DERIVASI *TRIPLE* JORDAN PADA RING POLINOMIAL

Skripsi

Oleh

RACHMA ALLYA SHIEFFA
NPM. 2217031002

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

ABSTRACT

JORDAN TRIPLE DERIVATION ON POLYNOMIAL RING

By

Rachma Allya Shieffa

Given a ring R. An additive mapping $d : R \to R$ is called a Jordan triple derivation if $d(aba) = d(a)ba + ad(b)a + abd(a)$ for every $a, b \in R$. This study begins by constructing a Jordan triple derivation on a ring, followed by investigating the properties of a Jordan triple derivation on a ring. Next, the study focuses on constructing a Jordan triple derivation on a polynomial ring, building upon the previous discussion. Several examples accompany this discussion on rings and polynomial rings.

Keywords: derivations, ring, polynomial ring, Jordan triple derivation.

ABSTRAK

DERIVASI *TRIPLE* JORDAN PADA RING POLINOMIAL

Oleh

Rachma Allya Shieffa

Diberikan ring R. Pemetaan aditif $d : R \rightarrow R$ disebut derivasi *triple* Jordan jika $d(aba) = d(a)ba + ad(b)a + abd(a)$ untuk setiap $a, b \in R$. Penelitian ini dimulai dengan mengkonstruksi derivasi *triple* Jordan pada ring, diikuti dengan menyelidiki sifat-sifat derivasi *triple* Jordan pada ring. Selanjutnya, kajian difokuskan pada konstruksi derivasi *triple* Jordan pada ring polinomial sebagai perluasan dari pembahasan sebelumnya. Pembahasan ini disertai dengan beberapa contoh pada ring dan ring polinomial.

Kata-kata kunci: derivasi, ring, ring polinomial, derivasi *triple* Jordan.

DERIVASI *TRIPLE* JORDAN PADA RING POLINOMIAL

RACHMA ALLYA SHIEFFA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

Judul Skripsi : **DERIVASI *TRIPLE* JORDAN PADA RING POLINOMIAL**

Nama Mahasiswa : Rachma Allya Shieffa

Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031002**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP 198406272006042001

Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.
NIP 198002062003121003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr.Aang Nuryaman, S.Si., M.Si
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	:	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Sekretaris	:	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **27 Januari 2026**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Rachma Allya Shieffa**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031002**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Derivasi *Triple* Jordan pada Ring Polinomial**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 27 Januari 2026

Penulis,

Rachma Allya Shieffa

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Rachma Allya Shieffa yang lahir di Bandar Lampung pada tanggal 28 Februari 2004. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara, putri dari pasangan Sutikno dan Neng Rohani.

Penulis memulai pendidikan formal di TK Aziziyah pada tahun 2007-2009 dan pindah ke TK Azkiyah pada tahun 2009-2010. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di SD Negeri 1 Gedong Air pada tahun 2010 sampai dengan 2016. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 2 Bandar Lampung pada tahun 2016 sampai dengan tahun 2019, dan menyelesaikan pendidikan di SMA Negeri 9 Bandar Lampung pada tahun 2022.

Pada tahun 2022, penulis diterima di program studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN). Pada awal tahun 2025, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di desa Sri Kencono, Kecamatan Bumi Nabung, Kabupaten Lampung Tengah, sampai dengan Februari 2025. Selain itu, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di UPTD KPHK Tahura Wan Abdul Rachman Dinas Kehutanan Provinsi Lampung selama 40 hari sampai dengan Agustus 2025.

Selama masa studi, penulis menunjukkan ketekunan dan dedikasi dalam menyelesaikan berbagai tugas akademik. Selain itu, di bidang non-akademik, penulis bergabung di UKM Merpati Putih Universitas Lampung pada tahun 2022. Kemudian, penulis dipercaya menjabat sebagai Kepala Bidang Humas dan Kominfo periode Tahun 2023 serta sebagai Bendahara Umum periode tahun 2024 di UKM Merpati Putih Universitas Lampung. Penulis berharap hasil dari penelitian ini dapat memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya di bidang Aljabar.

KATA INSPIRASI

Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya.
(**QS. Al-Baqarah: 286**)

Segala sesuatu yang kita lalui akan membantu kita tumbuh menjadi pribadi yang lebih baik.
(**Kim Namjoon**)

Jangan pernah terjebak dalam ekspektasi orang lain, karena hidupmu adalah milikmu sendiri. Meski kamu terjatuh, bangkitlah lagi. Itulah cara untuk tumbuh.

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil"alamin
Puji dan syukur kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya.
Tak lupa shalawat beserta salam selalu tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu Alaihi Wassalam.
Dengan rasa syukur dan bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Bapak dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Derivasi Triple Jordan pada Ring Polinomial” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sepanjang proses penyusunan skripsi ini.

2. Dr. Ahmad Faisol, S.Si, M.Sc. selaku Pembimbing 2 yang telah memberikan arahan, dukungan, serta doa sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Penguji sekaligus Dosen Pembimbing Akademik yang telah bersedia memberikan saran, kritik, serta evaluasi yang membangun sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

5. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Seluruh guru TK, SD, SMP, dan SMA yang telah mengajarkan dan memberikan ilmu hingga penulis bisa menduduki bangku perkuliahan.

7. Bapak, ibu, serta adik yang selalu memberikan dukungan dan doa sehingga penulis dapat segera menyelesaikan skripsi ini.
8. Sahabat-sahabat penulis, RACHVIN, serta ketujuh figur pendukung, yang senantiasa memberikan semangat, pengalaman, dukungan, dan kebersamaan, serta telah menjadi sumber penguatan, penghiburan, dan inspirasi bagi penulis dalam melewati berbagai proses dan tantangan selama masa perkuliahan hingga penyusunan skripsi ini.
9. Seluruh teman-teman dan keluarga yang senentiasa memberikan dorongan dan dukungan dalam hal apapun kepada penulis selama ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 27 Januari 2026

Rachma Allya Shieffa

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Kajian aljabar menempatkan ring sebagai salah satu struktur yang fundamental dan memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang, termasuk teori bilangan, geometri aljabar, dan analisis. Derivasi, sebagai salah satu operasi penting dalam matematika, berfungsi untuk mempelajari perubahan dan sifat-sifat fungsi. Salah satu jenis derivasi yang menarik untuk diteliti adalah derivasi Jordan, yang memiliki karakteristik unik dalam ring.

