

**PERBANDINGAN AKURASI METODE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON
DAN METODE RUNGE-KUTTA-FEHLBERG DALAM MEMPREDIKSI
JUMLAH PENDUDUK MISKIN DI PROVINSI LAMPUNG
MENGUNAKAN PERSAMAAN LOGISTIK**

(SKRIPSI)

Oleh

**Gita Cahyani
NPM. 2217031019**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

ABSTRACT

COMPARISON THE ACCURACY OF THE ADAMS-BASHFORTH -MOULTON AND RUNGE-KUTTA-FEHLBERG METHOD IN PREDICTING THE NUMBER OF POOR POPULATION IN LAMPUNG PROVINCE USING THE LOGISTIC EQUATIONS

By

Gita Cahyani

This study aims to compare the accuracy of the Adams-Bashforth-Moulton and the Runge-Kutta-Fehlberg method in predicting the number of poor population in Lampung Province using the logistic equations. Numerical calculations were carried out with the same step size, namely $h = 0.01$ for the period September 2022 to September 2047. The results show that both methods are able to produce almost similar prediction values and are close to the actual data, but the Runge-Kutta-Fehlberg method produces values that tend to be lower than the Adams-Bashforth-Moulton method, so it is considered more accurate in predicting the number of poor population in Lampung Province.

Keywords: Logistic Equation, Adams-Bashforth-Moulton Method, Runge-Kutta-Fehlberg Method, Number of Poor Population.

ABSTRAK

PERBANDINGAN AKURASI METODE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON DAN METODE RUNGE-KUTTA-FEHLBERG DALAM MEMPREDIKSI JUMLAH PENDUDUK MISKIN DI PROVINSI LAMPUNG MENGUNAKAN PERSAMAAN LOGISTIK

Oleh

Gita Cahyani

Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan akurasi metode Adams-Bashforth-Moulton dan metode Runge-Kutta-Fehlberg dalam memprediksi jumlah penduduk miskin di Provinsi Lampung menggunakan persamaan logistik. Perhitungan numerik dilakukan dengan ukuran langkah yang sama, yaitu $h = 0,01$ pada periode September 2022 hingga September 2047. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kedua metode mampu menghasilkan nilai prediksi yang hampir serupa dan mendekati data aktual, namun metode Runge-Kutta-Fehlberg menghasilkan nilai yang cenderung lebih rendah dibandingkan metode Adams-Bashforth-Moulton, sehingga dinilai lebih akurat dalam memprediksi jumlah penduduk miskin di Provinsi Lampung.

Kata-kata kunci: Persamaan Logistik, Metode Adams-Bashforth-Moulton, Metode Runge-Kutta-Fehlberg, Jumlah Penduduk Miskin.

**PERBANDINGAN AKURASI METODE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON
DAN METODE RUNGE-KUTTA-FEHLBERG DALAM MEMPREDIKSI
JUMLAH PENDUDUK MISKIN DI PROVINSI LAMPUNG
MENGUNAKAN PERSAMAAN LOGISTIK**

Oleh

Gita Cahyani

Skripsi

**Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA**

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

Judul Skripsi

: **PERBANDINGAN AKURASI METODE
ADAMS-BASHFORTH-MOULTON DAN
METODE RUNGE-KUTTA-FEHLBERG
DALAM MEMPREDIKSI JUMLAH
PENDUDUK MISKIN DI PROVINSI
LAMPUNG MENGGUNAKAN PERSAMAAN
LOGISTIK**

Nama Mahasiswa

: **Gita Cahyani**

Nomor Pokok Mahasiswa

: **2217031019**

Program Studi

: **Matematika**

Fakultas

: **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



Dorra

Dra. Durratun Aziz, M.Si.
NIP. 196101281988112001

Agus Sutrisno

Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.
NIP. 197008311999031002

2. Ketua Jurusan Matematika

Aang Nuryaman

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

I. Tim Penguji

Ketua

: **Dra. Dorrah Azis, M.Si.**

Dorra

Sekretaris

: **Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**

Agus

Penguji

Bukan Pembimbing : **Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.**

Tiryo

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.

NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 27 Januari 2026

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Gita Cahyani**
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031019**
Jurusan : **Matematika**
Judul Skripsi : **Perbandingan Akurasi Metode Adams
Bashforth Moulton dan Metode Runge
Kutta Fehlberg dalam Memprediksi Jumlah
Penduduk Miskin di Provinsi Lampung
Menggunakan Persamaan Logistik**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 27 Januari 2026

Penulis,



Gita Cahyani
NPM. 2217031019

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Gita Cahyani lahir di Bandar Lampung pada tanggal 5 Agustus 2004. Penulis merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara, putri dari pasangan Alm. Bapak Suyadi dan Ibu Triswati. Penulis memiliki kakak dan mba bernama Angga Yudistira dan Yossie Indriana.

Penulis memulai pendidikan taman kanak-kanak di TK Sejahtera 1 pada tahun 2009-2010. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan sekolah dasar di SD Sejahtera 1 pada tahun 2010-2013 dan pindah sekolah ke SDN 1 Sukamenanti pada tahun 2013-2016. Selanjutnya, penulis menempuh pendidikan sekolah menengah pertama di SMPN 8 Bandar Lampung pada tahun 2016-2019, dan menyelesaikan pendidikan sekolah menengah atas di SMA Muhammadiyah 2 Bandar Lampung pada tahun 2019-2022.

Pada tahun 2022, penulis melanjutkan pendidikan Strata Satu (S1) di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN). Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Matematika (Himatika) FMIPA Unila Periode 2023 sebagai Anggota Biro Dana dan Usaha.

Sebagai bentuk pengaplikasian bidang ilmu di dunia kerja, pada tanggal 23 Desember 2024 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Dinas Ketahanan Pangan, Tanaman Pangan dan Hortikultura Provinsi Lampung selama 40 hari sampai dengan tanggal 31 Januari 2025 di Bidang Prasarana dan Sarana Pertanian. Dan ditahun yang sama pada tanggal 16 Juli 2025 sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Kelurahan Way Laga, Kecamatan Sukabumi, Kota Bandar Lampung, sampai dengan tanggal 24 Agustus 2025.

KATA INSPIRASI

”Bisa jadi kamu membenci sesuatu, padahal ia baik bagimu; dan bisa jadi kamu menyukai sesuatu, padahal ia buruk bagimu. Padahal Allah mengetahui, sedang kamu tidak mengetahui.”

(Q.S Al-Baqarah 2:216)

”Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya.”

(Q.S Al-Baqarah 2:286)

”Setelah kamu ditimpa kesedihan, kemudian Dia menurunkan rasa aman kepadamu (berupa) kantuk yang meliputi segolongan dari kamu, sedangkan segolongan lagi telah mencemaskan diri mereka sendiri.”

(Q.S Ali-Imran 3:154)

”Dan bagaimana engkau akan dapat bersabar atas sesuatu, sedang engkau belum mempunyai pengetahuan yang cukup tentang hal itu?”

(Q.S Al-Kahfi 18:68)

”Dan aku menyerahkan urusanku kepada Allah. Sungguh, Allah Maha Melihat akan hamba-hamba-Nya.”

(Q.S Ghafir 40:44)

”Setiap bencana yang menimpa di bumi dan yang menimpa dirimu sendiri, semuanya telah tertulis dalam kitab (Lauh Mahfuz) sebelum Kami mewujudkannya.

Sungguh, yang demikian itu mudah bagi Allah.”

(Q.S Al-Hadid 57:22)

”Dialah yang menjadikan bumi untuk kamu yang mudah dijelajahi, maka jelajahilah di segala penjurunya dan makanlah sebagian dari rezeki-Nya. Dan hanya kepada-Nya lah kamu (kembali setelah) dibangkitkan.”

