(x). \end{aligned}$$

Dengan demikian, $+$ bersifat komutatif.

Selanjutnya, didefinisikan operasi perkalian pada $\mathbb{Z}[x]$. Untuk $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ dan $q(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$, didefinisikan

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k.$$

1. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}[x]$ tertutup terhadap operasi perkalian.

Diberikan sebarang $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, maka koefisien $p(x) \cdot q(x)$ berbentuk $\sum_{i+j=k} a_i b_j$. Karena $a_i, b_j \in \mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap perkalian dan penjumlahan, maka $\sum_{i+j=k} a_i b_j \in \mathbb{Z}$. Jadi $p(x) \cdot q(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

2. Akan ditunjukkan perkalian bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}[x]$.

Diberikan sebarang $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$, berlaku:

$$(p(x) \cdot q(x)) \cdot r(x) = p(x) \cdot (q(x) \cdot r(x)).$$

Hal ini berlaku karena sifat asosiatif dari perkalian di $\mathbb{Z}$ diturunkan ke polinomial. Jadi, perkalian di $\mathbb{Z}[x]$ bersifat asosiatif.

3. Akan ditunjukkan perkalian bersifat komutatif di $\mathbb{Z}[x]$.

Diberikan sebarang $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, berlaku:

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i b_j x^{i+j} \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n b_j a_i x^{j+i} \\ &= q(x) \cdot p(x). \end{aligned}$$

Dengan demikian, perkalian di $\mathbb{Z}[x]$ bersifat komutatif.

4. Akan ditunjukkan terdapat identitas perkalian di $\mathbb{Z}[x]$.

Diberikan sebarang $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$, berlaku:

$$p(x) \cdot 1 = 1 \cdot p(x) = p(x),$$

dengan 1 adalah polinomial konstanta berkoefisien 1. Dengan demikian 1 adalah identitas perkalian di $\mathbb{Z}[x]$.

5. Diberikan sebarang $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$, berlaku

$$\begin{aligned} p(x) \cdot (q(x) + r(x)) &= p(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot r(x), \\ (p(x) + q(x)) \cdot r(x) &= p(x) \cdot r(x) + q(x) \cdot r(x). \end{aligned}$$

Kedua sifat ini berlaku karena distributif di $\mathbb{Z}$ berlaku dan diturunkan ke polinomial.

Dengan demikian, $\langle \mathbb{Z}[x], +, \cdot \rangle$ memenuhi semua aksioma ring komutatif dengan identitas. Oleh karena itu, $\mathbb{Z}[x]$ merupakan ring polinomial.

2.6 Modul atas Ring

Suatu modul atas ring adalah generalisasi dari ruang vektor dengan lapangan (*field*) pada ruang vektor diganti dengan ring yang memiliki identitas dan tak harus komutatif. Berikut diberikan definisi formal modul atas ring.

Definisi 2.6.1 Diberikan sebarang ring R dengan elemen identitas.

1. Modul kiri atas R adalah suatu grup Abel M yang dilengkapi dengan pemetaan

skalar

$$\cdot : R \times M \rightarrow M,$$

dengan (r, m) yang dinotasikan dengan rm , sehingga untuk setiap $r, s \in R$ dan $m, n \in M$ berlaku:

- (a) $(r + s)m = rm + sm$,
- (b) $(rs)m = r(sm)$,
- (c) $r(m + n) = rm + rn$,
- (d) $1m = m$.

2. Modul kanan atas R adalah suatu grup Abel M yang dilengkapi pemetaan skalar

$$\cdot : M \times R \rightarrow M,$$

dengan (r, m) yang dinotasikan dengan mr , sehingga untuk setiap $r, s \in R$ dan $m, n \in M$ berlaku:

- (a) $m(r + s) = mr + ms$,
- (b) $m(rs) = (mr)s$,
- (c) $(m + n)r = mr + nr$,
- (d) $m1 = m$.

(Adkins & Weintraub, 1992).

Untuk memperjelas konsep modul atas ring, berikut diberikan contoh yang dapat membantu memahami struktur tersebut secara lebih mendalam.

Contoh 2.6.2 Diberikan sebarang ring R . Grup Abel R^n merupakan modul kiri atas R terhadap operasi pergandaan skalar:

$$a(r_1, r_2, \dots, r_n) = (ar_1, ar_2, \dots, ar_n),$$

untuk setiap $a \in R$ dan $(r_1, r_2, \dots, r_n) \in R^n$.