Derivasi *triple* Jordan, yang merupakan pengembangan dari konsep derivasi Jordan, menawarkan pendekatan yang lebih mendalam untuk menganalisis sifat-sifat aljabar dari ring dan ring polinomial. Meskipun telah banyak penelitian yang membahas derivasi Jordan, studi yang berfokus pada derivasi *triple* Jordan masih relatif terbatas. Kondisi ini membuka peluang untuk mengeksplorasi sifat-sifat baru serta potensi penerapan konsep tersebut dalam analisis struktur ring dan ring polinomial.

Penelitian terdahulu yang telah dilakukan, salah satunya yang dilakukan oleh Brešar (1989) yang membahas pemetaan Jordan pada ring semiprima. Selanjutnya, Hongan dkk. (2011) mengembangkan kajian tersebut dengan meneliti ideal Lie serta derivasi *triple* Jordan pada ring. Seiring dengan perkembangan penelitian. Seiring dengan perkembangan penelitian, Helmi dkk. (2013) mengkaji derivasi pada ring polinomial yang merupakan generalisasi dari ring prima Asano. Pada tahun yang sama, Rehman (2013) membahas derivasi (α, β)*-*triple* Jordan pada ring semiprima yang dilengkapi dengan involusi. Kajian mengenai derivasi Jordan pada ring semiprima kemudian diperluas oleh Atteya (2015) melalui catatan dan hasil tambahan yang memperkaya teori yang telah ada. Selanjutnya, Zhao dan Qi (2017) meneliti karakteristik derivasi Jordan berdasarkan aksi lokal pada ring dengan involusi.

Pada tahun 2018, Khalaf dkk. (2018) mengkaji ring dengan struktur Lie sederhana yang berkaitan dengan derivasi Lie dan Jordan. sementara, Li dan Wei (2018) meneliti derivasi Jordan pada *generalized one point extensions*, yang memperluas kajian derivasi pada struktur ring yang lebih umum. Pada periode yang sama, Ferreira dkk. (2018) mengkaji derivasi *triple* Jordan pada ring alternatif. Penelitian berikutnya dilakukan oleh Sayin dan Kuzucuoglu (2019) yang membahas derivasi Jordan pada subring khusus dari ring matriks. Selanjutnya, Darvish dkk. (2020) membahas derivasi *triple* *-Jordan nonlinier pada *-aljabar prima.

Perkembangan kajian ini berlanjut dengan penelitian Ma dkk. (2022) meneliti derivasi semi-*triple* Jordan serta Jordan centralizers pada aljabar *Generalized Quaternion*. Pada tahun yang sama, Bagheri dan Emami (2022) mengkaji aplikasi ring polinomial dalam pengkodean satelit dan kriptografi. Perkembangan kajian ini kemudian diperluas oleh Mehdipour dkk. (2023) yang meneliti derivasi Jordan pada beberapa aljabar Banach. Sedangkan, Bhushan dkk. (2023) membahas derivasi *centrally extended* Jordan serta pemetaan terkait pada ring. Penelitian selanjutnya dilakukan oleh Rahnaward dkk. (2024) membahas derivasi *triple* λ-Jordan non-linear pada aljabar prima. Pada tahun yang sama, Ali dkk. (2024) mengkaji berbagai jenis derivasi pada ring. Sementara, Thomas dkk. (2024) membahas derivasi pada beberapa kelas ring tertentu.

Pada penelitian selanjutnya, Mishra dkk. (2025) mengkaji kelas-kelas derivasi sederhana pada ring polinomial. Sejalan dengan itu, Fitriani dkk. (2025b) meneliti *commuting* dan *centralizing maps* pada modul, sedangkan Fitriani dkk. (2025a) membahas konsep f-derivasi pada modul polinomial. Selain itu, Sitompul dkk. (2025) meneliti derivasi Jordan pada ring polinomial. Secara keseluruhan, hasil-hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa derivasi *triple* Jordan memiliki peranan penting dan dapat dimanfaatkan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan dalam aljabar.

Keunggulan penelitian ini terletak pada kemampuannya memberikan wawasan baru mengenai sifat-sifat aljabar dari derivasi *triple* Jordan dan hubungannya dengan ring polinomial, yang hingga saat ini masih jarang dibahas secara khusus dalam literatur. Dengan memahami konsep derivasi *triple* Jordan secara lebih mendalam, penelitian ini mampu mengungkap sifat-sifat penting dalam ring dan struktur ring polinomial yang belum teridentifikasi melalui analisis aljabar. Pemilihan topik ini didasarkan pada kebutuhan untuk mengisi kekosongan kajian dalam bidang tersebut, sekaligus membuka potensi baru dalam pengembangan teori aljabar. Oleh karena itu, penelitian ini tidak hanya signifikan dari segi teoretis, tetapi juga memiliki potensi kontribusi nyata bagi pengembangan ilmu di berbagai bidang terkait.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. mengkonstruksi sifat-sifat dari derivasi *triple* Jordan pada ring;
2. memberikan contoh-contoh derivasi *triple* Jordan pada ring;
3. mengkonstruksi struktur derivasi *triple* Jordan pada ring polinomial;
4. memberikan contoh-contoh derivasi *triple* Jordan pada ring polinomial.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang ingin diperoleh dari penelitian ini yaitu:

1. memperdalam pemahaman terhadap sifat-sifat derivasi *triple* Jordan pada ring;
2. menambah pemahaman konsep derivasi *triple* Jordan dan aplikasinya pada ring polinomial;
3. memperluas topik penelitian derivasi *triple* Jordan pada penerapan konsep aljabar lainnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, akan diuraikan konsep dasar yang menjadi landasan teori untuk mendukung pembahasan pada bagian selanjutnya.