(Q.S Al-Mulk 67:15)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah Rabbil 'Alamin

Dengan mengucapkan puji dan syukur atas kehadiran Allah Subhanahu Wa Ta'ala karena atas limpahan rahmat dan karunia-Nya, skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Tak lupa shalawat beserta salam semoga senantiasa tercurah kepada Nabi Muhammad Shalallahu Alaihi Wasallam. Dengan rasa syukur dan bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Ibu Tercinta

Terimakasih karena senantiasa memberikan kasih sayang, cinta, perhatian, pengorbanan, dukungan, nasihat, motivasi, semangat dan doa yang tiada henti sampai detik ini. Karena atas ikhtiar serta tawakkal ayah dan ibu, saya berhasil sampai ke tahap ini. Terimakasih telah menjadi orang tua yang sangat hebat, yang telah memberikan pelajaran dan pengalaman berharga kepada saya tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya. Terakhir, terimakasih karena selalu menjadi tempat pulang ternyaman.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu dalam pengerjaan skripsi ini, memberikan masukan, saran, motivasi, arahan dan ilmu yang berharga, serta selalu sabar dalam membimbing penulis.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada seluruh orang-orang baik yang telah memberikan semangat, motivasi, doa serta senantiasa memberikan dukungan dan bantuan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur atas kehadiran Allah SWT. karena atas limpahan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Perbandingan Akurasi Metode Adams Bashforth Moulton dan Metode Runge Kutta Fehlberg dalam Memprediksi Jumlah Penduduk Miskin di Provinsi Lampung Menggunakan Persamaan Logistik" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dra. Dorrah Azis, M.Si. selaku dosen Pembimbing 1 yang selalu meluangkan waktu dengan sabar untuk memberikan masukan, arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sepanjang proses penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku dosen Pembimbing 2 yang telah memberikan arahan, dukungan, serta bimbingan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D. selaku dosen Pembahas yang telah bersedia memberikan saran, kritik, serta evaluasi yang membangun kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
4. Bapak Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc. selaku dosen Pembimbing Akademik.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Seluruh guru TK, SD, SMP, dan SMA yang telah mengajarkan dan memberikan ilmu hingga penulis bisa menduduki bangku perkuliahan.
9. Alm. Ayah dan Ibu yang senantiasa memberikan kasih sayang, cinta, perhatian, pengorbanan, dukungan, nasihat, motivasi, semangat dan doa yang tiada henti, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
10. Kakak dan Mba yang selalu memberikan arahan, bimbingan dan dukungan serta selalu menjadi motivasi penulis.
11. Bataviers, Silvi dan Balqis yang sudah mengenal, berteman baik dan menemani perjalanan hidup penulis sedari SMP serta telah mengetahui baik-buruknya penulis, namun tetap memakluminya.
12. Teman-teman dekat selama masa perkuliahan, Novi, Kiki dan Nawang atas kesediaannya untuk selalu mendengarkan, menemani senang dan susahny penulis, sekaligus menghibur penulis sehingga membuat dunia perkuliahan ini menjadi saat menyenangkan.
13. Biro Danus Himatika FMIPA Unila Periode 2023, Bang Jumi, Yunda Anggun, Meli, Shintia, Afina, Risty, Selvi, Pretty, Ulfa, Titah, Ira, Coky, Guan dan Udin yang sudah memberikan penulis pengalaman dan pembelajaran hidup paling berharga di Himatika.
14. KKN Kelurahan Way Laga, Muthia, Risma, Shafa, Dika, Alif dan Jibril atas kebersamaannya selama KKN, yang telah menjadi rumah kedua dan ternyaman bagi penulis.
15. Teman-teman Matematika angkatan 2022 atas bantuan dan kebersamaan yang diberikan selama menempuh pendidikan di Universitas Lampung.
16. Seluruh pihak terkait yang telah membantu dan memberikan dukungan kepada penulis yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.
17. Dan yang terakhir, kepada diri saya sendiri. Terimakasih karena sudah bertahan sampai hari ini. Terimakasih karena tetap menjadi manusia yang selalu

memilih berusaha dan tidak menyerah sesulit apapun perjalanan hidup, walau seringkali merasa putus asa atas apa yang selalu diusahakan namun belum berhasil. Terimakasih atas segala usaha, ketekunan, dan perjuangan yang telah dilakukan untuk selama proses penyusunan skripsi ini sampai bisa menyelesaikannya sebaik dan semaksimal mungkin. Terima kasih karena selalu merayakan diri sendiri.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 27 Januari 2026
Penulis,

Gita Cahyani
NPM. 2217031019

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR GAMBAR	xv
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Tujuan Penelitian	2
1.3 Manfaat Penelitian	2
II TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Persamaan Diferensial Biasa	4
2.2 Model Logistik	5
2.3 Metode Numerik	6
2.4 Galat (<i>Error</i>)	7
2.5 Metode Runge-Kutta	9
2.6 Metode Adams-Bashforth-Moulton	12
2.7 Metode Runge-Kutta-Fehlberg	16
2.8 Tingkat Kemiskinan di Provinsi Lampung	17
III METODE PENELITIAN	21
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	21
3.2 Data Penelitian	21
3.3 Tahapan Penelitian	21
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	24
4.1 Data Jumlah Penduduk Miskin Provinsi Lampung	24
4.2 Formulasi Model Persamaan Logistik pada Penduduk Miskin	25
4.3 Penyelesaian Numerik Metode Adams-Bashforth-Moulton	26
4.3.1 Penentuan Empat Nilai Solusi Awal dengan Metode Runge-Kutta Orde Empat	26
4.3.2 Penyelesaian Prediktor dengan Metode Adams-Bashforth	30
4.3.3 Penyelesaian Korektor dengan Metode Adams-Moulton	31
4.3.4 Kriteria Konvergensi pada Metode Adams-Bashforth-Moulton	32
4.3.5 Perhitungan Numerik Metode Adams-Bashforth-Moulton	32

4.4	Penyelesaian Numerik Metode Runge-Kutta-Fehlberg	35
4.4.1	Perhitungan Koefisien $k_1 - k_6$	35
4.4.2	Perhitungan Solusi Orde Empat dan Orde Lima	37
4.4.3	Analisis Galat pada Metode Runge-Kutta-Fehlberg	38
4.4.4	Perhitungan Numerik Metode Runge-Kutta-Fehlberg	38
4.5	Perbandingan Hasil Metode Adams-Bashforth-Moulton dan Metode Runge-Kutta-Fehlberg	41
V	KESIMPULAN DAN SARAN	44
5.1	Kesimpulan	44
5.2	Saran	44
	DAFTAR PUSTAKA	45
	LAMPIRAN	47

DAFTAR TABEL

2.1	Empat Nilai Awal dengan Metode Runge-Kutta Orde Empat	14
2.2	Perhitungan Numerik dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton .	16
2.3	Jumlah Penduduk Miskin di Kab/Kota Lampung Tahun 2021-2025 (Ribuan Jiwa)	19
2.4	Persentase Penduduk Miskin Provinsi Lampung Tahun 2014-2025 .	20
4.1	Jumlah Penduduk Miskin Provinsi Lampung Tahun 2022-2025 . . .	24
4.2	Hasil Perhitungan Numerik Metode Adams-Bashforth-Moulton . .	33
4.3	Hasil Perhitungan Numerik Metode Runge-Kutta-Fehlberg	39
4.4	Perbandingan Hasil Numerik Metode Adams-Bashforth-Moulton dan Metode Runge-Kutta-Fehlberg	42

DAFTAR GAMBAR

4.1	Hasil Perhitungan Numerik Metode Adams-Bashforth-Moulton . .	35
4.2	Hasil Perhitungan Numerik Metode Runge-Kutta-Fehlberg	41

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam pembangunan nasional, kemiskinan merupakan permasalahan utama. Menurut Badan Perencanaan Pembangunan Nasional (Bappenas, 2004), kemiskinan adalah suatu keadaan ketika individu atau kelompok tidak dapat memenuhi kebutuhan dasar untuk menjalani kehidupan yang layak, seperti layanan kesehatan, pekerjaan, pendidikan, kebutuhan pangan, air bersih, tempat tinggal, kepemilikan tanah, lingkungan yang sehat, perlindungan dari tindak kekerasan baik fisik maupun psikologis, serta kesempatan untuk berpartisipasi dalam masyarakat.