Untuk setiap $a, b \in R$ dan $(r_1, r_2, \dots, r_n), (s_1, s_2, \dots, s_n) \in R^n$ berlaku:

1.

$$\begin{aligned}
a((r_1, r_2, \dots, r_n) + (s_1, s_2, \dots, s_n)) &= a(r_1 + s_1, r_2 + s_2, \dots, r_n + s_n) \\
&= (ar_1 + as_1, ar_2 + as_2, \dots, ar_n + as_n) \\
&= (ar_1, ar_2, \dots, ar_n) + (as_1, as_2, \dots, as_n) \\
&= a(r_1, r_2, \dots, r_n) + a(s_1, s_2, \dots, s_n).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(ab)(r_1, r_2, \dots, r_n) &= ((ab)r_1, (ab)r_2, \dots, (ab)r_n) \\
&= (a(br_1), a(br_2), \dots, a(br_n)) \\
&= a(br_1, br_2, \dots, br_n) \\
&= a(b(r_1, r_2, \dots, r_n)).
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
(a + b)(r_1, r_2, \dots, r_n) &= ((a + b)r_1, (a + b)r_2, \dots, (a + b)r_n) \\
&= (ar_1 + br_1, ar_2 + br_2, \dots, ar_n + br_n) \\
&= (ar_1, ar_2, \dots, ar_n) + (br_1, br_2, \dots, br_n) \\
&= a(r_1, r_2, \dots, r_n) + b(r_1, r_2, \dots, r_n).
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
1(r_1, r_2, \dots, r_n) &= (1r_1, 1r_2, \dots, 1r_n) \\
&= (r_1, r_2, \dots, r_n).
\end{aligned}$$

Jadi, R^n merupakan modul kiri atas R .

2.7 Derivasi pada Ring

Sebelum membahas jenis-jenis derivasi berikut ini akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai definisi derivasi pada ring.

Definisi 2.7.1 Diberikan ring R . Suatu fungsi $d : R \rightarrow R$ disebut derivasi pada R jika:

$$1. \ d(a + b) = d(a) + d(b);$$

$$2. d(ab) = d(a)b + ad(b),$$

untuk setiap $a, b \in R$ (Ernanto, 2018).

Untuk memperjelas pemahaman mengenai konsep derivasi dalam struktur aljabar, pada bagian ini diberikan sebuah contoh derivasi pada ring.

Contoh 2.7.2 Diberikan sebarang ring $M_2(\mathbb{Z})$. Dengan didefinisikan pemetaan $d : M_2(\mathbb{Z}) \mapsto M_2(\mathbb{Z})$ dan $d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}$, untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.

Akan diselidiki d merupakan derivasi pada $M_2(\mathbb{Z})$.

Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ dan $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.

Akan ditunjukkan $d(A + B) = d(A) + d(B)$.

$$\begin{aligned} d(A + B) &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(b_1 + b_2) \\ c_1 + c_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -b_1 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b_2 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= d(A) + d(B). \end{aligned}$$

Terbukti bahwa d bersifat aditif.

Akan ditunjukkan bahwa $d(AB) = d(A)B + Ad(B)$.

$$\begin{aligned}
 d(AB) &= d \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) \\
 &= d \left(\begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -(a_1b_2 + b_1d_2) \\ c_1a_2 + d_1c_2 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -a_1b_2 - b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Di sisi lain.

$$\begin{aligned}
 d(A)B + Ad(B) &= d \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} d \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -b_1 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -b_2 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -b_1c_2 & -b_1d_2 \\ c_1a_2 & c_1b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1c_2 & -a_1b_2 \\ d_1c_2 & -c_1b_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -b_1d_2 - a_1b_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -a_1b_2 - b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Terbukti $d(AB) = d(A)B + Ad(B)$, sehingga d memenuhi aturan Leibniz.

Karena d bersifat aditif dan memenuhi aturan Leibniz, maka terbukti d adalah derivasi pada ring $M_2(\mathbb{Z})$.

2.8 Bi-Derivasi Pada Ring

Bi-derivasi merupakan suatu derivasi yang bersifat bi-aditif dan memenuhi aksioma tertentu. Berikut definisi dari pemetaan bi-aditif.