2.1 Grup

Salah satu langkah penting untuk mendalami konsep-konsep yang lebih kompleks dalam teori aljabar adalah memahami struktur dasar dalam aljabar abstrak, yaitu grup. Sebelum membahas pengertian grup, berikut diberikan definisi operasi biner.

Definisi 2.1.1 Operasi biner $*$ pada himpunan S merupakan fungsi dari $S \times S$ ke S. Untuk setiap $(a, b) \in S \times S$, $*(a, b)$ di S dinotasikan dengan $a * b$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.2 Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi $*$ yang didefinisikan oleh $a * b = a + 2b$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ karena $a * b \neq b * a$. Untuk $a * b = a + 2b$ sedangkan $b * a = b + 2a$ (Suryanti, 2017).

Langkah selanjutnya untuk mendalami konsep-konsep grup dalam teori aljabar, berikut diberikan definisi grup.

Definisi 2.1.3 Suatu grup $\langle G, * \rangle$ terdiri dari himpunan G bersama operasi biner $*$ yang didefinisikan pada G dan memenuhi aksioma berikut:

1. operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$;

2. terdapat elemen identitas e, yaitu untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$;

3. untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen invers $a' \in G$ sehingga berlaku $a * a' = a' * a = e$

(Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.4 Diberikan $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Didefinisikan grup M dengan $+$ merupakan operasi penjumlahan matriks. (Suryanti, 2017).

Struktur aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu dinamakan grup.

Definisi 2.1.5 Jika suatu grup $\langle G, * \rangle$ memenuhi sifat komutatif, maka $\langle G, * \rangle$ disebut grup komutatif atau grup Abelian (Suryanti, 2017).

Contoh 2.1.6 Himpunan $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ menyatakan himpunan semua matriks berukuran $m \times n$ yang entri-entrinya bilangan real merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan matriks. hal ini dikarenakan untuk setiap $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, berlaku $A + B = B + A$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

2.2 Ring

Setelah pembahasan mengenai struktur dasar dalam aljabar abstrak, yaitu grup, kajian dilanjutkan pada struktur aljabar lain yang lebih umum, yaitu ring, yang didefinisikan sebagai suatu himpunan dengan dua operasi biner.

Definisi 2.2.1 Suatu himpunan tak kosong R bersama dengan operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ dilambangkan dengan $\langle R, +, \cdot \rangle$ disebut ring jika memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\langle R, + \rangle$ merupakan grup Abelian, yaitu memenuhi sifat:
   (a) tertutup pada operasi penjumlahan yaitu untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b \in R$;
   (b) Sifat asosiatif pada operasi penjumlahan, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$;
   (c) memiliki elemen identitas (e), yaitu terdapat $e \in R$, untuk setiap $a \in R$ berlaku $a + e = e + a = a$;
   (d) setiap elemen memiliki invers, yaitu untuk setiap $a \in R$,terdapat $(-a) \in R$ sehingga berlaku $a + (-a) = e$ dan $(-a) + a = e$;
   (e) Sifat komutatif pada operasi penjumlahan, yaitu untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b = b + a$.

2. $\langle R, \cdot \rangle$ merupakan semigrup, yaitu memenuhi sifat-sifat berikut.
   (a) tertutup pada operasi perkalian, yaitu untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a \cdot b \in R$;
   (b) bersifat asosiatif pada operasi perkalian, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. Bersifat distributif kiri dan distributif kanan pada operasi penjumlahan di R, yaitu:
   (a) untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
   (b) untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

(Apriyani, 2024).

Contoh 2.2.2 Diberikan ring $M_{2\times2}(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$. Pada himpunan $M_{2\times2}(\mathbb{Z})$ didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian matriks. Dengan operasi tersebut, $M_{2\times2}(\mathbb{Z})$ membentuk suatu ring, dengan penjumlahan bersifat komutatif, perkalian bersifat asosiatif, terdapat matriks nol sebagai elemen identitas pada penjumlahan dan matriks identitas sebagai elemen identitas pada perkalian, serta berlaku sifat distributif kiri dan distributif kanan.

Definisi 2.2.3 Ring R disebut ring komutatif jika operasi perkalian pada R bersifat komutatif (Rasiman dkk., 2018).

Contoh 2.2.4 Diberikan suatu ring $\langle 2\mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$. Ring $2\mathbb{Z}$ adalah ring komutatif karena operasi perkalian pada $2\mathbb{Z}$ bersifat komutatif tetapi ring $2\mathbb{Z}$ bukan ring dengan elemen satuan (Apriyani, 2024).

2.3 Jumlah Langsung (*Direct Sum*) pada Ring

Setelah membahas berbagai struktur dan sifat pemetaan pada ring, pada subbab ini perhatian diarahkan pada konsep jumlah langsung (*direct sum*) pada ring. Konstruksi jumlah langsung memungkinkan pembentukan ring baru dari beberapa ring yang lebih sederhana, dengan cara menggabungkan struktur aljabarnya secara terkontrol. Konsep ini penting karena memberikan cara untuk memahami ring yang kompleks melalui komponen-komponen penyusunnya, serta sering digunakan dalam kajian struktur ring dan modul. Oleh karena itu, subbab ini akan membahas definisi jumlah langsung pada ring beserta sifat-sifat dasarnya sebagai landasan untuk pembahasan selanjutnya.