Secara konseptual, terdapat tiga faktor utama yang memengaruhi terjadinya kemiskinan, yaitu ketidaksetaraan dalam kepemilikan aset, kualitas sumber daya manusia yang rendah, dan keterbatasan akses terhadap modal (Sharp et al. dalam Hervás & Millares, 2004). Ketiga faktor ini saling berkaitan dan menciptakan *vicious circle of poverty* (lingkaran setan kemiskinan), sebagaimana diungkapkan oleh (Ragnar Nurkse, 1953) bahwa rendahnya produktivitas, pendapatan dan investasi menyebabkan terus berulangnya siklus kemiskinan.

Dibandingkan dengan daerah lain di Indonesia maupun di Pulau Sumatera, kemiskinan di Provinsi Lampung masih cukup tinggi. Berdasarkan data dari (BPS Provinsi Lampung, 2025), meskipun persentase penduduk yang hidup dibawah garis kemiskinan telah mengalami penurunan dalam satu dekade terakhir, namun kondisi ini tetap menunjukkan bahwa Provinsi Lampung masih menghadapi tantangan besar secara signifikan dalam menurunkan angka kemiskinan. Oleh karena itu, diperlukan analisis mendalam mengenai perubahan jumlah penduduk yang mengalami kemiskinan dari waktu ke waktu.

Salah satu pendekatan yang dapat diterapkan adalah pemodelan matematika melalui persamaan diferensial. Model logistik adalah jenis persamaan diferensial non-linear

yang biasa digunakan untuk memodelkan pertumbuhan penduduk serta variasi dalam jumlah penduduk miskin, karena mampu merepresentasikan kapasitas daya dukung (*carrying capacity*). Namun, umumnya sulit untuk mendapatkan solusi analitik dari persamaan diferensial non-linear, sehingga diperlukan metode numerik untuk menghasilkan solusi pendekatan.

Beberapa metode numerik yang sering digunakan dalam penyelesaian persamaan diferensial non-linear, diantaranya metode Adams-Bashforth-Moulton dan metode Runge-Kutta-Fehlberg. Metode Adams-Bashforth-Moulton adalah metode *multi-step* yang memberikan hasil cukup akurat tanpa membutuhkan pencarian turunan fungsi sebelumnya, melainkan langsung menggunakan pendekatan prediktor-korektor. Sementara itu, metode Runge-Kutta-Fehlberg adalah metode Runge-Kutta orde empat dengan tingkat ketelitian atau akurasi hingga orde lima sehingga efektif dalam memodelkan perubahan solusi yang tidak selalu stabil.

Beberapa penelitian terdahulu telah membahas mengenai penerapan metode numerik dalam menyelesaikan persamaan diferensial untuk memodelkan pertumbuhan penduduk. Penelitian oleh (Ruby, dkk., 2025) menerapkan metode Adams-Bashforth-Moulton pada persamaan logistik untuk memprediksi pertumbuhan penduduk di Provinsi Banten, serta penelitian oleh (Syarfiah, dkk., 2024) menerapkan metode Runge-Kutta-Fehlberg untuk memprediksi pertumbuhan penduduk di Provinsi Sulawesi Barat. Hasil kedua penelitian tersebut membuktikan bahwa metode numerik efektif dalam memberikan estimasi pertumbuhan penduduk. Dengan demikian, penelitian ini berfokus pada perbandingan akurasi metode Adams-Bashforth-Moulton dan metode Runge-Kutta-Fehlberg dalam memprediksi jumlah penduduk miskin di Provinsi Lampung menggunakan persamaan logistik.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan tingkat akurasi metode Adams-Bashforth-Moulton dan metode Runge-Kutta-Fehlberg dalam memprediksi jumlah penduduk miskin di Provinsi Lampung untuk tahun mendatang menggunakan persamaan logistik.

1.3 Manfaat Penelitian

1. Bagi penulis

Penelitian ini bermanfaat dalam menambah wawasan penulis mengenai penerapan metode numerik pada permasalahan nyata, khususnya metode Adams-Bashforth-Moulton dan metode Runge-Kutta-Fehlberg dalam memprediksi jumlah penduduk miskin di Provinsi Lampung menggunakan persamaan logistik.

2. Bagi instansi atau pemerintah daerah

Penelitian ini dapat memberikan informasi mengenai jumlah penduduk miskin di Provinsi Lampung yang berfungsi sebagai landasan dalam pengambilan keputusan kebijakan terkait isu kependudukan, pendidikan, kesehatan serta kesejahteraan masyarakat.

3. Bagi universitas atau akademisi

Penelitian ini dapat menambah referensi ilmiah dan literatur akademik mengenai penerapan metode Adams-Bashforth-Moulton dan metode Runge-Kutta-Fehlberg dalam memprediksi jumlah penduduk miskin, serta sebagai sumber pembelajaran atau bahan rujukan bagi mahasiswa maupun peneliti yang tertarik meneliti permasalahan serupa.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial didefinisikan sebagai suatu persamaan yang memuat turunan (*derivative*) dari suatu fungsi terhadap variabel bebasnya. Terdapat dua jenis persamaan diferensial, yaitu Persamaan Diferensial Biasa (PDB) merupakan persamaan yang hanya memuat satu turunan terhadap variabel bebas, misalnya turunan pertama $\frac{dy}{dx}$, dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP) merupakan persamaan yang memuat lebih dari satu turunan terhadap variabel bebas, seperti turunan parsial $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ (Purnomo, 2012).

Secara umum, bentuk umum persamaan diferensial biasa orde ke- n adalah:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Suatu persamaan diferensial dikatakan linear apabila fungsi F bersifat linear terhadap y dan seluruh turunannya. Adapun bentuk persamaan diferensial linear orde ke- n adalah:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = g(x)$$

dengan $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$, dan $g(x)$ merupakan fungsi terhadap variabel bebas x (Marwan dan Munzir, 2009). Persamaan ini bersifat linear karena merupakan persamaan diferensial derajat pertama. Sebaliknya, apabila suatu persamaan diferensial tidak dapat dinyatakan dalam bentuk seperti di atas, maka persamaan tersebut termasuk non-linear. Artinya, di dalam persamaannya terdapat derajat lebih dari satu pada fungsi atau turunannya, terdapat fungsi non-linear, atau terdapat perkalian antara fungsi dengan turunannya. (Purnomo, 2012).

Contoh 2.1.1

$$y''' + 2e^x y'' + yy' = x^4$$

merupakan persamaan diferensial orde tiga karena turunan tertingginya adalah y''' dan bersifat non-linear karena persamaan tersebut memuat hasil kali antara fungsi dan turunannya, yaitu yy' (Marwan dan Munzir, 2009).

Contoh 2.1.2 Persamaan gerak pendulum sederhana (tanpa gesekan):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

termasuk persamaan diferensial orde dua karena turunan tertingginya adalah turunan kedua, yaitu $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ dan bersifat non-linear karena terdapat suku $\sin \theta$ (Waluya, 2006).

2.2 Model Logistik

Model pertumbuhan logistik diperkenalkan oleh Pierre François Verhulst (1838) untuk mengatasi keterbatasan model Malthus yang beranggapan bahwa pertumbuhan populasi berlangsung tanpa batas. Model ini memperkenalkan konsep kapasitas daya dukung lingkungan (K), yaitu jumlah maksimum individu yang dapat dipertahankan oleh suatu lingkungan secara berkelanjutan.

Ketika jumlah populasi (P) berada di bawah K , pertumbuhannya menyerupai pola eksponensial. Namun, ketika populasi mendekati K , laju pertumbuhan mulai berkurang karena meningkatnya persaingan sumber daya. Jika populasi melebihi K , maka laju pertumbuhan menjadi negatif hingga populasi kembali stabil di sekitar K (Iswanto, 2012).

