HUBUNGAN DERIVASI JORDAN DAN DERIVASI NILPOTEN PADA RING SEMIPRIMA BEBAS 2-TORSI

Skripsi

Oleh

RAHMAH MUTIARA AYU NINGTIYAS
NPM. 2217031048

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

ABSTRACT

THE CONNECTION BETWEEN JORDAN DERIVATIONS AND NILPOTENT DERIVATIONS ON 2-TORSION-FREE SEMIPRIME RINGS

By

Rahmah Mutiara Ayu Ningtiyas

This research investigates the relationship between Jordan derivations and nilpotent derivations on 2-torsion free semiprime rings. A 2-torsion free semiprime ring is a class of rings that exhibits strong structural stability under Jordan identities and is also relevant in the study of nilpotency properties of derivations. Based on the result of Bresar, every Jordan derivation on a 2-torsion free semiprime ring is shown to be an ordinary derivation. On the other hand, Chung and Luh proved that the nilpotency index of a nilpotent derivation on a 2-torsion free semiprime ring is always an odd integer. These results provide a foundation to examine the interplay of derivation properties on 2-torsion free semiprime rings, particularly in the context of Jordan derivations and nilpotent derivations. The method used in this research is a literature study with a deductive approach through mathematical proofs and the construction of examples to clarify the obtained results. This research is expected to strengthen the understanding of the structure of 2-torsion free semiprime rings in derivation theory and to serve as a basis for further studies in ring theory.

Keywords: semiprime ring, 2-torsion free, Jordan derivation, nilpotent derivation, nilpotency index.

ABSTRAK

HUBUNGAN DERIVASI JORDAN DAN DERIVASI NILPOTEN PADA RING SEMIPRIMA BEBAS 2-TORSI

Oleh

Rahmah Mutiara Ayu Ningtiyas

Penelitian ini mengkaji hubungan antara derivasi Jordan dan derivasi nilpoten pada ring semiprima bebas 2-torsi. Ring semiprima bebas 2-torsi merupakan kelas ring yang memiliki kestabilan struktural kuat terhadap identitas Jordan dan sekaligus relevan dalam pembahasan sifat nilpotensi derivasi. Berdasarkan hasil Bresar, setiap derivasi Jordan pada ring semiprima bebas 2-torsi terbukti merupakan derivasi biasa. Di sisi lain, hasil Chung dan Luh menunjukkan bahwa indeks nilpotensi derivasi pada ring semiprima bebas 2-torsi selalu berupa bilangan ganjil. Kedua hasil tersebut memberikan landasan untuk meninjau keterkaitan sifat-sifat derivasi pada ring semiprima bebas 2-torsi, khususnya dalam konteks perilaku derivasi Jordan dan derivasi nilpoten. Metode yang digunakan adalah studi literatur dengan pendekatan deduktif melalui pembuktian matematis dan penyusunan contoh untuk memperjelas hasil-hasil yang diperoleh. Penelitian ini diharapkan memperkuat pemahaman mengenai struktur ring semiprima bebas 2-torsi dalam kajian derivasi serta menjadi dasar bagi pengembangan penelitian lanjutan pada teori ring.

Kata-kata kunci: ring semiprima, bebas 2-torsi, derivasi Jordan, derivasi nilpoten, indeks nilpotensi.

HUBUNGAN DERIVASI JORDAN DAN DERIVASI NILPOTEN PADA RING SEMIPRIMA BEBAS 2-TORSI

RAHMAH MUTIARA AYU NINGTIYAS

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

Judul Skripsi : **Hubungan Derivasi Jordan dan Derivasi Nilpoten pada Ring Semiprima Bebas 2-Torsi**

Nama Mahasiswa : **Rahmah Mutiara Ayu Ningtiyas**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031048**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP 198406272006042001

Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.
NIP 198002062003121003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	:	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Sekretaris	:	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **29 Januari 2026**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Rahmah Mutiara Ayu Ningtiyas**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031048**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Hubungan Derivasi Jordan dan Derivasi Nilpoten pada ring Semiprima Bebas 2-Torsi**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 29 Januari 2026
Penulis,

Rahmah Mutiara Ayu Ningtiyas

RIWAYAT HIDUP

Penulis yang bernama lengkap Rahmah Mutiara Ayu Ningtiyas lahir di Bandar Lampung pada tanggal 25 Maret 2004. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara, putri dari pasangan Bapak Asmuni Arniawan dan Ibu Puji Yanti. Dalam keluarganya, penulis memiliki seorang kakak bernama Ananda Aldi Wiranata serta seorang adik bernama Rahmah Habibah Ayu Ningrum.

Penulis memulai pendidikan di SD Negeri 1 Way Lunik, Bandar Lampung pada tahun 2009. Pada tahun 2012, penulis pindah ke SD Negeri 2 Way Gubak, Bandar Lampung dan menyelesaikan pendidikan dasar pada tahun 2015. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan tingkat menengah pertama di MTs Darul Huda, Bandar Lampung dan menamatkannya pada tahun 2018. Pendidikan tingkat menengah atas semula ditempuh di SMK PSM 2 Kawedanan, Jawa Timur dengan jurusan Akuntansi pada tahun 2018. Namun, pada tahun berikutnya penulis memutuskan untuk kembali ke Bandar Lampung dan melanjutkan pendidikan di MAN 2 Bandar Lampung hingga akhirnya menyelesaikan studi pada tahun 2022.

Pada tahun 2022, penulis diterima di Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN). Selama menempuh studi, penulis aktif tidak hanya dalam bidang akademik, tetapi juga kegiatan organisasi dan pengabdian kepada masyarakat.

Pada tahun 2023, penulis memperluas pengalaman dengan menjadi anggota Dana dan Usaha Rois FMIPA Unila, anggota Kemuslimahan Birohmah, serta mengikuti program magang di departemen informasi dan komunikasi KMNU Unila. Pada tahun yang sama, penulis juga aktif dalam bidang akademik dengan menjadi Mentor Kalkulus Mafia (Mentoring of Himatika) sebagai wadah berbagi ilmu dan memperkuat pemahaman dalam bidang matematika. Selain itu, penulis membuka les Matematika di rumah serta mengajar sebagai guru privat secara *freelance* yang berlangsung hingga sekarang. Tahun 2024 penulis dipercaya menjabat sebagai

Wakil Sekretaris Umum KMNU Unila, dan pada tahun 2025 penulis terpilih sebagai Sekretaris Umum KMNU Unila. Pada tahun 2026, penulis kembali dipercaya untuk berkhidmah sebagai MPO KMNU Unila.

Pada awal tahun 2025, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 30 hari di Desa Mekar Mulya, Kecamatan Palas, Kabupaten Lampung Selatan pada 09 Januari 2025 - 09 Februari 2025. Sebagai bentuk pengabdian dan penerapan ilmu di dunia kerja, penulis juga melaksanakan Kerja Praktik (KP) di PT Centralpertiwi Bahari, Kabupaten Tulang Bawang, Provinsi Lampung, selama 40 hari yang dimulai pada tanggal 23 Juni 2025 hingga 01 Agustus 2025.

Dalam keseluruhan perjalanan studi, penulis senantiasa berusaha menumbuhkan sikap disiplin, tanggung jawab, dan dedikasi dalam setiap kegiatan akademik maupun non-akademik. Penulis berharap karya penelitian ini tidak hanya memenuhi syarat akademik, tetapi juga memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya di bidang Struktur Aljabar.

KATA INSPIRASI

“Barangsiapa menginginkan dunia, hendaklah ia berilmu. Barangsiapa menginginkan akhirat, hendaklah ia berilmu. Barangsiapa menginginkan keduanya, hendaklah ia berilmu.”
Imam Syafi’i

“Ilmu adalah cahaya, dan cahaya Allah tidak diberikan kepada pelaku maksiat.”
Imam Syafi’i

“Hati takkan tenang kecuali dengan mengingat Allah.”
Ibnu Qayyim Al-Jauziyyah

“Ilmu tanpa adab adalah kegilaan, adab tanpa ilmu adalah kesia-siaan.”
Imam Malik

“Sabar adalah separuh iman, syukur adalah separuhnya lagi.”
Ibnu Qayyim Al-Jauziyyah

“Hidup tanpa ilmu seperti berjalan dalam kegelapan.”
Imam Ahmad bin Hanbal

“Ilmu tanpa amal adalah kesombongan, amal tanpa ilmu adalah kebodohan.”
Imam Abu Hanifah

“Hati yang bersih adalah hati yang hanya ada Allah di dalamnya.”
Imam Al-Ghazali

PERSEMBAHAN

Alhamdulillāhi rabbil ‘ālamīn.
Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Subhanahu wa Ta‘ālā atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik dan tepat waktu.
Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallāhu ‘Alaihi Wasallam.
Dengan penuh rasa syukur dan bahagia, penulis mempersembahkan ucapan terima kasih yang tulus kepada:

Bapak dan Ibuku Tercinta

Terima kasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terima kasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas atas segala bimbingan, arahan, motivasi, serta ilmu yang berharga selama proses penyusunan skripsi ini. Segala dukungan yang diberikan menjadi bekal berharga bagi penulis.

Sahabat-sahabatku Tersayang

Terima kasih kepada semua orang-orang baik atas doa, semangat, motivasi, serta kebersamaan yang selalu menguatkan penulis dalam setiap langkah. Kehadiran kalian menjadi bagian penting dalam perjalanan ini.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Hubungan Derivasi Jordan dan Derivasi Nilpoten pada Ring Semiprima Bebas 2-Torsi ” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW. Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing I, atas kesabaran, ketulusan, serta kesediaan beliau dalam meluangkan waktu untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran, dan dukungan selama proses penyusunan skripsi ini. Bimbingan dan ketelatenan beliau menjadi sumber semangat yang sangat berarti sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.

2. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing 2 yang telah memberikan arahan, dukungan, serta doa sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan saran, kritik, serta evaluasi yang membangun sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

5. Ibu Dra. Dorrah Azis, M.Si. selaku dosen pembimbing akademik yang senantiasa memberikan arahan, nasihat, dan bantuan dalam berbagai urusan akademik selama masa perkuliahan.

6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh guru TK, SD, SMP, dan SMA yang telah mengajarkan dan memberikan ilmu hingga penulis bisa menduduki bangku perkuliahan.
8. Bapak, Mama, Mas Nanda, Ningrum, serta Keluargaku yang selalu memberikan kasih sayang, dukungan, dan doa yang tiada henti. Kehadiran keluarga menjadi sumber kekuatan, semangat, serta motivasi terbesar bagi penulis, sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat waktu.
9. Sahabat-sahabat tercinta Alfara dan Alya Syakira yang senantiasa menjadi support system terbaik. Kehadiran mereka membawa semangat, keceriaan, serta kekuatan di setiap langkah perjalanan penulis.
10. RACHVIN yang terdiri dari Selvi Diana Dwi Rinanda, Rachma Allya Shieffa, Amalia Soleha, dan Intan Arimbi Putri. Terima kasih atas kebersamaan, tawa, cerita, serta semangat yang tidak pernah putus diberikan. Persahabatan yang terjalin telah menjadi penguat dan penghibur dalam setiap langkah, sehingga perjalanan studi ini terasa lebih ringan dan penuh warna.
11. *Derivations Squad* atas kebersamaan, dukungan, dan semangat yang selalu diberikan. Setiap diskusi dan cerita bersama menjadi pengalaman berharga yang memperkaya perjalanan penulis selama menempuh pendidikan serta menjadi sumber inspirasi untuk terus melangkah.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung,

Rahmah Mutiara

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam perkembangan aljabar modern, pemahaman mengenai struktur suatu ring tidak dapat dilepaskan dari kajian terhadap pemetaan yang bekerja di dalamnya. Salah satu pemetaan yang fundamental adalah derivasi, yang diperkenalkan sebagai analog aljabar dari turunan dalam kalkulus dan memenuhi aturan Leibniz. Derivasi tidak hanya berfungsi sebagai alat untuk mengeksplorasi sifat-sifat internal ring, tetapi juga berperan dalam memahami struktur ideal, komutativitas, serta identitas polinomial yang mungkin muncul. Oleh sebab itu, kajian tentang derivasi menjadi salah satu pendekatan penting dalam memahami karakteristik struktural ring.

Kajian mengenai derivasi pada ring telah berkembang melalui hasil-hasil klasik yang saling berkaitan dan menjadi fondasi bagi penelitian lanjutan. Herstein (1963) menelaah sifat komutator pada ring sederhana dan menemukan fenomena tertentu yang berkaitan dengan kemunculan sifat nilpotensi berindeks ganjil pada komutator. Fenomena ini kemudian mendorong penelitian selanjutnya, di antaranya oleh Chung dan Luh (1983), yang mengkaji kondisi-kondisi nilpotensi derivasi serta mengembangkan karakterisasi yang relevan pada konteks ring dengan struktur tertentu, termasuk pada ring semiprima bebas 2-torsi. Di sisi lain, Bresar (1988) menunjukkan bahwa pada ring semiprima bebas 2-torsi, setiap derivasi Jordan merupakan derivasi. Kesamaan asumsi struktural pada ring semiprima bebas 2-torsi dalam berbagai hasil tersebut menunjukkan adanya keterkaitan yang kuat antara sifat nilpotensi, dan identitas Jordan, sehingga menarik untuk ditinjau lebih lanjut melalui kajian hubungan derivasi Jordan dan derivasi nilpoten pada kelas ring tersebut.

Seiring perkembangan, penelitian mengenai derivasi semakin meluas pada berbagai struktur aljabar. Ernanto (2018) memperlihatkan peran derivasi dalam mempertajam karakteristik struktural ring faktor. Fitriani dkk. (2022) mengembangkan konsep f*-derivations* pada modul polinomial, yang menunjukkan bahwa derivasi dapat dimodifikasi tanpa kehilangan peran strukturnya. Thomas dkk. (2024) menegaskan bahwa perilaku derivasi sangat dipengaruhi oleh sifat dasar ring, sedangkan Ali dkk. (2024) menyajikan kajian survei komprehensif mengenai berbagai jenis derivasi dan menempatkan riset derivasi sebagai salah satu arus utama dalam aljabar modern. Pada konteks yang lebih spesifik, Faisol dan Fitriani (2025) mengkaji derivasi dan pemetaan linear pada *skew generalized power series modules*, Mursyidah dkk. (2025) meneliti derivasi nil pada ring polinomial serta hubungannya dengan ideal tertentu, dan Waluyo dkk. (2025) mengkaji mengenai (σ, τ)-derivasi pada ring grup. Berbagai hasil tersebut menegaskan bahwa derivasi tidak bersifat universal, melainkan sangat dipengaruhi oleh struktur internal ring yang dikaji.

Selain derivasi, perhatian terhadap derivasi Jordan dan generalisasinya juga berkembang secara signifikan. Hongan dan Rehman (2012) meneliti generalisasi Jordan $*$-derivasi pada ring semiprima dengan involusi dan menunjukkan pengaruh sifat involutif terhadap karakter derivasi. Das dkk. (2020) memperluas kajian tersebut pada konteks ring semiprima Γ melalui studi *Jordan right derivations* yang mempertahankan sejumlah sifat struktural utama dari operator Jordan. Selanjutnya, Karim (2022) mengkaji generalisasi *Jordan centralizerhomo* pada ring prima, sedangkan Ekrami (2022) mengembangkan pendekatan baru untuk derivasi Jordan orde tinggi yang menjadi langkah awal pengembangan operator diferensiasi tingkat tinggi dalam ring.

Kajian ini diperluas oleh Alali dkk. (2023) melalui penelitian tentang *centrally-extended Jordan* $*$*-derivations* pada elemen simetris maupun *skew*, yang memberikan perspektif baru mengenai perluasan sentral. Selanjutnya, Bera dan Dhara (2023) meneliti perilaku homoderivasi Jordan sebagai generalisasi derivasi pada ring prima. Bhushan dkk. (2023) memberikan kontribusi melalui kajian mengenai *centrally-extended generalized Jordan derivations* dalam konteks ring umum dan menunjukkan bahwa perluasan sentral memainkan peran penting dalam klasifikasi derivasi. Selain itu, Ma dkk. (2023) memperluas ruang eksplorasi dengan membahas derivasi Jordan *semi-triple* dan *Jordan centralizers* pada aljabar *quaternion* tergeneralisasi yang memiliki struktur non-asosiatif.

Pada tahun-tahun berikutnya, perhatian terhadap derivasi Jordan berlanjut pada aspek-aspek yang lebih mendalam. Malleswari dan Sreenivasulu (2024) mengkaji *skew Jordan product* serta generalisasi derivasi pada ring prima dengan involusi, sedangkan Ahmed dkk. (2024) memberikan karakterisasi terhadap bi-derivasi Jordan tipe (α, β) pada ring prima. Penelitian mengenai *mixed Jordan-type derivations* semakin berkembang melalui karya Madni dkk. (2025) dan Ren dan Zhang (2025). Shujat dkk. (2025) mengeksplorasi *weak* (p, q)*-Jordan centralizer* dan derivasi pada ring dan aljabar. Sitompul dkk. (2025) turut memperkaya kajian ini melalui penelitian mengenai derivasi Jordan pada ring polinomial. Rangkaian hasil tersebut memperlihatkan bahwa pemetaan Jordan tetap menjadi tema riset yang aktif dalam kajian aljabar modern.

Selain bidang derivasi Jordan, penelitian mengenai derivasi nilpoten, baik lokal maupun global, juga mengalami perkembangan yang signifikan. Konsep nilpotensi memiliki peran penting dalam menentukan sifat struktur ring, khususnya terkait pembentukan ideal dan kestabilan struktur aljabar. Hattori dan Kojima (2024) mengkaji ring yang elemen-elemen nilpotennya dihasilkan oleh derivasi monomial pada ring polinomial dan memperlihatkan interaksi antara struktur monomial dan sifat nilpotensi. Sun dan Wang (2024) meneliti citra derivasi lokal-nilpoten pada aljabar polinomial bivariabel serta menunjukkan bahwa nilpotensi lokal berperan besar dalam menentukan struktur invariannya. Kajian yang lebih mendalam dilakukan oleh Dasgupta dan Gaifullin (2025) melalui karakterisasi baru mengenai derivasi lokal-nilpoten pada aljabar polinomial tiga variabel. Rangkaian penelitian ini memperlihatkan bahwa pemahaman mengenai derivasi nilpoten masih berkembang dan menyimpan banyak ruang eksplorasi.

Fakta menunjukkan bahwa topik derivasi Jordan masih aktif dikaji dan terus mengalami perkembangan pesat. Walaupun demikian, pemetaan keterhubungan antara derivasi Jordan, derivasi nilpoten, dan struktur ring semiprima bebas 2-torsi belum mendapatkan perhatian yang memadai. Penelitian sebelumnya cenderung berfokus pada ring prima atau ring dengan involusi, atau berkonsentrasi pada struktur nilpotensi derivasi pada ring tertentu. Di sisi lain, interaksi antara derivasi Jordan dan derivasi nilpoten sebagai satu kesatuan konsep belum dijelaskan secara sistematis pada ring semiprima bebas 2-torsi. Padahal, hasil Bresar (1988), Herstein (1963), serta Chung dan Luh (1984) secara kolektif mengisyaratkan adanya hubungan struktural yang kuat antara identitas Jordan dan sifat nilpotensi dalam ring. Ketidakjelasan ini menunjukkan adanya ruang riset penting yang masih terbuka.