Definisi 2.3.1 Diberikan ring R_i, dengan $i = 1, ..., n$ himpunan R adalah hasil kali kartesian pada himpunan R_i, dan didefinisikan operasi pada R, yaitu:

1. $(r_1, ..., r_n) + (s_1, ..., s_n) = (r_1 + s_1, ..., r_n + s_n)$;
2. $-(r_1, ..., r_n) = (-r_1, ..., -r_n)$;
3. $(r_1, ..., r_n)(s_1, ..., s_n) = (r_1 s_1, ..., r_n s_n)$.

Elemen $(0, 0, ..., 0)$ merupakan elemen identitas. R disebut jumlahan langsung eksternal dari $R_1, ..., R_n$ dan dinotasikan sebagai $R_1 \oplus R_2 \oplus ... \oplus R_n$ (Side dkk., 2021).

2.4 Ring Semiprima Bebas 2-Torsi

Pada bagian selanjutnya perhatian diarahkan pada ring yang memiliki struktur lebih khusus, yaitu ring semiprima bebas 2-torsi. Ring ini memiliki peranan penting dalam kajian derivasi dan derivasi *triple* Jordan, karena kondisi semiprima serta bebas 2-torsi memungkinkan diperolehnya sifat-sifat yang lebih kuat dan hasil-hasil yang lebih umum. Oleh karena itu, akan dibahas definisi ring semiprima bebas 2-torsi beserta karakteristik dasarnya sebagai landasan untuk pembahasan selanjutnya.

Definisi 2.4.1 Suatu ring R dikatakan semiprima apabila tidak terdapat elemen tak nol $a \in R$ sedemikian sehingga $aRa = 0$ (Sögütcü,2023).

Contoh 2.4.2 Diberikan suatu ring $\mathbb{Z}$. Ring $\mathbb{Z}$ merupakan ring semiprima, karena tidak terdapat elemen tak nol $a \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $ara = 0$, untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$.

Definisi 2.4.3 Suatu ring R dikatakan bebas 2-torsi apabila untuk setiap $a \in R$, jika $2a = 0$, maka $a = 0$ (Brešar, 1988).

Contoh 2.4.4 Diberikan suatu ring $\mathbb{Z}$ merupakan ring bebas 2-torsi, karena memenuhi $2a = 0$ dengan $a = 0$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.

2.5 Ring Polinomial

Setelah memahami konsep dasar ring, langkah berikutnya adalah memperluas pembahasan ke salah satu struktur yang dibangun dari ring yaitu ring polinomial. Berikut ini pembahasannya.

Teorema 2.5.1 Diberikan ring R dan $R[x]$ merupakan himpunan semua elemen dari $R(a_0, a_1, ...)$ sedemikian sehingga untuk semua $a_i = 0$ kecuali indeks i yang berhingga.

i. $R[x]$ adalah suatu ring dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan sebagai berikut:

$$(a_0, a_1, ...) + (b_0, b_1, ...) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ...)$$

dan

$$(a_0, a_1, ...)(b_0, b_1, ...) = (c_0, c_1, ...)$$

dengan $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}b_i = a_nb_0 + a_{n-i}b_1 + ... + a_1b_{n-i} + a_0b_n = \sum_{k+j=n} a_kb_j$.

ii. Jika R merupakan komutatif, maka $R[x]$ juga merupakan komutatif.

iii. Suatu pemetaan $R \to R[x]$ yang didefinisikan oleh $r \mapsto (r, 0, 0, ...)$ merupakan ring monomorfisma.

(Hungerford,1974).

Contoh 2.5.2 Diberikan polinomial taknol $q, s \in R[x_1, ..., x_n]$ dengan

$$q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n$$

dan

$$s(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + ... + d_mx^m$$

dengan $c_n \neq 0$ dan $d_m \neq 0$. Derajat dari q dan s adalah n dan m. Diketahui bahwa perkalian dari derajat tertinggi $q(x)$ dan $s(x)$ adalah $c_nd_mx^{n+m}$, yang tidak mungkin sama dengan nol karena R adalah suatu daerah integral. Oleh karena itu, derajat dari $q(x)s(x)$ adalah $n + m$, dan $q(x)s(x) \neq 0$. Sehingga, karena $q(x) \neq 0$ dan $s(x) \neq 0$ menunjukkan bahwa $q(x)s(x) \neq 0$, dan diketahui bahwa $R[x]$ juga merupakan suatu daerah integral (Clader dan Ross, 2025).

2.6 Modul

Dalam kajian aljabar konsep modul memberikan kerangka yang jelas untuk mempelajari struktur aljabar dan dengan adanya modul, hubungan antar ring dan stuktur tambahan lainnya dapat dianalisislebih mendalam. Untuk memahami hal tersebut, berikut pembahasannya.

Definisi 2.6.1 Diberikan ring R (tidak harus komutatif dan tidak harus memiliki elemen identitas 1). Suatu modul kiri atas R merupakan suatu himpunan M yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. suatu operasi biner $+$ pada M sehingga M adalah suatu grup Abel;
2. suatu aksi R pada M yaitu suatu pemetaan $R \times M \to M$ yang dilambangkan dengan rm, untuk setiap $r \in R$ dan untuk setiap $m \in M$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:
   a. $(r+s)m = rm + sm$, untuk setiap $r, s \in R$, $m \in M$;
   b. $(rs)m = r(sm)$, untuk setiap $r, s \in R$, $m \in M$;
   c. $r(m+n) = rm + rn$, untuk setiap $r \in R$, $m, n \in M$.
3. jika ring R memiliki element identitas 1, maka $1m = m$ untuk setiap $m \in M$

(Dummit dan Foote, 2004).

Contoh 2.6.2 Jika K adalah ring komutatif dengan elemen identitas dan elemen tak nol, maka K-modul adalah ruang vektor atas K. Hal ini karena aksioma-aksioma untuk modul sama dengan aksioma untuk ruang vektor. Dengan demikian, aljabar linear klasik merupakan bagian dari teori modrul (Assem dan Coelho, 2024).