Berikut persamaan model pertumbuhan logistik.

$$\frac{dP}{dt} = m\left(1 - \frac{P}{K}\right)P$$

Sedangkan, solusi umum dari persamaan logistik adalah:

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-mt}}$$

Keterangan:

K : kapasitas daya dukung lingkungan

$P(t)$: jumlah populasi pada waktu ke- t

A : konstanta yang berkaitan dengan kondisi awal

m : laju pertumbuhan alami

t : interval waktu

e : bilangan eksponensial alami (bernilai sekitar 2, 71828)

Dalam model ini, laju pertumbuhan alami (m) menggambarkan kemampuan alami suatu populasi untuk bertambah berdasarkan faktor biologis dan lingkungan, sedangkan kapasitas daya dukung lingkungan (K) berfungsi sebagai faktor pembatas yang menahan pertumbuhan melebihi batas maksimum yang dapat ditampung. Dengan demikian, model logistik memberikan pemahaman yang lebih realistis mengenai dinamika populasi, karena mempertimbangkan baik kemampuan alami populasi untuk bertambah maupun kapasitas daya dukung lingkungan yang membatasinya (Pudjaprasetya, 2011).

2.3 Metode Numerik

Metode numerik merupakan teknik yang digunakan untuk mengatasi permasalahan yang tidak dapat diselesaikan dengan cara analitik karena keterbatasan dari teori analisis matematika. Dalam penerapannya, metode ini mengombinasikan konsep analisis matematika dengan teknik perhitungan sederhana serta pemanfaatan grafik untuk memudahkan proses penyelesaian masalah. Algoritma yang diterapkan dalam metode numerik bersifat *iteratif*, artinya perhitungan dilakukan berulang kali (melalui iterasi) hingga hasil yang diperoleh mendekati solusi sebenarnya. (Munir, 2006).

Salah satu penerapan utama metode numerik adalah dalam penyelesaian persamaan diferensial. Dalam hal ini, perhitungan numerik diperoleh melalui perhitungan nilai-nilai hampiran $x_1, x_2, \dots, x_n$ dan $y_1, y_2, \dots, y_n$ dari solusi $x = \varphi(t), y = \phi(t)$ pada titik-titik:

$$t_n = t + nh \text{ dengan } n = 1, 2, 3, \dots \text{ dan } h = \Delta t$$

Beberapa metode numerik yang umum digunakan dalam penyelesaian persamaan diferensial, diantaranya metode Euler, metode Modifikasi Euler, metode Deret Taylor, metode Iterasi Picard, metode Runge-Kutta, serta metode Adams-Bashforth-Moulton (Salusu, 2008).

2.4 Galat (*Error*)

Dalam metode numerik, galat (*error*) merupakan selisih antara nilai sebenarnya (nilai eksak) dengan nilai pendekatan atau hasil aproksimasi. Galat ini disebut sebagai galat absolut (*absolute error*) dan secara matematis dinyatakan sebagai berikut.

$$E_t = p - p^*$$

Keterangan:

E_t : galat absolut

p : nilai eksak

p^* : nilai pendekatan

Galat absolut menunjukkan seberapa jauh hasil perhitungan menyimpang dari nilai sebenarnya. Sedangkan, galat relatif (*relative error*) digunakan untuk mengetahui seberapa besar tingkat kesalahan terhadap nilai yang diukur. Galat relatif merupakan rasio antara galat absolut dengan nilai eksak, yaitu:

$$\varepsilon_t = \frac{E_t}{p} \times 100\%$$

Keterangan:

ε_t : galat relatif

E_t : galat absolut

p : nilai eksak

Apabila nilai eksak tidak diketahui, maka digunakan nilai pendekatan atau perkiraan terbaik dari hasil iterasi yang telah dilakukan sebelumnya. Dalam bentuk *iteratif*, galat relatif dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\varepsilon_a = \frac{p_x^{(n+1)} - p_x^{(n)}}{p_x^{(n+1)}} \times 100\%$$

Nilai galat dapat bernilai positif maupun negatif. Jika nilai pendekatan lebih besar daripada nilai sebenarnya (atau nilai pendekatan sebelumnya lebih besar dari nilai pendekatan saat ini), maka galat bernilai negatif. Sebaliknya, jika nilai pendekatan berada di bawah nilai sebenarnya, maka galat bernilai positif. Dalam penerapannya, metode numerik menetapkan bahwa nilai mutlak galat relatif harus lebih kecil dari batas toleransi tertentu (ε_s), yaitu:

$$|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$$

(Setiawan, 2006).

Galat dalam metode numerik dapat dibedakan menjadi beberapa jenis, yaitu:

1. Galat bawaan (*inherent error*)

Galat ini berasal dari data atau proses pengamatan itu sendiri, misalnya disebabkan oleh kesalahan saat membaca alat ukur, pencatatan data, atau kurangnya pemahaman mengenai hukum fisika yang mendasari pengukuran.

Contoh 2.4.1 Panjang sebenarnya suatu balok adalah 4,05 meter, tetapi dicatat hanya 4 meter saja (Salusu, 2008).

2. Galat pembulatan (*rounding error*)

Galat ini terjadi karena hasil perhitungan tidak dapat dinyatakan secara eksak, sehingga beberapa angka desimal dihilangkan atau dibulatkan.

Contoh 2.4.2

(a) Bilangan 4,23571 dibulatkan menjadi 4,2357 menghasilkan kesalahan sebesar 0,00001.

(b) Bilangan π dinyatakan sebagai 3,1416 dan $\sqrt{2}$ sebagai 1,4142.

(Salusu, 2008).

3. Galat pemotongan (*truncation error*)

Galat ini terjadi karena proses perhitungan tak hingga diubah ke proses berhingga.

Contoh 2.4.3 Secara matematis, beberapa fungsi dapat direpresentasikan sebagai deret tak hingga, contohnya:

(a) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

(b) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

Dalam penerapannya, tidak memungkinkan untuk menghitung seluruh suku sampai tak hingga. Oleh karena itu, hanya beberapa suku pertama yang diperhitungkan, sehingga hasilnya menyimpang dari nilai sebenarnya. (Triatmodjo, 2002).

2.5 Metode Runge-Kutta

Menurut (Triatmodjo, 2002), metode Runge-Kutta adalah suatu pendekatan numerik yang mendapatkan hasil dengan tingkat ketelitian tinggi tanpa memerlukan turunan fungsi pada sejumlah titik dalam suatu interval, serta langkah-langkahnya relatif sederhana. Karena karakteristik tersebut, metode ini sering diterapkan dalam penyelesaian persamaan diferensial model logistik.

Menurut (Chapra, 2006), bentuk umum metode Runge-Kutta orde- n adalah:

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n$$

dengan $a_1, a_2, \dots, a_n$ merupakan konstanta, sedangkan

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 + q_{22} k_2)$$

$$\vdots$$

$$k_n = hf(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{(n-1)1} k_1 + q_{(n-1)2} k_2 + \cdots + q_{(n-1)(n-1)} k_{n-1})$$

Nilai p dan q merupakan konstanta, sedangkan k_i dihitung secara bertahap karena setiap nilai berkaitan dengan nilai k sebelumnya.

Metode Runge-Kutta dapat dikelompokkan berdasarkan nilai n , yaitu:

1. Metode Runge-Kutta orde satu atau metode Euler untuk $n = 1$. Menurut (Munir, 2006), bentuk umumnya:

$$y_{i+1} = y_i + k_1 \text{ dengan } k_1 = hf(x_i, y_i)$$

Metode ini relatif sederhana karena hanya memerlukan satu langkah perhitungan.

2. Metode Runge-Kutta orde dua untuk $n = 2$. Menurut (Chapra, 2006), bentuk umumnya:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1)$$

Metode ini setara dengan metode Heun, hanya saja tanpa proses iterasi koreksi.