Definisi 2.8.1 Fungsi $\lambda : R \times R \rightarrow R$ disebut bi-aditif jika bersifat aditif dalam setiap pernyataan, yaitu:

1. $\lambda(u + w, v) = D(u, v) + D(w, v);$
2. $\lambda(u, v + w) = D(u, v) + D(u, w),$ untuk setiap $u, v, w \in R.$

(Ali dkk., 2024).

Berikut akan dibahas contoh pemetaan pada suatu ring yang bersifat bi-aditif.

Contoh 2.8.2 Diberikan sebarang ring R . Pemetaan aditif $\lambda : R \times R \rightarrow R$ didefinisikan sebagai: $\lambda(u, v) = uv + vu$ Akan ditunjukkan λ merupakan derivasi yang bersifat bi-aditif.

1. Diberikan sebarang $u, v, w \in R$, diperoleh:

$$\begin{aligned}\lambda(u + w, v) &= (u + w)v + v(u + w) \\ &= uv + wv + vu + vw \\ &= uv + vu + wv + vw.\end{aligned}$$

2. Diberikan sebarang $u, v, w \in R$, diperoleh:

$$\begin{aligned}\lambda(u, v + w) &= u(v + w) + (v + w)u \\ &= uv + uw + vu + wu \\ &= uv + vu + uw + wu.\end{aligned}$$

Dari 1 dan 2 terbukti λ bersifat bi-aditif.

Setelah sifat bi-aditif diperkenalkan dan dipahami, pembahasan dapat dilanjutkan pada konsep yang lebih spesifik, yaitu bi-derivasi. Definisi bi-derivasi ini menjadi langkah penting karena memberikan dasar formal untuk memahami bagaimana sifat bi-aditif dapat diperluas dan diaplikasikan dalam struktur aljabar yang lebih kompleks, sehingga konsep tersebut tidak hanya bersifat teoretis, tetapi juga dapat digunakan sebagai fondasi bagi kajian lebih lanjut dalam teori aljabar.

Definisi 2.8.3 Diberikan sebarang ring R . Suatu pemetaan bi-aditif $\lambda : R \times R \rightarrow R$ disebut bi-derivasi pada R jika λ memenuhi:

1. $\lambda(xy, z) = \lambda(x, z)y + x\lambda(y, z)$,
2. $\lambda(x, yz) = \lambda(x, y)z + y\lambda(x, z)$.

(Salhi, 2018).

Untuk memperdalam pemahaman konseptual mengenai bi-derivasi, pada bagian berikut diberikan suatu contoh bi-derivasi.

Contoh 2.8.4 Diberikan sebarang ring $M = \left\{ \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \mid \mu, \tau \in \mathbb{Z} \right\}$. Didefinisikan $\lambda : M \times M \rightarrow M$ dengan $\lambda \left(\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_1\mu_2 & 0 \end{bmatrix}$.

Akan ditunjukkan λ merupakan bi-derivasi pada ring M .

Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \mu_3 & 0 \\ \tau_3 & 0 \end{bmatrix} \in M$ dan $r \in \mathbb{Z}$.

1. Akan ditunjukkan $\lambda(A + B, C) = \lambda(A, C) + \lambda(B, C)$.

$$\begin{aligned}
 \lambda(A + B, C) &= \lambda \left(\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_3 & 0 \\ \tau_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \lambda \left(\begin{bmatrix} \mu_1 + \mu_2 & 0 \\ \tau_1 + \tau_2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_3 & 0 \\ \tau_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_1\mu_3 + \tau_2\mu_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_1\mu_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_2\mu_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \lambda(A, C) + \lambda(B, C).
 \end{aligned}$$

2. Akan ditunjukkan $\lambda(A, B + C) = \lambda(A, B) + \lambda(A, C)$.

$$\begin{aligned}
 \lambda(A, B + C) &= \lambda \left(\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_3 & 0 \\ \tau_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \lambda \left(\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_2 + \mu_3 & 0 \\ \tau_2 + \tau_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_1 \mu_2 + \tau_1 \mu_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_1 \mu_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_1 \mu_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \lambda(A, B) + \lambda(A, C).
 \end{aligned}$$