Definisi 2.6.3 Diberikan ring R (tidak harus komutatif dan tidak harus memiliki elemen identitas 1). Suatu modul kanan atas R merupakan suatu himpunan M yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. suatu operasi biner $+$ pada M sehingga M adalah suatu grup Abel;
2. suatu aksi R pada M yaitu suatu pemetaan $M \times R \to M$ yang dilambangkan dengan mr, untuk setiap $r \in R$ dan untuk setiap $m \in M$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:
   a. $m(r+s) = mr + ms$, untuk setiap $r, s \in R$, $m \in M$;

   b. $m(rs) = (mr)s$, untuk setiap $r, s \in R$, $m \in M$;
   c. $(m + n)r = mr + nr$, untuk setiap $r \in R$, $m, n \in M$.

3. jika ring R memiliki element identitas 1, maka $m1 = m$ untuk setiap $m \in M$

(Adkins dan Weintraub, 1992).

Contoh 2.6.4 Suatu grup Abel yang sama mungkin memiliki suatu struktur R-modul untuk beberapa ring R yang berbeda dan masing-masing struktur modul ini mungkin membawa informasi yang berguna. Khususnya, jika M adalah suatu R-modul dan S adalah subring dari R dengan $1_S = 1_R$, maka M secara otomatis juga merupakan S-modul. Sebagai contoh, ring divisi yang komutatif $\mathbb{R}$ merupakan suatu $\mathbb{R}$-modul, $\mathbb{Q}$-modul, dan $\mathbb{Z}$-modul (Dummit dan Foote, 2004).

2.7 Derivasi Pada Ring

Sebelum membahas jenis-jenis derivasi, berikut ini dijelaskan terlebih dahulu mengenai definisi derivasi.

Definisi 2.7.1 Diberikan ring R. Suatu fungsi $d : R \to R$ disebut derivasi pada R jika:

1. $d(a + b) = d(a) + d(b)$;
2. $d(ab) = d(a)b + ad(b)$

untuk setiap $a, b \in R$ (Ernanto, 2018).

Untuk lebih memahami pengertian pengertian derivasi, berikut akan diberikan contoh derivasi pada ring.

Contoh 2.7.2 Diberikan ring $\mathbb{Z}$. Didefinisikan $d : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dengan $d(a) = 0$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa d merupakan derivasi pada ring $\mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, dapat diperhatikan bahwa

$$d(a + b) = 0 = 0 + 0 = d(a) + d(b),$$

dan

$$d(ab) = 0 = 0 + 0 = 0 \cdot b + a \cdot 0 = d(a)b + ad(b).$$

Karena d memenuhi Definisi 2.7.1. Jadi, terbukti bahwa d merupakan derivasi pada ring $\mathbb{Z}$

Contoh 2.7.3 Diberikan sebarang $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$ dan pemetaan $\delta : M_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ dengan $\delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$. Perhatikan bahwa untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ berlaku:

$$\delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = \delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + \delta\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right),$$

dan

$$\delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = \delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\delta\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right).$$

Berdasarkan hal tersebut, pemetaan δ merupakan derivasi pada $M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ (Ernanto, 2018).

2.8 Derivasi *inner* Pada Ring

Sebagai bentuk khusus dari derivasi pada ring, diperkenalkan konsep derivasi *inner* yang memiliki peranan penting dalam kajian struktur aljabar.

Definisi 2.8.1 Diberikan suatu ring R. Didefinisikan pemetaan $d : R \to R$ disebut derivasi *inner* apabila terdapat $x \in R$ yang memenuhi $d(a) = [a, x] = xa - ax$, untuk setiap $a \in R$ (Waluyo dkk., 2025).

Contoh 2.8.2 Diberikan ring $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$. Didefinisikan pemetaan $d : M_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ disebut derivasi *inner* apabila terdapat $X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ yang memenuhi $d(A) = [A, X] = XA - AX$, untuk setiap $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$. Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ Akan ditunjukkan bahwa d bersifat aditif.

$$
\begin{aligned}
d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) + d\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) &= \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&\quad + \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a_1 & b_1 \\ -c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) \\
&\quad + \left(\begin{bmatrix} -a_2 & -b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a_2 & b_2 \\ -c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & -2b_1 \\ 2c_1 & 0 \end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix} 0 & -2b_2 \\ 2c_2 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -2b_1 - 2b_2 \\ 2c_1 2c_2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= d\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= d\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa d memenuhi aturan Leibniz.

$$
\begin{aligned}
d(A)B + Ad(B) &= [A, X]B + A[B, X] \\
&= (XA - AX)B + A(XB - BX) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -2b_1 \\ 2c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2b_2 \\ 2c_2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2b_1c2 & -2b_1d_2 \\ 2c_1a_2 & 2c_1b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b_1c2 & -2a_1b_2 \\ 2d_1c_2 & -2c_1b_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -(2b_1d_2 + 2a_1b_2) \\ 2c_1a_2 + 2d_1c_2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -a_1a_2 - b_1c_2 & -a_1b_2 - b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_1a_2 - b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ -c_1a_2 - d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \\
&= d\left(\begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix} \right) \\
&= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) \\
&= d(AB).
\end{aligned}
$$

Karena $d(AB) = d(A)B - Ad(B)$. Jadi, terbukti bahwa d merupakan derivasi *inner* pada $M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$.

2.9 Derivasi Jordan Pada Ring

Setelah membahas konsep derivasi pada ring, selanjutnya diperkenalkan konsep derivasi Jordan yang merupakan bentuk perluasan dari derivasi pada ring.

Definisi 2.9.1 Derivasi Jordan pada ring yang lebih umum yang digunakan adalah pemetaan aditif pada ring R yang memenuhi:

$$d(a \cdot a) = d(a) \cdot a + a \cdot d(a)$$

untuk setiap $a, \in R$ (Ali dkk.,2024).