3. Metode Runge-Kutta orde tiga untuk $n = 3$. Menurut (Butcher, 2008), bentuk umumnya:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + h, y_i - k_1 + 2k_2)$$

Metode ini memiliki tingkat akurasi yang lebih baik dibandingkan metode orde dua.

4. Metode Runge-Kutta orde empat untuk $n = 4$. Menurut (Dukkipati, 2010), bentuk umumnya:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

Di antara berbagai jenisnya, metode Runge-Kutta orde empat menjadi metode yang paling sering digunakan untuk berbagai aplikasi karena kestabilan serta keakuratannya dalam menghasilkan solusi (Triatmodjo, 2002).

Contoh 2.5.1 Diketahui sistem masalah nilai awal berikut:

$$\frac{dx}{dt} = x - 4y, \frac{dy}{dt} = -x + y, x(0) = 1, y(0) = 0$$

Dengan fungsi:

$$f(x, y) = x - 4y \text{ dan } g(x, y) = -x + y$$

Metode Runge-Kutta orde empat dengan langkah $h = 0,2$

Berikut tahapan perhitungannya.

$$k_{1x} = hf(x_0, y_0) = (0, 2)f(1; 0) = (0, 2)[1 - 4(0)] = 0,2$$

$$k_{1y} = hg(x_0, y_0) = (0, 2)g(1; 0) = (0, 2)[-1 + 0] = -0,2$$

$$\begin{aligned} k_{2x} &= hf(x_0 + \frac{1}{2}k_{1x}, y_0 + \frac{1}{2}k_{1y}) = (0, 2)f(1 + \frac{1}{2}(0, 2); 0 + \frac{1}{2}(-0, 2)) \\ &= (0, 2)f(1, 1; -0, 1) = (0, 2)[1, 1 - 4(-0, 1)] = 0,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{2y} &= hg(x_0 + \frac{1}{2}k_{1x}, y_0 + \frac{1}{2}k_{1y}) = (0, 2)g(1 + \frac{1}{2}(0, 2); 0 + \frac{1}{2}(-0, 2)) \\ &= (0, 2)g(1, 1; -0, 1) = (0, 2)[-1, 1 + (-0, 1)] = -0,24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{3x} &= hf(x_0 + \frac{1}{2}k_{2x}, y_0 + \frac{1}{2}k_{2y}) = (0, 2)f(1 + \frac{1}{2}(0, 3); 0 + \frac{1}{2}(-0, 24)) \\ &= (0, 2)f(1, 15; -0, 12) = (0, 2)[1, 15 - 4(-0, 12)] = 0,326 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{3y} &= hg(x_0 + \frac{1}{2}k_{2x}, y_0 + \frac{1}{2}k_{2y}) = (0, 2)g(1 + \frac{1}{2}(0, 3); 0 + \frac{1}{2}(-0, 24)) \\ &= (0, 2)g(1, 15; -0, 12) = (0, 2)[-1, 15 + (-0, 12)] = -0,254 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{4x} &= hf(x_0 + k_{3x}, y_0 + k_{3y}) = (0, 2)f(1 + 0,326; 0 - 0,254) \\ &= (0, 2)f[1, 326; -0,254] = (0, 2)[1, 326 - 4(-0,254)] = 0,4684 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{4y} &= hg(x_0 + k_{3x}, y_0 + k_{3y}) = (0, 2)g(1 + 0,326; 0 - 0,254) \\ &= (0, 2)g[1, 326; -0,254] = (0, 2)[-1, 326 + (-0,254)] = -0,316 \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}) \\ &= 1 + \frac{1}{6}[0,2 + 2(0,3) + 2(0,326) + 0,4684] \approx 1,32 \\ y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y}) \\ &= 0 + \frac{1}{6}[-0,2 + 2(-0,24) + 2(-0,254) + (-0,316)] \approx -0,2506 \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya dapat dilanjutkan dengan cara yang sama untuk menentukan nilai x_2, y_2 , dan seterusnya. (Kartono, 2012).

2.6 Metode Adams-Bashforth-Moulton

Metode Adams-Bashforth-Moulton adalah suatu teknik numerik *multi-step* yang memerlukan beberapa nilai awal untuk memperoleh solusi berikutnya. Secara umum, beberapa nilai awal diperoleh melalui metode satu langkah (*one-step*) seperti metode Euler, metode Heun, deret Taylor, atau metode Runge-Kutta (Apriani, dkk., 2022).

Pada dasarnya, metode ini mengombinasikan dua pendekatan, yaitu metode Adams-Bashforth berfungsi sebagai prediktor untuk menghasilkan nilai pendekatan awal y_{r+1}^* , dan metode Adams-Moulton berperan sebagai korektor untuk menghasilkan prediksi sehingga didapatkan nilai akhir y_{r+1} yang lebih akurat.

Berikut persamaan umum metode Adams-Bashforth-Moulton pada beberapa tingkat orde.

1. Persamaan prediktor metode Adams-Bashforth:

(a) Persamaan prediktor metode Adams-Bashforth orde satu:

$$y_{r+1}^* = y_r + hf_r$$

(b) Persamaan prediktor metode Adams-Bashforth orde dua:

$$y_{r+1}^* = y_r + \frac{h}{2}(3f_r - f_{r-1})$$

(c) Persamaan prediktor metode Adams-Bashforth orde tiga:

$$y_{r+1}^* = y_r + \frac{h}{12}(23f_r - 16f_{r-1} + 5f_{r-2})$$

(d) Persamaan prediktor metode Adams-Bashforth orde empat:

$$y_{r+1}^* = y_r + \frac{h}{24}(55f_r - 59f_{r-1} + 37f_{r-2} - 9f_{r-3})$$

2. Persamaan korektor metode Adams-Moulton:

(a) Persamaan korektor metode Adams-Moulton orde satu:

$$y_{r+1} = y_r + hf_{r+1}$$

(b) Persamaan korektor metode Adams-Moulton orde dua:

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{2}(f_r + f_{r+1})$$

(c) Persamaan korektor metode Adams-Moulton orde tiga:

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{12}(-f_{r-1} + 8f_r + 5f_{r+1})$$

(d) Persamaan korektor metode Adams-Moulton orde empat:

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{24}(f_{r-2} - 5f_{r-1} + 19f_r + 9f_{r+1})$$

Dengan $f_{r+1} = f(x_{r+1}, y_{r+1}^*)$ (Erwin, 1999).

Di antara berbagai jenisnya, metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat memiliki galat pemotongan yang lebih kecil dibandingkan metode orde dua dan orde tiga, sehingga menghasilkan tingkat ketelitian yang lebih tinggi. Pada metode ini, nilai y_{r+1} ditentukan berdasarkan kombinasi empat nilai sebelumnya, yaitu y_r, y_{r-1}, y_{r-2} dan y_{r-3} . Sebelum memulai perhitungan, empat nilai awal y_0, y_1, y_2 dan y_3 terlebih dahulu dihitung menggunakan metode Runge-Kutta orde empat (Bronson dan Costa, 2007).

Adapun galat pada tahap prediksi dan koreksi masing-masing dinyatakan sebagai berikut.

1. Galat pada prediksi:

$$y(x_{r+1}) - y_{r+1}^* = \frac{251}{720}y^5(c_{r+1})h^5$$

2. Galat pada koreksi:

$$y(x_{r+1}) - y_{r+1} = \frac{-19}{720}y^5(d_{r+1})h^5$$

Dengan:

$y(x_{r+1})$: nilai eksak dari solusi diferensial pada titik x_{r+1}

y_{r+1}^* : nilai prediksi pada titik x_{r+1}

y_{r+1} : nilai koreksi pada titik x_{r+1}

$y^5(c_{r+1})$: turunan kelima dari fungsi y pada suatu titik c_{r+1} di interval $[x_r, x_{r+1}]$

$y^5(d_{r+1})$: turunan kelima dari fungsi y pada suatu titik d_{r+1} di interval $[x_r, x_{r+1}]$

Proses iterasi dihentikan apabila nilai galat relatif telah mencapai kriteria:

$$\frac{|y_{r+1} - y_{r+1}^*|}{|y_{r+1}|} < \varepsilon$$

Untuk $r = 3, 4, \dots, n$ dan ε adalah batas galat yang diinginkan.