Kesenjangan penelitian tersebut mendorong perlunya analisis yang lebih mendalam mengenai hubungan antara derivasi Jordan dan derivasi nilpoten pada ring semiprima bebas 2-torsi. Penelitian ini disusun untuk membangun kejelasan struktural mengenai keterhubungan kedua operator tersebut serta menegaskan peran masing-masing dalam memperkaya pemahaman tentang karakter ring semiprima bebas 2-torsi. Secara teoritis, hasil penelitian ini diharapkan memberikan kontribusi bagi perkembangan teori derivasi dalam aljabar abstrak, khususnya dalam memperkuat keterkaitan antara teori derivasi Jordan dan teori derivasi nilpoten. Secara praktis, temuan penelitian ini berpotensi digunakan dalam berbagai cabang matematika modern, seperti teori operator, teori modul, aljabar nonkomutatif, kriptografi, serta bidang-bidang lain yang menggunakan derivasi sebagai alat analitis dalam memahami struktur aljabar yang kompleks.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. menganalisis hubungan derivasi Jordan dan derivasi nilpoten pada ring semiprima bebas 2-torsi;
2. menjelaskan implikasi hubungan tersebut terhadap struktur ring semiprima bebas 2-torsi.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah:

1. memberikan pemahaman yang lebih komprehensif mengenai perilaku derivasi Jordan dan derivasi nilpoten pada ring semiprima bebas 2-torsi;
2. menjadi rujukan awal bagi penelitian lanjutan terkait struktur ring semiprima dan pengembangan teori derivasi dalam aljabar abstrak.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini, berbagai sumber yang berhubungan dengan pengertian konsep dan teori yang menjadi dasar penelitian ini akan ditinjau. Dengan demikian, pembaca dapat memperoleh pemahaman yang lebih jelas tentang konteks dan pentingnya topik yang sedang diteliti.

2.1 Grup

Pemahaman terhadap struktur-struktur dasar diperlukan untuk mempelajari lebih lanjut konsep-konsep lanjutan dalam aljabar abstrak. Salah satu struktur fundamental tersebut adalah grup. Sebelum mendefinisikan grup, terlebih dahulu akan dijelaskan konsep operasi biner.

Definisi 2.1.1 Suatu operasi biner atau operasi tertutup dalam himpunan $S \neq \emptyset$ adalah

$$* : S \times S \to S$$

$$(r, s) \mapsto *(r, s) = r * s.$$

Operasi biner pada S disebut tertutup apabila untuk setiap $r, s \in S$ berlaku $r * s \in S$ (Andari, 2015).

Contoh 2.1.2 Berikut diberikan contoh yang memperlihatkan perbedaan antara operasi biner dan bukan operasi biner.

1. Diberikan $S = \mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat. Operasi penjumlahan

   $$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad (r, s) \mapsto r + s$$

   merupakan operasi biner, karena untuk setiap $r, s \in \mathbb{Z}$ berlaku $r + s \in \mathbb{Z}$.

2. Diberikan $S = \mathbb{N}$ himpunan bilangan asli. Operasi pengurangan

$$- : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (r, s) \mapsto r - s$$

bukanlah operasi biner. Sebagai contoh, untuk $r = 3$ dan $s = 5$ berlaku $r - s = -2 \notin \mathbb{N}$, sehingga operasi tersebut tidak tertutup pada S. Jadi, pengurangan bukan merupakan operasi biner pada bilangan asli $\mathbb{N}$.

Grup merupakan salah satu struktur aljabar paling mendasar yang terdiri dari suatu himpunan dan satu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Berikut definisi lebih jelas.

Definisi 2.1.3 Diberikan G suatu himpunan tak kosong dengan operasi biner $*$, G dikatakan suatu grup $\langle G, * \rangle$ jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. operasi $*$ merupakan operasi biner di G, yaitu untuk setiap $r, s \in G$ berlaku $r * s \in G$, artinya operasi $*$ bersifat tertutup;

2. operasi $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $r, s, t \in G$ berlaku $(r * s) * t = r * (s * t)$;

3. terdapat elemen identitas e, yaitu untuk setiap $r \in G$ berlaku $r * e = e * r = r$;

4. untuk setiap $r \in G$, terdapat elemen invers $r' \in G$ sedemikian sehingga $r * r' = r' * r = e$. Elemen r' adalah invers dari elemen r

(Suryanti, 2017).

Selanjutnya, grup G disebut grup Abelian jika operasi biner $*$ bersifat komutatif, yaitu $r * s = s * r$, untuk setiap $r, s \in G$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berikut akan diberikan contoh yang relevan untuk menjelaskan konsep grup sebagai struktur aljabar yang dibentuk oleh operasi biner tertentu.

Contoh 2.1.4 Diberikan $\mathbb{Z}_4$, yaitu himpunan bilangan bulat modulo 4 dengan operasi penjumlahan modulo 4, dituliskan sebagai $+_4$. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}_4, +_4 \rangle$ merupakan grup komutatif.

1. Diberikan sebarang $r, s \in \mathbb{Z}_4$, berlaku $r +_4 s = (r + s) \bmod 4 \in \mathbb{Z}_4$. Dengan demikian, hasil penjumlahan modulo 4 tetap dalam $\mathbb{Z}_4$.

2. Diberikan sebarang $r, s, t \in \mathbb{Z}_4$, berlaku $(r +_4 s) +_4 t = r +_4 (s +_4 t)$. Mengingat bahwa penjumlahan bilangan bulat bersifat asosiatif, diperoleh penjumlahan modulo yang juga bersifat asosiatif.

3. Terdapat elemen identitas $\bar{0} \in \mathbb{Z}_4$ yang memenuhi $r +_4 \bar{0} = \bar{0} +_4 r = r$, sehingga diperoleh $\bar{0}$ merupakan elemen identitas di $\mathbb{Z}_4$.

4. Untuk setiap $r \in \mathbb{Z}_4$, terdapat elemen $r^{-1} \in \mathbb{Z}_4$ sedemikian sehingga $r +_4 r^{-1} \equiv \bar{0} \bmod 4$. Hasil perhitungan menunjukan $\bar{0} +_4 \bar{0} = \bar{1} +_4 \bar{3} = \bar{2} +_4 \bar{2} = \bar{3} +_4 \bar{1} = \bar{0}$, sehingga setiap elemen $\mathbb{Z}_4$ memiliki invers terhadap operasi $+_4$.

5. Diberikan sebarang $r, s \in \mathbb{Z}_4$, berlaku $r +_4 s = s +_4 r$.

Dengan demikian, $\langle \mathbb{Z}_4, +_4 \rangle$ memenuhi semua aksioma grup dan bersifat komutatif. Jadi, $\langle \mathbb{Z}_4, +_4 \rangle$ merupakan grup komutatif.

2.2 Ring

Struktur yang memuat dua operasi biner berupa penjumlahan dan perkalian dengan sifat-sifat tertentu dikenal sebagai ring. Berikut ini definisi formal dari ring.

Definisi 2.2.1 Suatu himpunan tak kosong R dilengkapi dengan operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ ditulis $\langle R, +, \cdot \rangle$ disebut ring jika memenuhi aksioma berikut:

1. $\langle R, + \rangle$ merupakan grup Abel (komutatif), yaitu:

   (a) R tertutup terhadap penjumlahan, yaitu untuk setiap $r, s \in R$ berlaku $r + s \in R$;

   (b) penjumlahan di R bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $r, s, t \in R$ berlaku $(r + s) + t = r + (s + t)$;

   (c) R memuat elemen identitas (e) terhadap penjumlahan, yaitu untuk setiap $r \in R$ berlaku $r + e = e + r = r$;

   (d) setiap elemen R memiliki invers penjumlahan, yaitu untuk setiap $r \in R$, terdapat $(-r) \in R$ sedemikian hingga $r + (-r) = (-r) + r = e$;

   (e) penjumlahan di R bersifat komutatif, yaitu untuk setiap $r, s \in R$ berlaku $r + s = s + r$;

2. $\langle R, \cdot \rangle$ merupakan semigrup, yaitu:

   (a) R tertutup terhadap perkalian, yaitu untuk setiap $r, s \in R$ berlaku $r \cdot s \in R$;

   (b) perkalian di R bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $r, s, t \in R$ berlaku $(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t)$;

3. dua hukum distributif perkalian terhadap penjumlahan di R dipenuhi:

   (a) distributif kanan, yaitu untuk setiap $r, s, t \in R$ berlaku $r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$;

   (b) distributif kiri, yaitu untuk setiap $r, s, t \in R$ berlaku $(r+s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t$

(Apriyani, 2024).

Jika terdapat suatu elemen e terhadap penjumlahan di R sedemikian sehingga $r \cdot e = e \cdot r = r$, untuk setiap r di R, maka e disebut elemen satuan dan R dinamakan ring dengan elemen satuan. Jika perkalian di$R$ bersifat komutatif, maka R disebut ring komutatif (Apriyani, 2024).

Contoh 2.2.2 Diberikan $\mathbb{Z}_4$, yaitu himpunan bilangan bulat modulo 4 dengan operasi penjumlahan modulo 4, dituliskan sebagai $+_4$ dan operasi perkalian modulo 4, dituliskan sebagai $\cdot_4$. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4 \rangle$ merupakan ring komutatif.

1. $\langle \mathbb{Z}_4, +_4 \rangle$ merupakan grup komutatif.

   Berdasarkan Contoh (2.1.4) telah dibuktikan bahwa $\langle \mathbb{Z}_4, +_4 \rangle$ merupakan grup komutatif.

2. $\langle \mathbb{Z}_4, \cdot_4 \rangle$ merupakan semigrup.

   (a) Diberikan sebarang $r, s \in \mathbb{Z}_4$, berlaku $r \cdot_4 s = (r \cdot s) \bmod 4 \in \mathbb{Z}_4$.

   Dengan demikian, hasil perkalian modulo 4 tetap dalam $\mathbb{Z}_4$.

   (b) Diberikan sebarang $r, s, t \in \mathbb{Z}_4$, berlaku $(r \cdot_4 s) \cdot_4 t = r \cdot_4 (s \cdot_4 t)$.