Teorema 2.9.2 Diberikan ring semiprima bebas 2-torsi R. Jika $d : R \to R$ merupakan derivasi Jordan, maka d adalah derivasi (Ali dkk., 2024).

Contoh 2.9.3 Suatu pemetaan $d : R \to R$, dengan $d(x) = \lambda,$ untuk setiap $x \in R$ dan $\lambda \in R$, dengan λ adalah konstanta. Akan ditunjukkan bahwa d derivasi Jordan pada R.

Suatu pemetaan $d : R \to R$, sebagai:

$$d(x) = \lambda$$

untuk setiap $x \in R$ dan $\lambda \in R$.

Akan ditunjukkan bahwa $d(x^2) = d(x)x + xd(x)$.

$$\begin{aligned} d(x^2) &= \lambda(2x) \\ &= 2\lambda x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x)x + xd(x) &= (\lambda)x + x(\lambda) \\ &= \lambda x + \lambda x \\ &= 2\lambda x. \end{aligned}$$

Karena $d(x^2) = d(x)x + xd(x)$. Jadi, terbukti d merupakan derivasi Jordan pada R.

Contoh 2.9.4 Jika R adalah ring polinomial $R[x]$. Suatu pemetaan $d : R[x] \to R[x]$, dengan $d(f(x)) = f'(x)$ untuk setiap $f(x) \in R[x]$ dan $x \in R$. Perhatikan bahwa $f'(x)$ merupakan turunan biasa pada kalkulus. Akan ditunjukkan bahwa d derivasi Jordan.

Didefinisikan suatu pemetaan $d : R[x] \to R[x]$, dengan $d(f(x)) = f'(x)$ dan $f(x) = x$, untuk setiap $x \in R$.

Akan ditunjukkan bahwa $d(x^2) = d(x)x + xd(x)$.

$$\begin{aligned} d(x^2) &= (x^2)' \\ &= 2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x)x + xd(x) &= (x)'x + x(x)' \\ &= 1 \cdot x + x \cdot 1 \\ &= x + x \\ &= 2x. \end{aligned}$$

Karena $d(x^2) = d(x)x + xd(x)$.

Jadi terbukti bahwa d merupakan derivasi Jordan pada $R[x]$.

Contoh 2.9.5 Diberikan ring $M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$. Didefinisikan pemetaan $d : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z})$, dengan $d(A) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ untuk setiap $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Akan ditunjukkan bahwa d merupakan derivasi Jordan.

Didefinisikan suatu pemetaan $d : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z})$ dengan $d(A) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ untuk setiap $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.

Akan ditunjukkan $d(A^2) = d(A)A + Ad(A)$.

$$\begin{aligned} d(A^2) &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a^2 & ab + bd \\ 0 & d^2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & ab + bd \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d(A)A + Ad(A) &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & bd \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & ab \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & bd + ab \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & ab + bd \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Karena $d(A^2) = d(A)A + Ad(A)$, maka d merupakan derivasi Jordan pada $M_2(\mathbb{R})$.

Salah satu contoh yang akan ditunjukkan sebagai derivasi Jordan yaitu derivasi *inner*. Berikut ini akan diperlihatkan apakah derivasi *inner* dapat dikatakan sebagai derivasi Jordan juga.

Contoh 2.9.6 Suatu pemetaan $d : R \to R$, dengan $d(x) = [x, a], \forall x \in R$ dan $a \in R$. Jika d adalah derivasi *inner*, akan ditunjukkan bahwa d juga derivasi Jordan.

Didefinisikan pemetaan $d : R \to R$, sebagai:

$$d(x) = [x, a] = ax - xa$$

untuk setiap $x \in R$ dan $a \in R$.

Akan ditunjukkan bahwa $d(x^2) = d(x)x + xd(x)$.

$$
\begin{aligned}
d(x^2) &= [x^2, a] \\
&= ax^2 - x^2a.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d(x)x + xd(x) &= [x, a]x + x[x, a] \\
&= (ax - xa)x + x(ax - xa) \\
&= ax^2 - xax + xax - x^2a \\
&= ax^2 - x^2a.
\end{aligned}
$$

Karena $d(x^2) = d(x)x + xd(x)$, sehingga terbukti bahwa jika d adalah derivasi *inner* maka d merupakan derivasi Jordan pada R.

2.10 Derivasi *Triple* Jordan pada Ring

Dari derivasi Jordan pada ring, penelitian terkait derivasi Jordan terus berlanjut dan berkembang. Kemudian, Brešar (1988) telah mulai meneliti derivasi *triple* Jordan dalam konteks ring, terinspirasi oleh derivasi Jordan. Berikut definisi dari derivasi *triple* Jordan.

Definisi 2.10.1 Diberikan suatu pemetaan aditif $d : R \to R$ memenuhi $d(aba) = d(a)ba + ad(b)a + abd(a)$, untuk setiap $a, b \in R$ (Brešar,1988).

Teorema 2.10.2 Diberikan ring semiprima bebas 2-torsi R. Jika $\delta : R \to R$ merupakan derivasi *triple* Jordan, maka δ juga merupakan derivasi (Hongan dkk., 2011).

Contoh 2.10.3 Diberikan ring $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ dan pemetaan $d : M_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ merupakan derivasi *triple* Jordan dengan $d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$.

Contoh 2.10.4 Diberikan ring M merupakan matriks segitiga atas. Didefinisikan pemetaan $d : R \to R$, dengan $d(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ dan $P = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$. Akan ditunjukkan bahwa d merupakan derivasi *triple* Jordan.

Didefinisikan suatu pemetaan $d : R \to R$ dengan $d(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}$ dan $d(Q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$. Misalkan $P = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$, untuk setiap $P, Q \in R$.