Apabila galat relatif melebihi batas toleransi tertentu ($\varepsilon = 8 \times 10^{-8}$), maka ukuran langkah h disesuaikan dengan:

1. Jika $\frac{\varepsilon}{100} < \frac{19}{720} \frac{|y_{r+1} - y_{r+1}^*|}{|y_{r+1}|} < \varepsilon$, maka menggunakan ukuran langkah h yang sama.
2. Jika $\frac{19}{720} \frac{|y_{r+1} - y_{r+1}^*|}{|y_{r+1}|} > \varepsilon$, maka ukuran langkah h dikurangi menjadi $\frac{h}{2}$ dan ulangi perhitungan.
3. Jika $\frac{19}{720} \frac{|y_{r+1} - y_{r+1}^*|}{|y_{r+1}|} < \frac{\varepsilon}{100}$, maka ukuran langkah h diperbesar menjadi $2h$ dan ulangi perhitungan.

(Apriadi, dkk., 2014)

Contoh 2.6.1 Diketahui permasalahan masalah nilai awal berikut.

$$\frac{dy}{dx} = 0, 2y; y(0) = 1$$

Menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton dengan ukuran langkah $h = 0, 1$ pada interval $[0, 1]$

Berikut tabel hasil empat nilai awal menggunakan metode Runge-Kutta.

Tabel 2.1 Empat Nilai Awal dengan Metode Runge-Kutta Orde Empat

r	x_r	y_r	$f(x, y) = 0, 2y$
0	0	1	0, 2
1	0, 1	1, 020201340	0, 204040268
2	0, 2	1, 040810774	0, 208162155
3	0, 3	1, 061836546	0, 212367309

Selanjutnya, digunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat untuk memperoleh nilai y_4 .

1. Persamaan prediktor metode Adams-Bashforth orde empat:

$$y_{r+1}^* = y_r + \frac{h}{24}(55f_r - 59f_{r-1} + 37f_{r-2} - 9f_{r-3})$$

$$\begin{aligned}
y_4^* &= y_3 + \frac{h}{24}(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0) \\
y_4^* &= 1,061836546 + \frac{0,1}{24}(55(0,212367309) - 59(0,208162155) + \\
&\quad 37(0,204040268) - 9(0,2)) \\
y_4^* &= 1,083287066
\end{aligned}$$

2. Persamaan korektor metode Adams-Moulton orde empat:

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{24}(f_{r-2} - 5f_{r-1} + 19f_r + 9f_{r+1})$$

Dengan $f_{r+1} = f(x_{r+1}, y_{r+1}^*)$

$$f_4 = f(x_4, y_4^*) = f(0,4; 1,083287066) = 0,216657413$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
y_4 &= y_3 + \frac{h}{24}(f_1 - 5f_2 + 19f_3 + 9f_4) \\
y_4 &= 1,061836546 + \frac{0,1}{24}(0,204040268 - 5(0,208162155) + \\
&\quad 19(0,212367309) + 9(0,216657413)) \\
y_4 &= 1,083287068
\end{aligned}$$

Diperoleh: $y_4^* = 1,083287066$ dan $y_4 = 1,083287068$

Akan ditentukan nilai galat relatif.

$$\frac{|y_{r+1} - y_{r+1}^*|}{|y_{r+1}|} = \frac{|y_4 - y_4^*|}{|y_4|} = \frac{|1,083287068 - 1,083287066|}{|1,083287068|} = 1,84623 \times 10^{-9}$$

Karena galat relatif telah memenuhi kriteria:

$$\frac{|y_{r+1} - y_{r+1}^*|}{|y_{r+1}|} < \varepsilon$$

$$1,84623 \times 10^{-9} < 8 \times 10^{-8}$$

maka nilai yang diperoleh dianggap konvergen dan akurat.

Selanjutnya, ukuran langkah h juga diuji dengan rumus:

$$\frac{19}{720} \frac{|y_4 - y_4^*|}{|y_4|} = \frac{19}{720} \frac{|1,083287068 - 1,083287066|}{|1,083287068|} = 4,782 \times 10^{-11}$$

Karena $4,782 \times 10^{-11} < 8 \times 10^{-8}$, maka digunakan ukuran langkah h yang sama. Langkah berikutnya adalah menentukan perhitungan numerik dengan metode Adams-Bashforth-Moulton. Berikut tabel perhitungan numeriknya.

Tabel 2.2 Perhitungan Numerik dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton

r	x_r	y_r	y_r^*	Galat Relatif
0	0	1		
1	0,1	1,020201340		
2	0,2	1,040810774		
3	0,3	1,061836546		
4	0,4	1,083287068	1,083287066	$1,84623 \times 10^{-9}$
5	0,5	1,105170918	1,105170917	$9,04837 \times 10^{-10}$
6	0,6	1,127496852	1,127496850	$1,77384 \times 10^{-9}$
7	0,7	1,150273799	1,150273798	$8,69358 \times 10^{-10}$
8	0,8	1,173510871	1,173510870	$8,52144 \times 10^{-10}$
9	0,9	1,197217364	1,197217362	$1,67054 \times 10^{-9}$
10	1	1,221402759	1,221402757	$1,63746 \times 10^{-9}$

Berdasarkan hasil perhitungan, diperoleh nilai galat relatif di setiap ukuran langkah $h = 0,1$ lebih kecil dari batas toleransi $\varepsilon = 8 \times 10^{-8}$. Selain itu, perbandingan antara hasil prediksi (y_r^*) dan hasil koreksi (y_r) menunjukkan perbedaan yang sangat minim, sehingga langkah $h = 0,1$ dianggap optimal dalam menyelesaikan masalah nilai awal.

2.7 Metode Runge-Kutta-Fehlberg

Metode Runge-Kutta-Fehlberg adalah suatu pendekatan numerik dengan keunggulannya terletak pada pengendalian galat dan perubahan solusi yang tidak selalu stabil selama proses perhitungan. Metode ini dikembangkan oleh Erwin Fehlberg, seorang ilmuwan asal Jerman, sebagai pengembangan dari metode Runge-Kutta orde empat dengan akurasi hingga orde lima (Atkinson, 1989).

Tingkat akurasi yang tinggi tersebut dikarenakan penggunaan enam konstanta dalam proses perhitungannya, yang berperan dalam memperbaharui nilai solusi sehingga diperoleh hasil dengan galat yang sangat kecil. Oleh karena itu, metode Runge-Kutta-Fehlberg menjadi salah satu metode yang populer dan sering diterapkan dalam penyelesaian masalah numerik modern, termasuk dalam model persamaan logistik.

Menurut (Burden and Faires, 2011), metode Runge-Kutta-Fehlberg menerapkan

konsep pengendalian galat lokal (*local error control*) melalui dua pendekatan solusi, yaitu solusi orde empat (y_{i+1}) dan solusi orde lima ($\hat{y}_{i+1}$) dalam satu langkah perhitungan. Kedua pendekatan ini digunakan untuk mengestimasi tingkat kesalahan dan secara otomatis menyesuaikan ukuran langkah (*step size*). Bentuk umum dari kedua solusi orde tersebut adalah sebagai berikut.

1. Solusi orde empat:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

2. Solusi orde lima:

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

dengan masing-masing nilai k_j adalah:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{3}{8}h, y_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_i + \frac{12}{13}h, y_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3)$$

$$k_5 = hf(x_i + h, y_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4)$$

$$k_6 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5)$$

Perbandingan hasil antara solusi orde empat (y_{i+1}) dan orde lima ($\hat{y}_{i+1}$) digunakan untuk menentukan besar galat pemotongan pada setiap langkah perhitungan (Atkinson, 1989).