   Akibat dari perkalian bilangan bulat bersifat asosiatif, diperoleh perkalian modulo yang juga bersifat asosiatif.

   Mengingat bahwa $\langle \mathbb{Z}_4, \cdot_4 \rangle$ memenuhi semua aksioma semigrup, sehingga $\langle \mathbb{Z}_4, \cdot_4 \rangle$ merupakan semigrup. Selanjutnya akan ditunjukkan dua hukum distributif perkalian terhadap penjumlahan di $\mathbb{Z}_4$.

3. Berlaku hukum distributif kanan dan kiri.

   (a) Diberikan sebarang $r, s, t \in \mathbb{Z}_4$, berlaku $r \cdot_4 (s +_4 t) = (r \cdot_4 s) +_4 (r \cdot_4 t)$.

   (b) Diberikan sebarang $r, s, t \in \mathbb{Z}_4$, berlaku $(r +_4 s) \cdot_4 t = (r \cdot_4 t) +_4 (s \cdot_4 t)$.
   Dengan demikian, berlaku dua hukum distributif perkalian terhadap penjumlahan di $\mathbb{Z}_4$.

   Dengan demikian, telah terbukti bahwa $\mathbb{Z}_4$ merupakan ring.

4. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4 \rangle$ merupakan ring komutatif.

   Diberikan sebarang $r, s \in \mathbb{Z}_4$. Perkalian pada $\mathbb{Z}_4$ bersifat komutatif, yaitu $r \cdot_4 s = s \cdot_4 r$.

Jadi, $\langle \mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4 \rangle$ merupakan ring komutatif.

2.3 Subring

Dalam teori ring, terdapat konsep subring yang merujuk pada himpunan bagian dari suatu ring yang juga membentuk ring dengan operasi yang sama. Konsep ini penting karena memungkinkan untuk meninjau ring melalui bagian-bagiannya yang tetap mempertahankan struktur ring.

Definisi 2.3.1 Diberikan S himpunan bagian tak kosong dari ring $\langle R, +, \cdot \rangle$. Himpunan S disebut subring dari R apabila S juga merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yang berlaku pada R (Wahyuni dkk., 2017).

Setelah mendefinisikan konsep subring, penting untuk mengetahui syarat suatu himpunan bagian dari ring benar-benar merupakan subring. Teorema berikut memberikan karakterisasi sederhana yang mempermudah dalam menentukan subring dari suatu ring.

Teorema 2.3.2 Diberikan himpunan tak kosong S di dalam ring $\langle R, +, \cdot \rangle$. Himpunan S merupakan subring dari R jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku sifat $a - b \in S$ dan $ab \in S$ (Wahyuni dkk., 2017).

Bukti. Diberikan S subring dari ring R. Berdasarkan Definisi (2.3.1) S merupakan suatu ring. Akibatnya, untuk sebarang $b \in S$ diperoleh $-b \in S$. Selanjutnya untuk sebarang $a \in S$, $-b \in S$ berlaku $a + (-b) \in S$. Serta untuk sebarang $a \in S, b \in S$ berlaku $ab \in S$. Diketahui bahwa untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a - b \in S$ dan

$ab \in S$. Akan dibuktikan bahwa S merupakan subring dari R. Karena untuk setiap $a, b \in S$ terpenuhi $a - b \in S$, maka $\langle S, + \rangle$ merupakan subgrup dari $\langle R, + \rangle$ sehingga $\langle S, + \rangle$ adalah grup. Mengingat $\langle R, + \rangle$ merupakan grup komutatif, maka $\langle S, + \rangle$ juga merupakan grup komutatif. Selanjutnya, untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $ab \in S$, sehingga S tertutup terhadap operasi perkalian. Karena $S \subseteq R$, maka sifat asosiatif pada perkalian serta sifat distributif terhadap penjumlahan pada S otomatis terpenuhi. Dengan demikian, terbukti bahwa S merupakan subring dari R. ■

Berdasarkan Definisi (2.3.1) dan Teorema (2.3.2), berikut diberikan contoh subring.

Contoh 2.3.3 Diberikan ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ dapat ditunjukkan bahwa ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan subring dari $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan subring dari $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$, dan $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ juga merupakan subring dari $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$. Hal ini dikarenakan $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring serta berlaku $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, dan $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$.

2.4 *Center*

Center ring memuat semua elemen yang komutatif terhadap seluruh elemen ring.

Definisi 2.4.1 Diberikan ring R. *Center* dari ring R yang dinotasikan dengan $Z(R)$, didefinisikan sebagai

$$Z(R) = \{\, a \in R \mid ar = ra, \ \forall r \in R \,\}.$$

Berikut diberikan contoh *center* dari suatu ring R.

Contoh 2.4.2 Diberikan ring matriks

$$R = M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\},$$

yaitu himpunan semua matriks 2×2 dengan entri-entrinya bilangan real. *Center* ring R adalah $Z(R) = \{\, aI_2 \mid a \in \mathbb{R} \,\}$, dengan I_2 menyatakan matriks identitas berordo 2×2, yaitu matriks diagonal yang bernilai 1 pada diagonal utamanya dan 0 pada entri lainnya: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Dengan demikian, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ berlaku $aI_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, yakni matriks diagonal dengan kedua entri diagonal adalah a.

2.5 Ideal

Salah satu konsep penting dalam ring adalah ideal. Konsep ini banyak digunakan dalam teori ring, khususnya karena memiliki peran yang lebih kuat dibandingkan subring.

Definisi 2.5.1 Diberikan suatu ring tak nol $\langle R, +, \cdot \rangle$ dan I himpunan bagian tak kosong dari R. Himpunan I disebut ideal dari R jika:

(i) untuk setiap $a, b \in I$, berlaku $a - b \in I$;

(ii) untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$, berlaku $ar \in I$ dan $ra \in I$

(Wahyuni dkk., 2017).

Dengan demikian, setiap ideal I merupakan subring dari R. Akan tetapi, tidak semua subring merupakan ideal, sebab subring belum tentu memenuhi syarat sebagai ideal kiri maupun ideal kanan. Berikut definisi lebih jelas.

Definisi 2.5.2 Diberikan ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ dan $I \subseteq R$.

(i) Himpunan bagian I disebut ideal kiri jika:

  (a) untuk setiap $a, b \in I$ berlaku $a - b \in I$;

  (b) untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$ berlaku $ra \in I$.

(ii) Himpunan bagian I disebut ideal kanan jika:

  (a) untuk setiap $a, b \in I$ berlaku $a - b \in I$;

  (b) untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$ berlaku $ar \in I$

(Wahyuni dkk., 2017).

Contoh 2.5.3 Diberikan bilangan bulat $n \in \mathbb{Z}$ dan himpunan $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $n\mathbb{Z}$ merupakan ideal di $\mathbb{Z}$.

1. Diberikan $a = nl_1, b = nl_2 \in n\mathbb{Z}$ dengan $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$, sehingga berlaku:

$$a - b = nl_1 - nl_2 = n(l_1 - l_2) \in n\mathbb{Z}.$$

2. Diberikan $r \in \mathbb{Z}$ dan $a \in n\mathbb{Z}$ dengan $a = nl$ untuk suatu $l \in \mathbb{Z}$, sehingga berlaku:

   (i) $ra = r(nl) = n(rl) \in n\mathbb{Z}$ (ideal kiri);

   (ii) $ar = (nl)r = n(lr) \in n\mathbb{Z}$ (ideal kanan).

Dengan demikian, $n\mathbb{Z}$ memenuhi kedua syarat definisi ideal. Oleh karena itu, $n\mathbb{Z}$ merupakan ideal di $\mathbb{Z}$.

2.6 Ring Faktor

Ideal memegang peranan penting dalam pembentukan ring faktor. Diberikan R adalah suatu ring dan I adalah ideal dari R. Koset dari I di R yang ditentukan oleh elemen $a \in R$ didefinisikan sebagai $a+I = \{\, a+x \mid x \in I \,\}$. Dengan memanfaatkan ideal I, elemen-elemen ring R dapat dikelompokkan ke dalam kelas-kelas koset. Himpunan semua koset tersebut membentuk suatu ring baru yang disebut ring faktor. Ring faktor banyak digunakan dalam aljabar karena dapat menyederhanakan struktur ring sekaligus mempertahankan sifat-sifat dasar yang diperlukan untuk kajian lebih lanjut.

Definisi 2.6.1 Diberikan ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ dan ideal I dari R. Ring faktor R/I didefinisikan sebagai $R/I = \{a + I \mid a \in R\}$, dengan operasi penjumlahan dan perkalian berturut-turut didefinisikan oleh

1. $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$;
2. $(a + I)(b + I) = (ab) + I$,

untuk setiap $a + I, b + I \in R/I$ (Rasiman dkk., 2018).

Berikut diberikan contoh ring faktor beserta pembuktiannya secara rinci.

Contoh 2.6.2 Misalkan $R = \mathbb{Z}$ dan $I = 3\mathbb{Z} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ merupakan ideal dari $\mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ merupakan ring faktor.

Koset-koset dari $3\mathbb{Z}$ pada $\mathbb{Z}$ adalah

$$0 + 3\mathbb{Z} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\},$$

$$1 + 3\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\},$$

$$2 + 3\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}.$$

Dengan demikian, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0 + 3\mathbb{Z},\ 1 + 3\mathbb{Z},\ 2 + 3\mathbb{Z}\}$.

1. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +\rangle$ merupakan grup komutatif.

   (a) Diberikan sebarang $a + 3\mathbb{Z},\ b + 3\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Berlaku:

   $$(a + 3\mathbb{Z}) + (b + 3\mathbb{Z}) = (a + b) + 3\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

   Jadi, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.