Akan ditunjukkan $d(PQP) = d(P)QP + Pd(Q)P + PQd(P)$.

$$\begin{aligned} d(PQP) &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ 0 & d_1d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a_1a_2a_1 & a_1a_2b_1 + a_1b_2d_1 + b_1d_2d_1 \\ 0 & d_1d_2d_1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_1d_2d_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} d(P)QP &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_1d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_1d_2d_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pd(Q)P &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b_1d_2 \\ 0 & d_1d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b_1d_2d_1 \\ 0 & d_1d_2d_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PQd(P) &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ 0 & d_1d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a_1b_2d_1 + b_1d_2d_1 \\ 0 & d_1d_2d_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d(P)QP + Pd(Q)P + PQd(P) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_1d_2d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_1d_2d_1 \\ 0 & d_1d_2d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_1b_2d_1 + b_1d_2d_1 \\ 0 & d_1d_2d_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & a_1b_2d_1 + 2(b_1d_2d_1) \\ 0 & 3(d_1d_2d_1) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Karena $d(PQP) \neq d(P)QP + Pd(Q)P + PQd(P)$, maka d bukan derivasi *triple* Jordan pada R.

BAB III

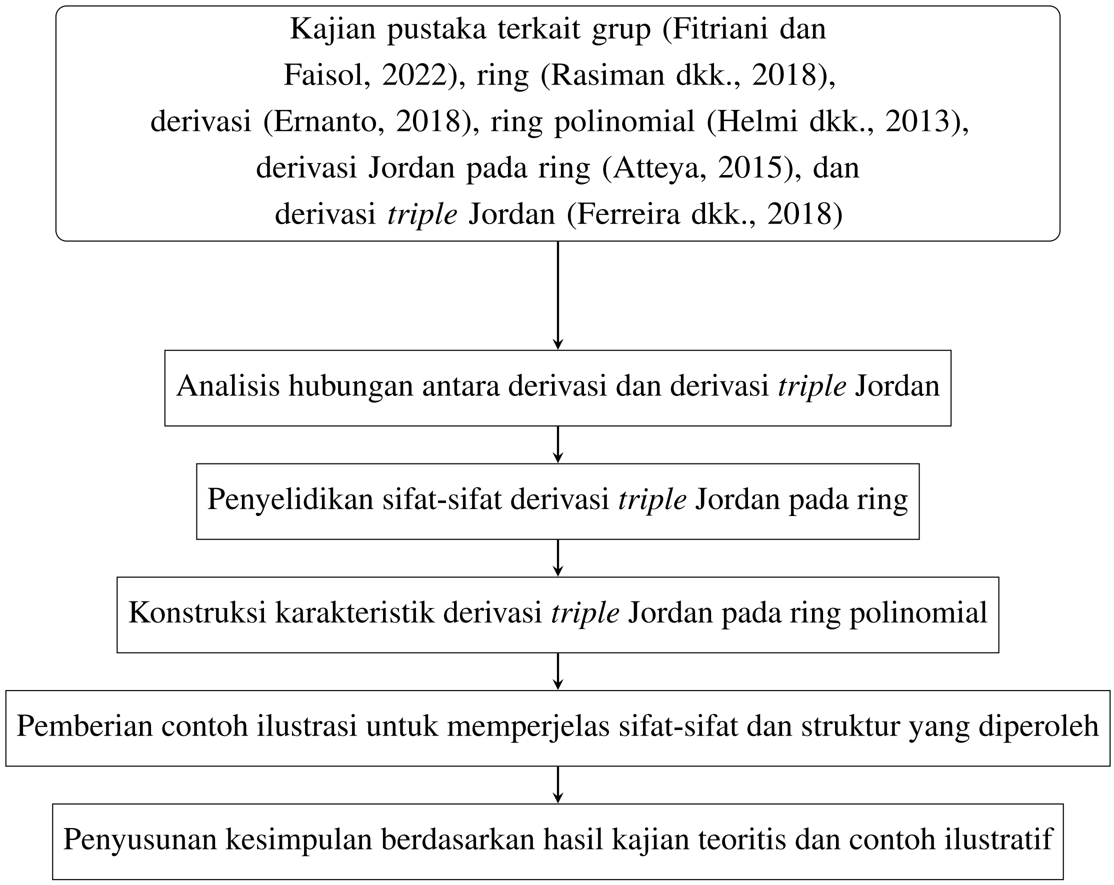
METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur dan analisis teoritis, dengan mengumpulkan referensi seperti jurnal, artikel ilmiah, buku, dan sumber-sumber lain yang berkaitan dengan penelitian ini. Secara umum, langkah-langkah pada penelitian ini adalah sebagai berikut.



Gambar 3.1 Langkah-langkah penelitian

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan yang telah diuraikan, dapat disimpulkan bahwa derivasi *triple* Jordan memiliki hubungan yang sangat erat dengan derivasi, demikian pula sebaliknya. Derivasi *triple* Jordan juga memenuhi sifat-sifat dasar yang berlaku pada ring. Selanjutnya, kajian ini diperluas pada ring polinomial, dan ditunjukkan bahwa setiap derivasi triple Jordan pada ring polinomial memenuhi definisi derivasi *triple* Jordan. Secara keseluruhan, hasil-hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa derivasi *triple* Jordan memiliki sifat-sifat yang konsisten dan dapat diterapkan pada berbagai struktur aljabar yang dibahas dalam penelitian ini.

5.2 Saran

Berdasarkan penelitian ini, disarankan penelitian selanjutnya dapat dikembangkan pada ring non-komutatif serta ring polinomial dengan lebih dari satu variabel. Pengembangan tersebut diharapkan dapat memperluas pemahaman mengenai hubungan antarvariabel serta sifat dan karakter derivasi *triple* Jordan pada berbagai konstruksi aljabar lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, W. A., & Weintraub, S. H. (1992). *Algebra: An Approach Via Module Theory*. New York: Springer.