3. Akan ditunjukkan $\lambda(AB, C) = \lambda(A, C)B + A\lambda(B, C)$.

$$\begin{aligned}
 \lambda(AB, C) &= \lambda \left(\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_3 & 0 \\ \tau_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \lambda \left(\begin{bmatrix} \mu_1 \mu_2 & 0 \\ \tau_1 \mu_2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_3 & 0 \\ \tau_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_1 \mu_2 \mu_3 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
 &\lambda(A, C)B + A\lambda(B, C) \\
 &= \lambda \left(\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_3 & 0 \\ \tau_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix} \lambda \left(\begin{bmatrix} \mu_2 & 0 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_3 & 0 \\ \tau_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_1 \mu_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_2 \mu_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_1 \mu_3 \mu_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_1 \mu_3 \mu_2 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

4. Akan ditunjukkan $\lambda(A, BC) = \lambda(A, B)C + B\lambda(A, C)$.

$$\begin{aligned}
 \lambda(A, BC) &= \lambda \left(\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_3 & 0 \\ \tau_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \lambda \left(\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_2\mu_3 & 0 \\ \tau_2\tau_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_1\mu_2\mu_3 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
 &\lambda(A, B)C + B\lambda(A, C) \\
 &= \lambda \left(\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mu_3 & 0 \\ \tau_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix} \lambda \left(\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_3 & 0 \\ \tau_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_1\mu_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_3 & 0 \\ \tau_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 \\ \tau_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_1\mu_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_1\mu_2\mu_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_1\mu_2\mu_3 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

BAB III

METODE PENELITIAN

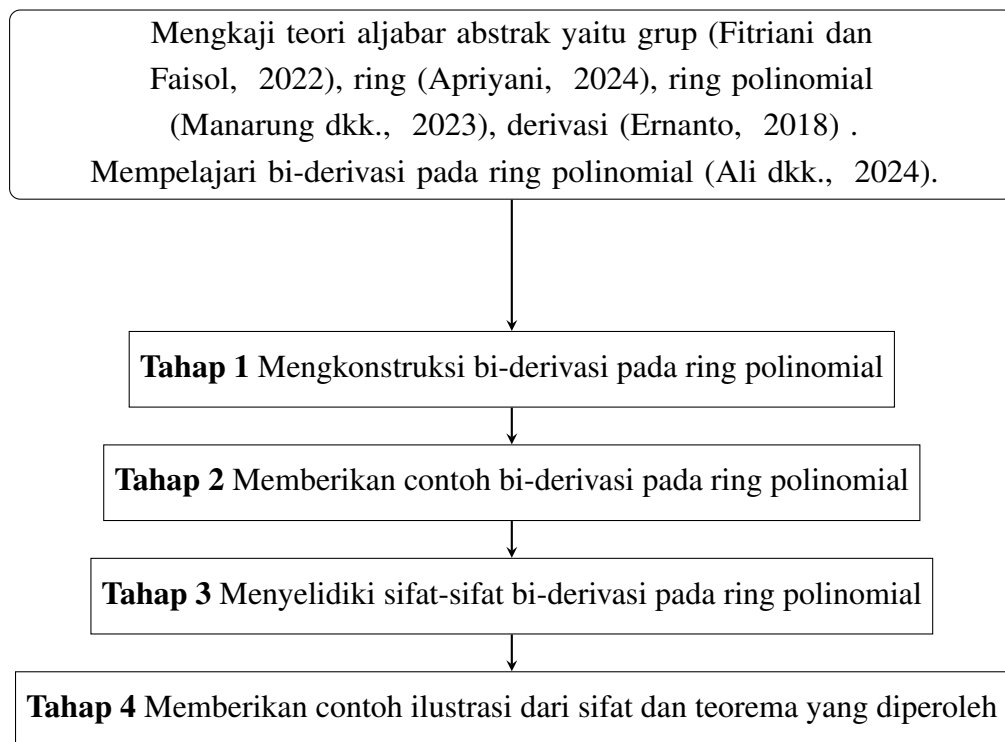
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester genap tahun ajaran 2024/2025 di Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur dan analisis teoritis, dengan mengumpulkan referensi seperti jurnal, artikel ilmiah, buku, dan sumber lainnya yang terkait dengan penelitian ini. Secara umum langkah-langkah penelitian ini sebagai berikut.

1. Mempelajari materi grup, ring, ring polinomial, derivasi, dan bi-derivasi pada ring polinomial.
2. Mengkontruksi bi-derivasi pada ring polinomial.
3. Memberikan contoh bi-derivasi pada ring polinomial.
4. Menyelidiki sifat-sifat bi-derivasi pada ring polinomial.
5. Memberikan contoh ilustrasi dari sifat dan teorema yang diperoleh.