   (b) Diberikan sebarang $a + 3\mathbb{Z},\ b + 3\mathbb{Z},\ c + 3\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Berlaku:

   $$\begin{aligned}\big((a + 3\mathbb{Z}) + (b + 3\mathbb{Z})\big) + (c + 3\mathbb{Z}) &= ((a + b) + 3\mathbb{Z}) + (c + 3\mathbb{Z})\\ &= ((a + b) + c) + 3\mathbb{Z}\\ &= (a + (b + c)) + 3\mathbb{Z}\\ &= (a + 3\mathbb{Z}) + ((b + c) + 3\mathbb{Z})\\ &= (a + 3\mathbb{Z}) + \big((b + 3\mathbb{Z}) + (c + 3\mathbb{Z})\big).\end{aligned}$$

   Penjumlahan pada $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif. Sifat ini tetap berlaku pada operasi penjumlahan di ring faktor, sehingga penjumlahan pada $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ juga bersifat asosiatif.

   (c) Terdapat $0 + 3\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, sehingga untuk setiap $a + 3\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ berlaku $(a + 3\mathbb{Z}) + (0 + 3\mathbb{Z}) = (a + 0) + 3\mathbb{Z} = a + 3\mathbb{Z}$.

   Jadi, $0 + 3\mathbb{Z}$ merupakan elemen identitas terhadap penjumlahan.

   (d) Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat $-a \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Oleh karena itu, untuk setiap $a + 3\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ berlaku:

   $$(a + 3\mathbb{Z}) + ((-a) + 3\mathbb{Z}) = (a - a) + 3\mathbb{Z} = 0 + 3\mathbb{Z}.$$

   $$((-a) + 3\mathbb{Z}) + (a + 3\mathbb{Z}) = (-a + a) + 3\mathbb{Z} = 0 + 3\mathbb{Z}.$$

   Jadi, setiap elemen memiliki invers terhadap penjumlahan.

   (e) Diberikan sebarang $a + 3\mathbb{Z},\ b + 3\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Berlaku:

   $$(a+3\mathbb{Z})+(b+3\mathbb{Z}) = (a+b)+3\mathbb{Z} = (b+a)+3\mathbb{Z} = (b+3\mathbb{Z})+(a+3\mathbb{Z}),$$

   Jadi, operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ bersifat komutatif.

Berdasarkan (a)-(e), terbukti bahwa $\langle \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +\rangle$ merupakan grup komutatif.

2. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \cdot\rangle$ merupakan semigrup.

   (a) Diberikan sebarang $a + 3\mathbb{Z},\ b + 3\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Berlaku:

   $$(a + 3\mathbb{Z})(b + 3\mathbb{Z}) = ab + 3\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

   Jadi, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tertutup terhadap perkalian.

   (b) Diberikan sebarang $a + 3\mathbb{Z},\ b + 3\mathbb{Z},\ c + 3\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Berlaku:

   $$\begin{aligned}\big((a + 3\mathbb{Z})(b + 3\mathbb{Z})\big)(c + 3\mathbb{Z}) &= (ab + 3\mathbb{Z})(c + 3\mathbb{Z})\\ &= (abc) + 3\mathbb{Z}\\ &= a(bc) + 3\mathbb{Z}\\ &= (a + 3\mathbb{Z})(bc + 3\mathbb{Z})\\ &= (a + 3\mathbb{Z})\big((b + 3\mathbb{Z})(c + 3\mathbb{Z})\big).\end{aligned}$$

   Akibat dari perkalian pada $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif, diperoleh perkalian pada $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ yang juga bersifat asosiatif.

   Berdasarkan (a)-(b), terbukti bahwa $\langle \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \cdot\rangle$ merupakan semigrup.

3. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ distributif terhadap penjumlahan dan perkalian.

   Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$, sehingga untuk setiap $(a + 3\mathbb{Z}), (b + 3\mathbb{Z}), (c + 3\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ berlaku:

   $$\begin{aligned}(a + 3\mathbb{Z})\big((b + 3\mathbb{Z}) + (c + 3\mathbb{Z})\big) &= (a + 3\mathbb{Z})\big((b + c) + 3\mathbb{Z}\big)\\ &= a(b + c) + 3\mathbb{Z}\\ &= (ab + ac) + 3\mathbb{Z}\\ &= (ab) + 3\mathbb{Z} + (ac) + 3\mathbb{Z}\\ &= (a + 3\mathbb{Z})(b + 3\mathbb{Z}) + (a + 3\mathbb{Z})(c + 3\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}\big((a+3\mathbb{Z})+(b+3\mathbb{Z})\big)(c+3\mathbb{Z}) &= \big((a+b)+3\mathbb{Z}\big)(c+3\mathbb{Z})\\ &= (a+b)c+3\mathbb{Z}\\ &= (ac+bc)+3\mathbb{Z}\\ &= (ac)+3\mathbb{Z}+(bc)+3\mathbb{Z}\\ &= (a+3\mathbb{Z})(c+3\mathbb{Z})+(b+3\mathbb{Z})(c+3\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Dengan demikian, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ distributif terhadap penjumlahan dan perkalian.

Berdasarkan poin 1-3, terbukti bahwa $\langle \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +, \cdot\rangle$ merupakan ring. Oleh karena itu, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ disebut ring faktor dari $\mathbb{Z}$ terhadap ideal $3\mathbb{Z}$.

2.7 Ring Prima

Salah satu sifat yang menunjukkan kekuatan struktur suatu ring adalah ketika hasil kali dua elemen hanya dapat bernilai nol apabila salah satunya nol. Dengan kata lain, ring tidak memiliki pembagi nol *nontrivial* melalui perkalian. Ring yang memenuhi kondisi ini disebut sebagai ring prima. Definisi formalnya diberikan berikut ini.

Definisi 2.7.1 Diberikan ring R. Ring R disebut prima jika untuk setiap $a, b \in R$ dengan $aRb = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$ (Bresar, 1988).

Berikut diberikan beberapa contoh ring prima dan bukan ring prima.

Contoh 2.7.2

1. $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot\rangle$, $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot\rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, \cdot\rangle$, $\langle \mathbb{C}, +, \cdot\rangle$ merupakan ring prima. Diberikan sebarang elemen $a, b \neq 0$. Pada ring-ring tersebut selalu terdapat elemen r sehingga $arb \neq 0$. Kondisi $aRb = 0$ hanya mungkin dipenuhi apabila $a = 0$ atau $b = 0$. Dengan demikian, seluruh ring tersebut adalah ring prima.

2. Diberikan ring $M_2(\mathbb{R})$, yaitu matriks 2×2 yang entri-entrinya bilangan real. Diberikan $R = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, terdapat $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\in M_2(\mathbb{R})$, sehingga $ARB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \neq 0$. Hal ini menunjukkan bahwa $ARB = 0$ hanya dapat terjadi jika $A = 0$ atau $B = 0$. Jadi, $M_2(\mathbb{R})$ adalah ring prima.

3. Diberikan ring $\mathbb{Z}_6$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian modulo 6. Ambil $a = \bar{3}$ dan $b = \bar{4} \in \mathbb{Z}_6$. Terdapat $r = \bar{2} \in \mathbb{Z}_6$ sehingga

$$arb = \bar{3} \cdot \bar{2} \cdot \bar{4} = \overline{24} = \bar{0} \text{ mod } 6.$$

Dengan demikian, $a\mathbb{Z}_6 b = 0$, tetapi $a, b \neq 0$. Oleh karena itu, $\mathbb{Z}_6$ bukan ring prima.

2.8 Ring Semiprima

Konsep ring semiprima digunakan untuk menjamin bahwa tidak terdapat elemen tak nol $a \in R$ yang memenuhi $aRa = 0$. Definisi formalnya diberikan berikut ini.

Definisi 2.8.1 Diberikan ring R. Ring R disebut semiprima jika untuk setiap $a \in R$, $aRa = 0$ maka $a = 0$ (Bresar, 1988).

Berikut diberikan beberapa contoh ring semiprima dan bukan ring semiprima.

Contoh 2.8.2

1. $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring semiprima. Diberikan sebarang elemen $a \neq 0$. Pada ring-ring tersebut selalu terdapat elemen r sehingga $ara \neq 0$. Kondisi $aRa = 0$ hanya mungkin dipenuhi apabila $a = 0$. Dengan demikian, seluruh ring tersebut adalah ring semiprima.

2. Diberikan ring $M_2(\mathbb{R})$, yaitu matriks 2×2 yang entri-entrinya bilangan real. Diberikan $R = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, terdapat $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, sehingga $ARA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \neq 0$. Hal ini menunjukkan bahwa $ARA = 0$ hanya dapat terjadi jika $A = 0$. Jadi, $M_2(\mathbb{R})$ adalah ring semiprima.

3. Diberikan ring $UT_2(\mathbb{R})$, yaitu matriks segitiga atas 2×2 yang entri-entrinya bilangan real. Akan ditunjukkan bahwa ring

$$R = UT_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

bukan ring semiprima.

Diberikan elemen tak nol $a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$. Jelas bahwa $a \neq 0$. Selanjutnya, diberikan sebarang elemen $r = \begin{bmatrix} p & q \\ 0 & s \end{bmatrix} \in R$. Diperoleh $ara = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Karena r dipilih sebarang, diperoleh $aRa = (0)$, sedangkan $a \neq 0$. Dengan demikian, ring R bukan ring semiprima.

4. Diberikan ring $\mathbb{Z}_6$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian modulo 6. Ambil $a = \bar{3} \in \mathbb{Z}_6$. Terdapat $r = \bar{2} \in \mathbb{Z}_6$ sehingga $ara = \bar{3} \cdot \bar{2} \cdot \bar{3} = \overline{18} = \bar{0} \bmod 6$. Dengan demikian, $a\mathbb{Z}_6 a = 0$, tetapi $a \neq 0$. Oleh karena itu, $\mathbb{Z}_6$ bukan ring semiprima.