Ali, S., Rafiquee, N. N., & Varshney, V. (2024). Certain Types of Derivation in Rings A Suvey. *Journal Indonesia Math. Soc*, Vol.30, 2:256-306.

Apriyani, D. C. N. (2024). *Buku Ajar Teori Ring*. Pacitan: LPPM Press STKIP PGRI Pacitan.

Assem, I., & Coelho, F. U. (2024). An Introduction to Module Theory. New York: Oxford University Press.

Atteya, M. J. (2015). A Note on Generalized Jordan Derivations in Semiprime Rings. *Mathematics and Statistics*, 3(1), 7-9.

Bagheri, A., & Emami, H. (2022). The Applications of Algebraic Polynomial Rings in Satellite Coding and Cryptography. *Mathematics Interdisciplinary Research*, 7, 301-329.

Bhushan, B., Sandhun, S. G., Ali, S., & Kumar, D. (2023). On Centrally Extended Jordan Derivations And Related Maps In Rings. *Hacet. J. Math. Stat.*, 52(1), 23-25.

Brešar, M. (1988). Jordan Derivations of Semiprime Rings. *Proceedings of The American Mathematical Society*, Vol. 104, No. 4, 1003-1006.

Brešar, M. (1989). Jordan Mappings of Semiprime Rings. *Journal of Algebra*, Vol. 127, No. 1, 218-228.

Clader, E., & Ross, D. (2025). *Beginning in Algebraic Geometry*. New York: Springer.

Darvish, V., Nouri, M., Razeghi, M., & Taghavi, A. (2020). Nonlinear $*$-Jordan triple Derivation On Prime $*$-Algebras. *Journal Of Mathematics*, 50(2), 543-549.

Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.

Ernanto, I. (2018). Sifat-Sifat Ring Faktor yang Dilengkapi Derivasi. *JFMA*, Vol.1, No.1, 12-21.

Ferreira, R. N., & Ferreira, B. L. M. (2018). Jordan Triple Derivation on Alternative Rings. *Proyecciones Journal of Mathematics*, 37(1), 171-180.

Fitriani, & Faisol, A. (2022). *Grup*. Matematika: Yogyakarta.

Fitriani, Wijayanti, I. E., Faisol, A., & Ali, S. (2025a). On f-derivation on Polynomial Modules. *Journal of Algebra and Its Applications*, 24(6), 2550155(1-14).

Fitriani, Wijayanti, I. E., Faisol, A., & Ali, S. (2025b). Commuting and Centralizing Maps on Modules. *Science and Technology Indonesia*, vol.10, no.3, 690-697.

Helmi, M. R., Marubayashi, H., & Ueda, A. (2013). Differential Polynomial Rings Which Are Generalized Asano Prime Rings. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 44(5), 673-681.

Hongan, M., Rehman, N. U., & Al-Omary, R. M. (2011). Lie Ideals and Jordan Triple Derivations in Rings. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 125, 147-156.

Hungerford, T. W. (1974). *Algebra*. New York: Springer.

Khalaf, A. A., Artemovych, O. D., & Taha, I. (2018). Rings with simple Lie rings of Lie and Jordan derivations. *Journal of Algebra and Its Applications*, 27(4), 1850078(1-11).

Li, Y., & Wei, F.(2018). Jordan Derivations of Generalized One Point Extensions. *Filomat*, 32(11), 4089-4098.

Ma, A., Chen, L., & Qin, Z. (2022). Jordan Semi-Triple Derivations and Jordan Centralizers on Generalized Quaternion Algebras. *AIMS Mathematics*, Vol. 8, No.3, 6026-6035.

Mehdipour, M. J., Moghimi, GH. R., & Salkhordeh, N. (2023). Jordan derivations on certain Banach algebras. *Math. FA*, 1-10.

Mishra, S. C., mondal, D., & Shukla, P. (2025). Classes Of Simple Derivations On Polynomial Rings $k[x_1, x_2, ..., x_n]$. *Math. AC.*, 1-12.

Rahnaward, A. R., Kaheshzad, S., & Rahimi, S. (2024). Non-Linear λ-Jordan Triple Derivation on Prime Algebras. *Journal for Research in Applied Sciences and Biotecnology*, Vol.3, No.5, 303-306.

Rasiman, Rubowo, M. R., & Pramasdyahsari, A. S. (2018). *Teori Ring*. Semarang: UPGRIS PRESS.

Rehman, N. U. (2013). Jordan Triple $(\alpha, \beta)*$-Derivations On Semiprime rings with Involution. *Hacet. J. Math. Stat*, 42(6), 641-651.

Sayin, U., & Kuzucuoglu, F. (2019). Jordan Derivations of Special Subrings of Matrix Rings. *Algebra Colloquium*, 26(1), 83-92.

Side, S., Abdy, M., & Uniarti, A. (2021). Jumlahan Langsung pada Ring. *JMathCos*, Vol. 4, No. 1, 39-46.

Sitompul, D. E., Fitriani, Chasanah, S. L., & Faisol, A. (2025). Jordan Derivations on the Polynomial Ring $R[x]$. *Integra: Journal of Integrated Mathematics and Computer Science*, 2(2), 41-47.

Sögütcü, E. K. (2023). A Characterization of Semiprime Rings with Homoderivations. *Journal of New Theory*, Vol. 42, 14-28.

Suryanti, S. (2017). *Teori Grup (Struktur Aljabar 1)*. Gresik: UMG Press.

Thomas, A. B., Puspita, N. P., & Fitriani, F. (2024). Derivation on Several Rings. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 18(3), 1729-1738.

Waluyo, R., Faisol, A., & Fitriani. (2025). (σ, τ)-Derivasi pada ring grup. *EULER: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, Vol. 13, No. 2, 142-146.

Zhao, X., & Qi, X. (2017). Characterization Of Jordan $*$-Derivations By Local Action On Rings With Involution. *Journal of Hyperstructures*, 6(2), 120-127.