2.8 Tingkat Kemiskinan di Provinsi Lampung

Menurut (BPS Indonesia, 2025), penduduk miskin adalah penduduk yang memiliki pengeluaran per kapita per bulan dibawah garis kemiskinan (GK). Pengukuran tingkat kemiskinan dilakukan dengan menggunakan pendekatan *Cost of Basic Needs* (CBN), yaitu metode yang menilai kemampuan penduduk dalam memenuhi

kebutuhan pangan minimal 2.100 kilokalori per individu per hari diperoleh dari komoditas umum, serta kebutuhan non-pangan meliputi pendidikan, layanan kesehatan, sandang, tempat tinggal, dan transportasi. Penetapan garis kemiskinan didasarkan pada data Survei Sosial Ekonomi Nasional (Susenas) diselenggarakan pada bulan Maret dan September, yaitu dua kali dalam setahun. Pada bulan September 2024, rata-rata jumlah anggota rumah tangga miskin di Indonesia memiliki 4,71 orang, sehingga garis kemiskinan rata-rata per rumah tangga tercatat sebesar Rp2.803.590 per bulan. Sementara itu, Provinsi Lampung memiliki garis kemiskinan sebesar Rp612.451 per individu atau setara Rp2.821.375 per rumah tangga per bulan.

Perbedaan tingkat kemiskinan dan kondisi sosial-ekonomi antar wilayah menyebabkan tingkat kemiskinan berbeda-beda di setiap provinsi. Hal ini terlihat di Provinsi Lampung yang masih menghadapi tingkat kemiskinan relatif lebih tinggi dibandingkan sejumlah provinsi lainnya. Menurut Badan Pusat Statistik (BPS), pada tahun 2025 Provinsi Lampung menempati posisi ke-18 dari 38 provinsi di Indonesia dan menduduki peringkat ke-4 dari 10 provinsi di Pulau Sumatera dengan jumlah penduduk miskin sebanyak 887,02 ribu jiwa. Dalam rentang sepuluh tahun, angka kemiskinan berkurang sebesar 4,35% dari 14,35% pada tahun 2015 menjadi 10% di tahun 2025. Meskipun menunjukkan tren penurunan, angka tersebut masih menandakan bahwa Lampung menghadapi tantangan besar dalam mengurangi angka kemiskinan secara signifikan.

Adapun daerah dengan jumlah penduduk miskin terendah antara lain Kota Metro (11, 58 ribu jiwa), Kabupaten Mesuji (12, 14 ribu jiwa), Kabupaten Tulang Bawang Barat (19, 04 ribu jiwa) dan Kabupaten Pesisir Barat (19, 50 ribu jiwa). Sebaliknya, enam daerah dengan jumlah penduduk miskin tertinggi di tahun 2025 adalah Kabupaten Lampung Timur (132, 17 ribu jiwa), Kabupaten Lampung Tengah (127, 83 ribu jiwa), Kabupaten Lampung Selatan (127, 74 ribu jiwa), Kabupaten Lampung Utara (98, 98 ribu jiwa), Kota Bandar Lampung (80, 19 ribu jiwa), Kabupaten Tanggamus (63, 56 ribu jiwa) (BPS Provinsi Lampung, 2025). Berikut merupakan tabel jumlah penduduk miskin di tingkat kabupaten/kota Provinsi Lampung pada tahun 2021-2025.

Tabel 2.3 Jumlah Penduduk Miskin di Kab/Kota Lampung Tahun 2021-2025 (Ribu Jiwa)

Kabupaten/Kota	2021	2022	2023	2024	2025
Lampung Barat	39,36	36,20	34,73	33,43	31,23
Tanggamus	71,89	67,43	65,18	63,22	63,56
Lampung Selatan	145,85	136,21	133,67	132,38	127,74
Lampung Timur	159,79	149,12	148,26	142,69	132,17
Lampung Tengah	155,77	143,34	140,29	137,41	127,83
Lampung Utara	121,91	114,67	107,21	105,91	98,98
Way Kanan	59,89	54,28	51,26	48,88	44,17
Tulang Bawang	44,53	39,19	37,83	37,46	36,13
Pesawaran	68,31	63,17	59,29	55,01	51,09
Pringsewu	41,04	38,18	37,60	34,42	31,66
Mesuji	15,24	13,88	13,71	12,91	12,14
Tulang Bawang Barat	23,03	20,72	20,32	20,35	19,04
Pesisir Barat	23,23	21,85	21,45	20,21	19,50
Bandar Lampung	98,76	90,51	87,08	83,88	80,19
Metro	15,32	13,68	12,80	12,07	11,58
Provinsi Lampung	1.083,93	1.002,41	970,67	941,23	887,02

Menurut (BPS Provinsi Lampung, 2025), perubahan jumlah penduduk miskin di Provinsi Lampung tahun 2014-2025 menunjukkan dinamika yang cukup bervariasi. Pada tahun 2014, angka kemiskinan tercatat sebesar 14,21% dan sedikit meningkat menjadi 14,35% pada tahun 2015. Memasuki tahun 2016, angka tersebut menurun menjadi 14,29% dan terus bergerak menurun hingga mencapai 12,34% pada tahun 2020. Kemudian, di tahun 2021 terjadi sedikit peningkatan menjadi 12,62% sebelum secara berangsur menurun kembali menjadi 10,00% pada tahun 2025. Perubahan ini mencerminkan bahwa tingkat kemiskinan di Provinsi Lampung cenderung fluktuatif, meskipun secara keseluruhan mengalami penurunan setiap tahunnya. Berikut merupakan tabel yang menggambarkan tingkat kemiskinan di Provinsi Lampung pada tahun 2014-2025.

Tabel 2.4 Persentase Penduduk Miskin Provinsi Lampung Tahun 2014-2025

No	Tahun	Kemiskinan (%)
1	2014	14, 21
2	2015	14, 35
3	2016	14, 29
4	2017	13, 69
5	2018	13, 14
6	2019	12, 62
7	2020	12, 34
8	2021	12, 62
9	2022	11, 57
10	2023	11, 11
11	2024	10, 69
12	2025	10, 00

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026, dimulai pada bulan September 2025. Kegiatan penelitian dilakukan di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung yang berlokasi di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung.

3.2 Data Penelitian

Jenis data pada penelitian ini merupakan data sekunder yang bersumber dari instansi atau lembaga resmi, yaitu Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung memuat data jumlah penduduk miskin Provinsi Lampung selama periode tahun 2022-2025.

3.3 Tahapan Penelitian

Adapun tahapan dalam penelitian ini sebagai berikut.

1. Pengumpulan data

Mengumpulkan data sekunder untuk persamaan logistik dari Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung, yaitu:

- (a) Jumlah penduduk miskin
- (b) Laju pertumbuhan penduduk miskin
- (c) Luas wilayah Provinsi Lampung
- (d) Kepadatan penduduk maksimum

(e) Kapasitas daya tampung penduduk miskin

2. Penetapan model persamaan logistik

Menetapkan model persamaan logistik sebagai berikut.

$$\frac{dP}{dt} = m(1 - \frac{P}{K})P$$

Keterangan:

- (a) P : jumlah penduduk miskin
- (b) m : laju pertumbuhan penduduk miskin
- (c) K : kapasitas daya tampung penduduk miskin

3. Perhitungan numerik dengan metode Adams-Bashforth-Moulton

- (a) Menentukan empat nilai solusi awal P_0, P_1, P_2, P_3 dengan metode Runge-Kutta orde empat
- (b) Menghitung solusi numerik dengan metode Adams-Bashforth untuk memperoleh nilai prediksi P_{r+1}^*
- (c) Menghitung nilai $f_{r+1} = f(t_{r+1}, P_{r+1}^*)$ dan mensubstitusikannya ke metode Adams-Moulton untuk memperoleh nilai koreksi P_{r+1}
- (d) Melakukan proses koreksi Adams-Moulton hingga memenuhi kriteria:

$$\frac{|P_{r+1} - P_{r+1}^*|}{|P_{r+1}|} < \varepsilon$$

Untuk $r = 3, 4, \dots, n$ dan ε adalah toleransi galat, yaitu 8×10^{-8}

- (e) Apabila kriteria galat relatif melebihi batas toleransi, maka ukuran langkah h disesuaikan dengan:

- i. Jika $\frac{\varepsilon}{100} < \frac{19}{720} \frac{|P_{r+1} - P_{r+1}^*|}{|P_{r+1}|} < \varepsilon$, maka menggunakan ukuran langkah h yang sama.
- ii. Jika $\frac{19}{720} \frac{|P_{r+1} - P_{r+1}^*|}{|P_{r+1}|} > \varepsilon$, maka ukuran langkah h dikurangi menjadi $\frac{h}{2}$ dan ulangi perhitungan.
- iii. Jika $\frac{19}{720} \frac{|P_{r+1} - P_{r+1}^*|}{|P_{r+1}|} < \frac{\varepsilon}{100}$, maka ukuran langkah h diperbesar menjadi $2h$ dan ulangi perhitungan.