5. Diberikan ring $\mathbb{Z}_4$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian modulo 4. Ambil $a = \bar{2} \in \mathbb{Z}_4$. Untuk setiap $r \in \mathbb{Z}_4$ berlaku $ara = \bar{2} \cdot r \cdot \bar{2} = \overline{4r} = \bar{0} \bmod 4$. Sehingga $a\mathbb{Z}_4 a = 0$, padahal $a \neq 0$. Jadi, $\mathbb{Z}_4$ bukan ring semiprima.

2.9 Ring Bebas 2-Torsi

Konsep elemen torsi dalam ring berkaitan dengan struktur aditif ring tersebut. Suatu elemen a dalam sebuah ring R disebut elemen torsi apabila terdapat bilangan bulat tak nol $n \in \mathbb{Z}$ sehingga $na = 0$. Ring R dikatakan bebas torsi apabila satu-satunya elemen torsi dalam R adalah elemen nol. Sebagai kasus khusus, ring R disebut bebas 2-torsi apabila tidak terdapat elemen tak nol $a \in R$ yang memenuhi $2a = 0$. Dengan kata lain, kondisi $2a = 0$ hanya dapat terjadi apabila $a = 0$. Konsep ring bebas 2-torsi menjamin bahwa perkalian suatu elemen oleh bilangan 2 tidak mengakibatkan elemen tak nol menjadi nol. Sifat ini penting dalam kajian struktur ring, terutama ketika pembuktian melibatkan manipulasi identitas yang memuat faktor 2. Definisi formalnya diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.9.1 Suatu ring R disebut bebas 2-torsi jika untuk setiap $a \in R$, $2a = 0$ maka $a = 0$ (Bresar, 1988).

Berikut diberikan beberapa contoh ring bebas 2-torsi dan bukan ring bebas 2-torsi.

Contoh 2.9.2

1. $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring bebas 2-torsi. Diberikan sebarang elemen $a \neq 0$. Kondisi $2a = 0$ hanya mungkin dipenuhi apabila $a = 0$. Dengan demikian, seluruh ring tersebut adalah ring bebas 2-torsi.

2. Diberikan ring $M_2(\mathbb{R})$, yaitu matriks 2×2 yang entri-entrinya bilangan real. Diberikan $R = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, sehingga $2R = 2 \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} \neq 0$. Hal ini menunjukkan bahwa $2R = 0$ hanya dapat terjadi jika $R = 0$. Jadi, $M_2(\mathbb{R})$ adalah ring bebas 2-torsi.

3. Diberikan ring $\mathbb{Z}_2$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian modulo 2. Diberikan $a = \bar{1} \in \mathbb{Z}_2$, diperoleh $2a = 2 \cdot \bar{1} = \bar{2} = \bar{0} \mod 2$.

   Pada ring $\mathbb{Z}_2$ terdapat elemen tak nol a, yaitu $a = \bar{1}$ yang memenuhi $2a = \bar{0}$. Dengan demikian, $\mathbb{Z}_2$ bukan ring bebas 2-torsi.

2.10 Derivasi pada Ring

Dalam struktur aljabar ring, derivasi merupakan pemetaan aditif khusus yang memetakan elemen ring ke dirinya sendiri, sambil mempertahankan sifat-sifat mirip dengan turunan dalam kalkulus. Secara formal, suatu fungsi $d : R \to R$ disebut derivasi jika untuk setiap $a, b \in R$ berlaku identitas Leibniz, yaitu $d(ab) = d(a)b + a\,d(b)$.

Definisi ini memperluas konsep diferensiasi ke dalam ranah struktur aljabar non-analitik, serta menjadi dasar untuk kajian lanjut dalam teori ring dan modul. Derivasi juga memainkan peran penting dalam mempelajari struktur ideal, *center*, dan automorfisma dalam konteks tidak komutatif.

Definisi 2.10.1 Diberikan ring R. Suatu fungsi $d : R \to R$ disebut derivasi pada R jika berlaku:

1. $d(a + b) = d(a) + d(b)$;

2. $d(ab) = d(a)b + ad(b)$;

untuk setiap $a, b \in R$ (Ernanto, 2018).

Contoh 2.10.2 Diberikan ring matriks $M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$. Didefinisikan pemetaan $d : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z})$ dengan $d \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & 0 \\ a-d & b \end{bmatrix}$, untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Akan ditunjukkan bahwa pemetaan d merupakan derivasi pada $M_2(\mathbb{Z})$.

1. Diberikan sebarang matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ di $M_2(\mathbb{Z})$, berlaku:

$$\begin{aligned} d(A+B) &= d\left(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} -(b+f) & 0 \\ (a+e)-(d+h) & (b+f) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -b & 0 \\ a-d & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -f & 0 \\ e-h & f \end{bmatrix} \\ &= d(A) + d(B). \end{aligned}$$

   Artinya, pemetaan d bersifat aditif.

2. Diberikan sebarang matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ di $M_2(\mathbb{Z})$, diperoleh:

$$AB = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}.$$

   Selanjutnya,

$$\begin{aligned} d(AB) &= d\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(af+bh) & 0 \\ (ae+bg)-(cf+dh) & (af+bh) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$d(A)B = \begin{bmatrix} -b & 0 \\ a-d & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -be & -bf \\ (a-d)e+bg & (a-d)f+bh \end{bmatrix},$$

dan

$$Ad(B) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f & 0 \\ e-h & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -af+b(e-h) & bf \\ -cf+d(e-h) & df \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} d(A)B + Ad(B) &= \begin{bmatrix} -be & -bf \\ (a-d)e+bg & (a-d)f+bh \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -af+b(e-h) & bf \\ -cf+d(e-h) & df \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(af+bh) & 0 \\ (ae+bg)-(cf+dh) & (af+bh) \end{bmatrix} \\ &= d(AB). \end{aligned}$$

Artinya, pemetaan d memenuhi aturan Leibniz.

Jadi, pemetaan d merupakan derivasi pada $M_2(\mathbb{Z})$.

2.11 Derivasi *Inner*

Selain derivasi, pada ring tidak komutatif terdapat jenis derivasi penting, yaitu derivasi *inner*. Derivasi *inner* dibangun dari suatu elemen tetap dalam ring dan dinyatakan melalui komutator. Dalam teori ring, komutator digunakan untuk mengukur tingkat ketidakkomutatifan suatu ring.

Definisi 2.11.1 Diberikan ring R dan $a \in R$. Pemetaan $d_a : R \to R$ yang didefinisikan oleh

$$d_a(x) = [a, x] = ax - xa, \qquad \forall x \in R,$$

disebut derivasi *inner* pada R (Ber dkk., 2020).

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa pemetaan d_a memenuhi aturan Leibniz sehingga merupakan suatu derivasi. Pernyataan tersebut dirumuskan dalam lemma berikut.

Lemma 2.11.2 Diberikan sebarang ring R. Untuk setiap $a \in R$, pemetaan $d_a : R \to R$ yang didefinisikan oleh $d_a(x) = [a, x] = ax - xa$ merupakan derivasi pada R.

Bukti. Diberikan ring R dan $a \in R$. Akan ditunjukkan bahwa d_a merupakan derivasi pada R.

1. Diberikan sebarang $x, y \in R$, berlaku:

$$\begin{aligned} d_a(x + y) &= [a, x + y] \\ &= a(x + y) - (x + y)a \\ &= ax + ay - xa - ya \\ &= (ax - xa) + (ay - ya) \\ &= [a, x] + [a, y] \\ &= d_a(x) + d_a(y). \end{aligned}$$

   Jadi, d_a bersifat aditif.

2. Diberikan sebarang $x, y \in R$, berlaku:

$$\begin{aligned} d_a(xy) &= [a, xy] \\ &= a(xy) - (xy)a \\ &= axy - xya \\ &= axy - xay + xay - xya \\ &= (ax - xa)y + x(ay - ya) \\ &= [a, x]y + x[a, y] \\ &= d_a(x)y + xd_a(y). \end{aligned}$$

   Jadi, d_a memenuhi aturan Leibniz.

Dengan demikian, $d_a(x) = [a, x]$ merupakan derivasi pada R. ■

Selanjutnya disajikan contoh mengenai derivasi *inner*.

Contoh 2.11.3 Perhatikan derivasi $d : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z})$ pada Contoh (2.10.2). Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}),$$

sehingga berlaku:

$$
\begin{aligned}
d_A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} A \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -b & 0 \\ a-d & b \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, derivasi $d = d_A$ merupakan derivasi *inner* pada $M_2(\mathbb{Z})$.

2.12 Derivasi Jordan

Pada subbab sebelumnya telah dijelaskan definisi derivasi pada ring beserta sifat-sifat dasarnya. Selanjutnya, akan diperkenalkan derivasi Jordan sebagai salah satu generalisasi dari derivasi, yaitu pemetaan aditif yang memenuhi identitas Jordan pada kuadrat elemen ring. Secara umum, Ali dkk. (2024) menjelaskan bahwa konsep derivasi Jordan dapat dipandang sebagai pemetaan aditif pada ring yang memenuhi identitas Jordan berikut.

Definisi 2.12.1 Diberikan ring R. Pemetaan aditif $d : R \to R$ disebut derivasi Jordan pada R jika memenuhi $d(a^2) = d(a)a + ad(a)$, untuk setiap $a \in R$ (Ali dkk., 2024).

Hubungan antara derivasi dan derivasi Jordan diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2.12.2 Setiap derivasi pada suatu ring merupakan derivasi Jordan (Sitompul dkk., 2025).

Bukti. Diberikan ring R dan pemetaan $d : R \to R$ yang merupakan derivasi pada R. Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku aturan Leibniz, $d(ab) = d(a)b + ad(b)$. Dengan mensubstitusikan $b = a$ ke dalam persamaan tersebut, diperoleh

$$d(a^2) = d(aa) = d(a)a + ad(a).$$

Jadi, d memenuhi Definisi (2.12.1), sehingga d merupakan derivasi Jordan. ■

Untuk memperjelas konsep derivasi Jordan, berikut disajikan contoh pada ring matriks. Contoh ini menunjukkan pemetaan yang memenuhi identitas Jordan.