Gambar 3.1 Diagram tahapan penelitian

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa bi-derivasi merupakan suatu pemetaan $\lambda : R \times R \rightarrow R$ yang bersifat bi-aditif dan memenuhi $\lambda(xy, z) = \lambda(x, z)y + x\lambda(y, z)$ dan $\lambda(x, yz) = \lambda(x, y)z + y\lambda(x, z)$, untuk setiap $x, y, z \in R$. Pada ring polinomial $R[x]$, bi-derivasi dikonstruksi dengan memperluas sifat bi-aditif dari ring dasar R terhadap koefisien-koefisien polinomial. Hal ini menunjukkan bahwa apabila suatu ring R memiliki bi-derivasi, maka ring polinomial $R[x]$ juga memiliki bi-derivasi dengan sifat yang sama, sehingga struktur polinomial tetap mempertahankan karakter dasar dari bi-derivasi.

Penelitian ini menunjukkan bahwa himpunan dari suatu bi-derivasi dan himpunan konstanta suatu bi-derivasi membentuk $\mathbb{Z}$ -modul. Pada konteks ring polinomial, ditunjukkan bahwa bentuk dan struktur ring memengaruhi cara bi-derivasi bekerja terhadap elemen-elemennya, khususnya dalam kaitannya dengan operasi penjumlahan dan perkalian. Dengan demikian, sifat-sifat bi-derivasi yang telah diperoleh tidak hanya bersifat teoritis, tetapi juga memberikan pemahaman yang lebih jelas mengenai perilaku dan peran bi-derivasi dalam struktur ring polinomial.

5.2 Saran

Penelitian mengenai bi-derivasi pada ring polinomial diharapkan dapat dikembangkan lebih lanjut pada struktur aljabar lain seperti ring matriks, ring faktor, atau modul atas ring, serta dikaji secara lebih aplikatif dengan mengaitkannya pada bidang-bidang lain seperti aljabar Lie dan sistem dinamik aljabar. Kajian lanjutan juga dapat memanfaatkan pendekatan komputasional untuk menguji sifat-sifat bi-derivasi pada polinomial berdimensi tinggi, sehingga hasilnya dapat memperkuat teori dan memperluas penerapan konsep bi-derivasi dalam matematika modern.

DAFTAR PUSTAKA

- Adkins, W. A., & Weintraub, S. H. 1992. *Algebra: An approach via module theory*. Springer-Verlag.
- Ali, S., Rafiquee, N. N., & Varshney, V. 2024. Certain Types of Derivation in Rings: A Suvey. *Journal Indonesia Math. Soc.* vol 30. 2:256-306.
- Apriyani, D. C. N. 2024. *Buku Ajar Teori Ring*. Pacitan: LPPM Press STKIP PGRI Pacitan.
- Ashraf, M., Rehman, N. u., Ali, S., & ozumder, M.R. 2010. On generalized (σ, τ) - biderivations in rings. *Asian-European Journal of Mathematics*, 1(1), 1-14.
- Ayupov, S., & Yusupov, B. 2020. 2-local Derivations of Infinite-dimensional Lie Algebras. *Journal of Algebra and Its applications*, 19(05), 2050010.
- De Filippis, V., Tiwari, S.K, & Singh, S.K. 2021. Generalized g-derivations on prime rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, 22(2), 2350037.
- Dhara, B., & Sharma, R. K. 2009. On additive mappings in ring with identity element. *International Mathematical Forum*, 4(15), 727-732.
- Dummit, D. S., dan Foote, R. M. 2004. *Abstract Algebra*. Jhon Wiley & Sons, New Jersey.
- Ernanto, I. 2018. Sifat-sifat ring faktor yang dilengkapi derivasi. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 1(1), 12-21.
- Faisol, A., & Fitriani, F. 2025. A study of derivations and linear mappings on skew generalized power series modules. *BAREKENG: Journal of Mathematics and Its Applications*, 19(4), 3047–3058. <https://doi.org/10.30598/barekengvol19iss4pp3047-3058>
- Faraj, A. K., Hadi, L. A. A., Abduldaim, A. M., & Salman, S. A. 2023. Symmetric generalized bi-derivations with prime ideals. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 18(4), 675–684.