- (f) Setelah kriteria terpenuhi, diperoleh hasil akhir berupa perhitungan numerik metode Adams-Bashforth-Moulton.

4. Perhitungan numerik dengan metode Runge-Kutta-Fehlberg

(a) Menghitung koefisien k_j didefinisikan sebagai berikut.

$$k_1 = hf(t_i, P_i)$$

$$k_2 = hf(t_i + \frac{1}{4}h, P_i + \frac{1}{4}k_1)$$

$$k_3 = hf(t_i + \frac{3}{8}h, P_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2)$$

$$k_4 = hf(t_i + \frac{12}{13}h, P_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3)$$

$$k_5 = hf(t_i + h, P_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4)$$

$$k_6 = hf(t_i + \frac{1}{2}h, P_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5)$$

(b) Melakukan perhitungan menggunakan metode Runge-Kutta-Fehlberg orde empat dan orde lima untuk memperoleh hasil numerik.

i. Solusi orde empat:

$$P_{n+1} = P_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

ii. Solusi orde lima:

$$\hat{P}_{n+1} = P_n + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

(c) Menghitung galat metode Runge-Kutta-Fehlberg diperoleh dari selisih antara hasil perhitungan orde empat (P_{n+1}) dan orde lima ($\hat{P}_{n+1}$).

(d) Diperoleh hasil akhir dari perhitungan numerik metode Runge-Kutta-Fehlberg.

5. Kesimpulan

Setelah kedua metode diterapkan, diperoleh perhitungan numerik akhir dari persamaan logistik serta informasi galat yang dapat digunakan untuk analisis jumlah penduduk miskin di Provinsi Lampung.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan perhitungan, metode Adams-Bashforth-Moulton dan metode Runge-Kutta-Fehlberg menghasilkan nilai prediksi jumlah penduduk miskin yang hampir serupa pada setiap titik perhitungan. Namun, metode Runge-Kutta-Fehlberg menghasilkan nilai yang sedikit lebih rendah dibandingkan metode Adams-Bashforth-Moulton. Selisih yang terlihat pada angka desimal menunjukkan bahwa hasil metode Runge-Kutta-Fehlberg lebih mendekati data aktual.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode Runge-Kutta-Fehlberg memiliki tingkat akurasi yang lebih baik, disebabkan oleh mekanisme pengendalian galat yang lebih efektif. Mekanisme tersebut memungkinkan metode Runge-Kutta-Fehlberg mampu melakukan analisis terhadap perubahan nilai di setiap titik perhitungan, sehingga memberikan estimasi yang lebih tepat dibandingkan metode Adams-Bashforth-Moulton.

5.2 Saran

Untuk penelitian berikutnya, disarankan untuk membandingkan salah satu metode numerik pada penelitian ini dengan metode lain yang memiliki karakteristik berbeda. Selain itu, dapat juga dilakukan dengan tetap menggunakan kedua metode yang sama, namun menerapkan data atau model matematika yang berbeda untuk menilai konsistensi hasil dari masing-masing metode dalam berbagai kondisi perhitungan.

DAFTAR PUSTAKA

- Apriadi, Prihandono, B., & Novianti, E. (2014). Metode Adams-Bashforth-Moulton dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Non Linear. *Buletin Ilmiah Matematika Statistika dan Terapannya (Bimaster)*, 3(2), 107-116.
- Apriani D., Wasono, & Huda, M. N. (2022). Penerapan Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Persamaan Logistik dalam Memprediksi Pertumbuhan Penduduk di Provinsi Kalimantan Timur. *Jurnal EKSPONENSIAL*, 13(2), 95-102.
- Atkinson, K. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis*. Second Edition. New York: John Wiley and Sons. Inc.
- Badan Perencanaan Pembangunan Nasional. (2024). *Laporan Perkembangan Pencapaian Pembangunan Milenium Indonesia 2004*. Jakarta: Bappenas.
- Badan Pusat Statistik Indonesia. (2025). *Memahami Perbedaan Angka Kemiskinan Versi Bank Dunia dan BPS*. Jakarta: BPS Indonesia.
- Badan Pusat Statistik Provinsi Lampung. (2025). *Jumlah Penduduk Miskin (Ribuan Jiwa), 2025*. Bandar Lampung: BPS Provinsi Lampung.
- Badan Pusat Statistik Provinsi Lampung. (2025). *Persentase Penduduk Miskin (Persen), 2025*. Bandar Lampung: BPS Provinsi Lampung.
- Bronson, R., & Costa, G. (2007). *Persamaan Diferensial Biasa*. Edisi Ketiga. Jakarta: Erlangga.
- Burden, R. L. & Faires, J. D. (2011). *Numerical Analysis*. Boston: Brooks/Cole Cengage Learning.
- Butcher, J. C. (2008). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. New York: John Wiley and Sons. Inc.

- Chapra, S. C. (2006). *Applied Numerical Methods with Matlab*. Second Edition. London: McGraw-Hill. Inc.
- Dukkipati, R. V. (2010). *Numerical Methods*. New Delhi: New Age International Limited Publishers.
- Erwin. (1999). Perumusan Kesalahan Pemotongan Metode Adam Moulton pada Penyelesaian Masalah Nilai Awal. *Jurnal Penelitian Sains*, (5), 1-10.
- Hervás, R. & Millares, P. (2004). No Title. *CWL Publishing Enterprises, Inc., Madison, 2004*, 352.
- Iswanto, R. J. (2012). *Pemodelan Matematika*. Edisi Pertama. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Kartono. (2012). *Persamaan Diferensial Biasa; Model Matematika Fenomena Perubahan*. Edisi Pertama. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Marwan, & Munzir, S. (2009). *Persamaan Diferensial*. Edisi Pertama. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Munir, R. (2006). *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.
- Nurkse, R. (1953). *Problem of Capital Formation in Underdeveloped Countries*. New York: Oxford University Press.
- Pudjaprasetya, S. R. (2011). *Persamaan Diferensial. Diktat Kuliah MA2271 Metode Matematika*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Purnomo, D. (2012). *Persamaan Diferensial*. Malang: Bayumedia Publishing.
- Ruby, T., Azis, D., Sutrisno A., Falen, & Andrade, F. (2025). Application of Adams-Bashforth-Moulton Method for Predict Population Growth in Banten Province with Logistic Equation. *International Journal of Advance Social Sciences and Education (IJJASSE)*, 3(1), 73-86.
- Salusu, A. (2008). *Metode Numerik*. Edisi Pertama. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Setiawan, A. (2006). *Pengantar Metode Numerik*. Edisi Pertama. Yogyakarta: C.V Andi Offset.
- Syarfiah, Irwan, M., & Anugrawati, S. D. (2024). Penerapan Metode Runge Kutta Fehlberg pada Persamaan Logistik dalam Memprediksi Pertumbuhan Penduduk di Sulbar. *Al-Aqlu: Jurnal Matematika, Teknik dan Sains*, 2(2), 150-158.

Triatmodjo, B. (2002). *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.

Waluya, S.B. (2006). *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.