Contoh 2.12.3 Diberikan ring $M_2(\mathbb{R})$ sebagai berikut

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Definisikan derivasi *inner* $d : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, dengan $d(X) = [P, X] = PX - XP$. Pilih

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan bahwa d memenuhi identitas derivasi Jordan.

Diberikan matriks $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Akan ditunjukkan d merupakan derivasi Jordan, yakni memenuhi $d(X^2) = d(X)X + Xd(X)$.

$$\begin{aligned} d(X^2) =& PX^2 - X^2P \\ =& \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) - \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} aa + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + dd \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} aa + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + dd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ aa + bc & ab + bd \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ab + bd & 0 \\ cb + dd & 0 \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} -(ab + bd) & 0 \\ (aa + bc) - (cb + dd) & ab + bd \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} d(X)X + Xd(X) =& \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ =& \begin{bmatrix} -b & 0 \\ a - d & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b & 0 \\ a - d & b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(X)X + Xd(X) &= \begin{bmatrix} -ba & -bb \\ (a-d)a - bc & (a-d)b + bd \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -ab + b(a-d) & bb \\ -cb + d(a-d) & db \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -ba - ab + ba - bd & -bb + bb \\ aa - da - bc - cb + da - dd & ab - db + bd - db \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(ab+bd) & 0 \\ (aa+bc) - (cb+dd) & ab+bd \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh $d(X^2) = d(X)X + Xd(X)$, sehingga d merupakan derivasi Jordan pada $M_2(\mathbb{R})$.

Proposisi 2.12.4 Diberikan ring R bebas 2-torsi dan pemetaan $d : R \to R$ yang merupakan derivasi Jordan pada R. Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku:

(i)

$$d(ab + ba) = d(a)b + ad(b) + d(b)a + bd(a). \tag{2.12.1}$$

(ii)

$$d(aba) = d(a)ba + ad(b)a + abd(a). \tag{2.12.2}$$

(iii)

$$d(abc+cba) = d(a)bc+ad(b)c+abd(c)+d(c)ba+cd(b)a+cbd(a) \tag{2.12.3}$$

(Bresar, 1988).

Bukti. Karena d merupakan derivasi Jordan pada R, untuk setiap $x \in R$ berlaku:

$$d(x^2) = d(x)x + xd(x). \tag{2.12.4}$$

i. Diberikan sebarang $a, b \in R$. Dengan mensubstitusikan $x = a + b$ ke dalam Persamaan (2.12.4), diperoleh

$$d((a+b)^2) = d(a+b)(a+b) + (a+b)d(a+b). \tag{2.12.5}$$

Perhatikan bahwa $(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$. Karena d bersifat aditif, sisi kiri Persamaan (2.12.5) dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} d((a+b)^2) &= d(a^2 + ab + ba + b^2) \\ &= d(a^2) + d(ab) + d(ba) + d(b^2). \end{aligned} \tag{2.12.6}$$

Dengan menggunakan $d(a+b) = d(a) + d(b)$, sisi kanan Persamaan (2.12.5) dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} d(a+b)(a+b) + (a+b)d(a+b) &= (d(a)+d(b))(a+b) + (a+b)(d(a) \\ &\quad + d(b)) \\ &= d(a)a + d(a)b + d(b)a + d(b)b + ad(a) \\ &\quad + ad(b) + bd(a) + bd(b). \end{aligned} \tag{2.12.7}$$

Dengan menyamakan Persamaan (2.12.6) dan Persamaan (2.12.7) diperoleh

$$\begin{aligned} d(a^2) + d(ab) + d(ba) + d(b^2) &= d(a)a + d(a)b + d(b)a + d(b)b + ad(a) \\ &\quad + ad(b) + bd(a) + bd(b). \end{aligned} \tag{2.12.8}$$

Selanjutnya, berdasarkan identitas Jordan untuk elemen a dan b, diperoleh

$$d(a^2) = d(a)a + ad(a) \quad \text{dan} \quad d(b^2) = d(b)b + bd(b).$$

Dengan mengeliminasi suku $d(a^2)$ dan $d(b^2)$ pada kedua ruas Persamaan (2.12.8), diperoleh

$$d(ab) + d(ba) = d(a)b + ad(b) + d(b)a + bd(a). \tag{2.12.9}$$

Dengan memperhatikan bahwa pemetaan d bersifat aditif sehingga $d(ab + ba) = d(ab) + d(ba)$, Persamaan (2.12.9) dapat dituliskan sebagai Pernyataan (i). Dengan demikian, terbukti bahwa

$$d(ab + ba) = d(a)b + ad(b) + d(b)a + bd(a), \text{ untuk setiap } a, b \in R.$$

ii. Diberikan sebarang $a, b \in R$. Dengan mensubstitusikan $b = ba$ ke dalam Persamaan (2.12.9), diperoleh

$$d(a(ba)) + d((ba)a) = d(a)(ba) + ad(ba) + d(ba)a + (ba)d(a). \tag{2.12.10}$$

Perhatikan bahwa $a(ba) = aba$ dan $(ba)a = baa$.

Oleh karena itu, Persamaan (2.12.10) menjadi

$$d(aba) + d(baa) = d(a)ba + ad(ba) + d(ba)a + bad(a). \tag{2.12.11}$$

Dengan menggunakan fakta bahwa d adalah derivasi Jordan, berlaku $d(a^2) = d(a)a + ad(a)$. Kalikan kedua ruas dari persamaan tersebut di sebelah kiri dengan b, sehingga diperoleh $bd(a^2) = bd(a)a + bad(a)$. Selanjutnya, karena d bersifat aditif dan $a^2 = aa$, maka $d(ba^2) = d(baa)$. Oleh karena itu, dengan menerapkan sifat derivasi Jordan pada $d(ba^2)$, diperoleh

$$d(baa) = d(b)a^2 + bd(a^2) = d(b)a^2 + bd(a)a + bad(a).$$

Substitusikan bentuk ini ke dalam Persamaan (2.12.11), sehingga diperoleh

$$d(aba) + \big(d(b)a^2 + bd(a)a + bad(a)\big) = d(a)ba + ad(ba) + d(ba)a + bad(a).$$

Perhatikan bahwa suku $ba\,d(a)$ muncul pada kedua ruas persamaan sebelumnya. Dengan menghilangkan suku yang sama pada kedua ruas, diperoleh

$$d(aba) + d(b)a^2 + bd(a)a = d(a)ba + ad(ba) + d(ba)a. \qquad (2.12.12)$$

Selanjutnya, gunakan bentuk perluasan untuk $d(ba)$, yaitu $d(ba) = d(b)a + bd(a)$, sehingga

$$ad(ba) = a\big(d(b)a + bd(a)\big) = ad(b)a + abd(a)$$

dan

$$d(ba)a = \big(d(b)a + bd(a)\big)a = d(b)a^2 + bd(a)a.$$

Substitusikan kedua bentuk tersebut ke dalam Persamaan (2.12.12), sehingga diperoleh

$$d(aba) + d(b)a^2 + bd(a)a = d(a)ba + \big(ad(b)a + abd(a)\big) + \big(d(b)a^2 + bd(a)a\big).$$

Suku $d(b)a^2$ dan $bd(a)a$ muncul pada kedua ruas, sehingga dapat dihilangkan. Dengan demikian, terbukti bahwa

$$d(aba) = d(a)ba + ad(b)a + abd(a), \text{ untuk setiap } a, b \in R.$$

iii. Diberikan sebarang $a, b, c \in R$. Dengan mensubstitusikan $a = a + c$ ke dalam Persamaan (2.12.2), diperoleh

$$d((a+c)b(a+c)) = d(a+c)b(a+c) + (a+c)d(b)(a+c) + (a+c)b\,d(a+c). \tag{2.12.13}$$

Dengan menerapkan sifat distributif pada ring terhadap bentuk $(a+c)b(a+c)$, diperoleh

$$(a+c)b(a+c) = aba + abc + cba + cbc.$$

Selanjutnya, karena pemetaan d bersifat aditif, maka sisi kiri Persamaan (2.12.13) dapat dituliskan sebagai

$$d((a+c)b(a+c)) = d(aba) + d(abc) + d(cba) + d(cbc). \tag{2.12.14}$$

Di sisi lain, karena pemetaan d bersifat aditif, yaitu $d(a+c) = d(a) + d(c)$, maka sisi kanan Persamaan (2.12.13) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} d(a+c)b(a+c) &= (d(a) + d(c))\, b\, (a+c) \\ &= d(a)ba + d(a)bc + d(c)ba + d(c)bc, \end{aligned} \tag{2.12.15}$$

$$(a+c)d(b)(a+c) = ad(b)a + ad(b)c + cd(b)a + cd(b)c, \tag{2.12.16}$$

dan

$$\begin{aligned} (a+c)b\,d(a+c) &= (a+c)b(d(a) + d(c)) \\ &= ab\,d(a) + ab\,d(c) + cb\,d(a) + cb\,d(c). \end{aligned} \tag{2.12.17}$$

Dengan menjumlahkan Persamaan (2.12.15), Persamaan (2.12.16), dan Persamaan (2.12.17) diperoleh

$$\begin{aligned} & d(a+c)b(a+c) + (a+c)d(b)(a+c) + (a+c)b\,d(a+c) \\ &= (d(a)ba + d(a)bc + d(c)ba + d(c)bc) + (ad(b)a + ad(b)c + cd(b)a \\ &\quad + cd(b)c) + (ab\,d(a) + ab\,d(c) + cb\,d(a) + cb\,d(c)) \\ &= \big(d(a)ba + ad(b)a + ab\,d(a)\big) + \big(d(c)bc + cd(b)c + cb\,d(c)\big) \\ &\quad + \big(d(a)bc + ad(b)c + ab\,d(c)\big) + \big(d(c)ba + cd(b)a + cb\,d(a)\big). \end{aligned} \tag{2.12.18}$$