- Fitriani, & Faisol, A. 2022. *Grup*. Matematika, Yogyakarta.
- Fitriani, Wijayanti, I.E, Faisol, A, & Ali, S. 2024. On f -derivations on polynomial modules. *J. Algebr. its Appl.*, vol. 24, no. 6, pp. 1–14, 2024, doi: 10.1142/S0219498825501555.
- Fitriani, F., Wijayanti, I. E., Faisol, A., & Ali, S. 2025. Commuting and centralizing maps on modules. *Science and Technology Indonesia*, 10(3), 630–637. <https://doi.org/10.26554/sti.2025.10.3.630-637>.
- Hartley, B., & Hawkes, T.O. 1970. *Rings, Modules, and Linear Algebra*. Inggris: Cambridge University Press.
- Hidayati, N.A., Agung, M., & hidayah, I.N. 2022. Sufficient Condition of Symmetric Biderivation on Prime Ring to be Commutative Ring. *AIP conference Proceedings*, 2639(1).
- Huang, J., Kudaybergenov, K., & Sukochev, F. (2023). Ring Derivations of Murray–von Neumann algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 672(1), 28-52.
- Hungerford, T. W. 1974. *Algebra*. Springer, New York.
- Khalaf, A. A., Artemovych, O. D., & Taha, I. 2018. Rings with Simple Lie Rings of Lie and Jordan Derivation. *Journal of Algebra and Its applications*, 17(4), 1850078.
- Khalaf, A. A., Artemovych, O. D., & Taha, I. 2018. Derivations in differentially prime rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, 17(7), 1850129.
- Khan, S., Park, C., & Donmangon, M. (2024). The stability of bi-derivations and bihomomorphisms in Banach algebras. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 35, 482–491.
- Kuzucuoğlu, F., & sayin, U. 2017. Derivation of Some Classes of Matrix rings, *Journal of Algebra and Its Applications*, 16(2), 1750027.
- Kuzucuoğlu, F. 2011. Jordan derivations on strictly triangular matrix rings. *Algebra Colloquium*, 18(3), 519–522.
- Manurung, S. L., Purba, G. I. D., & Harliana, P. 2023. *Struktur aljabar*. Deepublish.
- Muniri. 2016. *Struktur aljabar*. Yogyakarta: Kalimedia.

- Murty, V. S. V. K., & Reddy, C. J. S. 2024. Orthogonal generalized symmetric reverse biderivations in semi prime rings. *Journal of Applied & Pure Mathematics*, 6(3–4), 155–165.
- Rasiman, R., Rubowo, M. R & Pramastyahsari. A. S. 2018. *Teori Ring*. Semarang: UNIV. PGRI Semarang Press.
- Reddy, B.R., & Reddy, C. J. S. 2018. Commutativity of Prime rings with Symmetric Biderivations. *Discussiones Mathematicae General algebra and Applications*, 38(2), 221-226.
- Sahai, M., & Ansari, S. F. 2022. Derivations and Centralizers in Rings. *Palestine Journal of Mathematics*, 11(2), 413-419.
- Sayin, U., & Kuzucouğlu, F. 2019. Jordan Derivations of Special Subrings of Matrix rings. *Algebra Colloquium*, 26(1), 83-92.
- Salhi, S. 2018. A note on bi-derivations of $\star$ - prime rings. *Int. J. Open Problems Compt. Math*, 11(4), 61-71.
- Shujat, F. 2018. Symmetric Generalized Biderivations on Prime Rings . *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica* , 38(s), 00-00.
- Sitompul, D. E., Fitriani, F., Chasanah, S. L., & Faisol, A. 2025. Jordan derivation on the polynomial ring $R[x]$. *Integra: Journal of Integrated Mathematics and Computer Science*, 2(2), 41–47.
- Thomas, A. B., Puspita, N. P., & Fitriani, F. 2024. Derivation on Several Rings. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 18(3), 1729-1738.
- Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, d. A., & Hartanto, A. d. 2016 *Teori ring dan modul*. UGM Press, Yogyakarta.
- Waluyo, R., Faisol, A., & Fitriani, F. 2025. (σ, τ) -Derivasi pada ring grup. *Euler: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, 13(2), 142–146. <https://doi.org/10.37905/euler.v13i2.31564>.