Dengan menyamakan Persamaan (2.12.14) dan Persamaan (2.12.18) diperoleh

$$
\begin{aligned}
d(aba) + d(abc) + d(cba) + d(cbc) = {} & \big(d(a)ba + ad(b)a + ab\,d(a)\big) \\
& + \big(d(c)bc + cd(b)c + cb\,d(c)\big) \\
& + \big(d(a)bc + ad(b)c + ab\,d(c)\big) \\
& + \big(d(c)ba + cd(b)a + cb\,d(a)\big).
\end{aligned}
\tag{2.12.19}
$$

Selanjutnya, berdasarkan Pernyataan (ii), persamaan yang memuat suku $d(aba)$ dan $d(cbc)$, dapat dituliskan sebagai berikut:

$$d(aba) = d(a)ba + ad(b)a + ab\,d(a), \text{ dan } d(cbc) = d(c)bc + cd(b)c + cb\,d(c).$$

Dengan mengeliminasi suku $d(aba)$ dan $d(cbc)$ pada kedua ruas Persamaan (2.12.19), diperoleh

$$d(abc) + d(cba) = d(a)bc + ad(b)c + ab\,d(c) + d(c)ba + cd(b)a + cb\,d(a). \tag{2.12.20}$$

Dengan memperhatikan bahwa pemetaan d bersifat aditif sehingga $d(abc + cba) = d(abc) + d(cba)$, Persamaan (2.12.20) dapat dituliskan sebagai Pernyataan (iii). Dengan demikian, terbukti bahwa

$$d(abc + cba) = d(a)bc + ad(b)c + ab\,d(c) + d(c)ba + cd(b)a + cb\,d(a).$$

untuk setiap $a, b \in R$.

■

2.13 Derivasi Nilpoten

Suatu derivasi d pada ring R disebut derivasi nilpoten apabila terdapat bilangan bulat positif n sedemikian sehingga penerapan d secara berulang (melalui komposisi dengan dirinya sendiri) sebanyak n kali menghasilkan pemetaan nol.

Definisi 2.13.1 Derivasi d pada ring R dikatakan nilpoten apabila terdapat suatu bilangan bulat positif n sehingga $d^n(R) = 0$ (Ali dkk., 2024).

Dengan kata lain, untuk setiap $x \in R$ berlaku $d^n(x) = 0$. Bilangan bulat positif n terkecil yang memenuhi sifat tersebut disebut indeks nilpotensi dari derivasi d.

Secara formal, untuk setiap $x \in R$ berlaku

$$d^n(x) = \underbrace{d(d(\dots d(x)\dots))}_{n \text{ kali}} = 0.$$

Pernyataan ini berarti bahwa komposisi d sebanyak n kali terhadap sebarang elemen x menghasilkan nol. Perlu diperhatikan bahwa operasi pada d merupakan komposisi fungsi, bukan perkalian biasa. Notasi $d^n R = 0$ menyatakan bahwa $d^n(x) = 0$ untuk setiap $x \in R$, atau secara ekuivalen *image* dari pemetaan d^n adalah himpunan nol, yaitu $\mathrm{Im}(d^n) = \{0\}$.

Sebagai ilustrasi:

$$\begin{aligned} &d^1(x) = d(x), \\ &d^2(x) = d(d(x)), \\ &d^3(x) = d(d(d(x))), \text{ dan seterusnya.} \end{aligned}$$

Jika terdapat bilangan bulat positif n sehingga $d^n(x) = 0$ untuk semua $x \in R$, maka dikatakan bahwa d merupakan derivasi nilpoten dengan indeks n.

Selanjutnya disajikan contoh paling sederhana dari derivasi nilpoten, yaitu derivasi nilpoten trivial.

Contoh 2.13.2 Diberikan $R = \mathbb{R}$ atau secara umum $R = \mathbb{C}$. Didefinisikan pemetaan $d : R \to R, \quad d(x) = 0$. Jelas bahwa d memenuhi sifat-sifat derivasi, yakni berlaku: $d(a + b) = 0 = d(a) + d(b)$ dan $d(ab) = 0 = d(a)b + a\,d(b)$ untuk setiap $a, b \in R$.

Dengan demikian, d merupakan suatu derivasi pada R. Selain itu, $d^1 = 0$ yang menunjukkan bahwa d merupakan derivasi nilpoten dengan indeks nilpotensi 1. Pada konteks yang lebih umum, khususnya pada ring sederhana dengan karakteristik tertentu, sifat derivasi nilpoten menjadi lebih terstruktur. Dalam hal ini, setiap derivasi nilpoten dapat dipandang sebagai derivasi *inner* yang diinduksi oleh suatu elemen nilpoten, yang secara formal ditulis sebagai

$$x \mapsto [a, x] = ax - xa,$$

dengan a merupakan elemen nilpoten dalam ring. Hasil yang lebih mendalam menunjukkan bahwa indeks dari derivasi nilpoten pada ring sederhana selalu merupakan bilangan ganjil, yaitu sebesar $2m - 1$, dengan m menyatakan indeks nilpotensi dari elemen a tersebut (Herstein, 1963).

Contoh 2.13.3 Diberikan lapangan K dan $R = M_2(K)$, yaitu ring semua matriks berukuran 2×2 dengan entri dari lapangan K. Definisikan suatu pemetaan derivasi $d : R \to R$, dengan $d(A) = EA - AE$. Selanjutnya, pilih $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$, jelas bahwa $E^2 = 0$, hal ini berarti indeks nilpotensi dari E adalah 2. Akan ditunjukkan bahwa indeks dari derivasi nilpoten bernilai $2E - 1 = 3$.

Diberikan $A = \begin{bmatrix} o & p \\ q & r \end{bmatrix} \in R$, diperoleh

$$EA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} o & p \\ q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad AE = \begin{bmatrix} o & p \\ q & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & o \\ 0 & q \end{bmatrix}.$$

Sehingga

$$d(A) = EA - AE = \begin{bmatrix} q & r - o \\ 0 & -q \end{bmatrix}.$$

Langkah berikutnya,

$$\begin{aligned} d^2(A) &= d(d(A)) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q & r - o \\ 0 & -q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} d^3(A) &= d(d^2(A)) \\ &= d \begin{bmatrix} 0 & -q \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jadi $d^3 = 0$, sehingga terbukti d merupakan derivasi nilpoten pada R dengan indeks nilpotensi 3.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 di Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur dan analisis teoritis dengan menelaah jurnal ilmiah, artikel, serta buku yang relevan mengenai derivasi Jordan dan derivasi nilpoten pada ring semiprima bebas 2-torsi. Penelitian ini mencakup analisis konsep, penelusuran keterhubungan konsep-konsep yang dikaji, dan pembuktian teorema untuk memperoleh kontribusi teoretis. Rincian langkah-langkah penelitian dijelaskan sebagai berikut.

1. Mengkaji teori dasar yang berkaitan dengan ring, ideal, ring semiprima dan ring bebas 2-torsi, serta konsep derivasi, derivasi *inner*, derivasi Jordan, dan derivasi nilpoten dalam aljabar.
2. Menelaah hasil penelitian terdahulu yang berkaitan dengan hubungan derivasi Jordan dan derivasi pada ring semiprima bebas 2-torsi.
3. Menyelidiki hubungan derivasi Jordan dan derivasi nilpoten pada ring semiprima bebas 2-torsi melalui pembuktian matematis deduktif.
4. Menganalisis hasil teorema yang diperoleh pada ring semiprima bebas 2-torsi.
5. Memberikan contoh sebagai ilustrasi sifat dan teorema yang diperoleh.

Penelitian ini dilakukan melalui beberapa tahapan yang disusun secara sistematis. Tahapan penelitian tersebut disajikan pada Gambar 3.1.

Mengkaji teori dasar yang berkaitan dengan ring (Apriyani, 2024), ideal (Wahyuni dkk., 2017), ring faktor (Rasiman dkk., 2018), ring semiprima dan ring bebas 2-torsi (Bresar, 1988), serta konsep derivasi (Ernanto, 2018), derivasi *inner* (Ber dkk., 2020), derivasi Jordan (Ali dkk., 2024), dan derivasi nilpoten (Ali dkk., 2024) dalam aljabar.

↓

Langkah 1 Menelaah hasil penelitian terdahulu mengenai hubungan derivasi Jordan dan derivasi pada ring semiprima bebas 2-torsi.

↓

Langkah 2 Menyelidiki hubungan derivasi Jordan dan derivasi nilpoten pada ring semiprima bebas 2-torsi melalui pembuktian deduktif.

↓

Langkah 3 Menganalisis hasil teorema yang diperoleh pada ring semiprima bebas 2-torsi.

↓

Langkah 4 Memberikan contoh sebagai ilustrasi sifat dan teorema yang diperoleh.

Gambar 3.1 Langkah-langkah penelitian

.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab hasil, diperoleh bahwa pada ring semiprima yang bebas 2-torsi, setiap derivasi Jordan memenuhi aturan Leibniz sehingga dapat dipandang sebagai derivasi. Selanjutnya, untuk derivasi nilpoten pada ring semiprima bebas 2-torsi berlaku pola indeks nilpotensi ganjil, yaitu apabila terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $d^{2n}(R) = 0$, maka berlaku $d^{2n-1}(R) = 0$. Penggabungan kedua fakta tersebut menghasilkan teorema utama, yaitu setiap derivasi Jordan nilpoten pada ring semiprima bebas 2-torsi merupakan derivasi nilpoten dengan indeks nilpotensi ganjil. Akibat langsungnya, derivasi Jordan nilpoten tidak mungkin berindeks genap; khususnya, kondisi $d^2 = 0$ memaksa $d = 0$. Selain itu, untuk derivasi inner yang dibangkitkan oleh elemen nilpoten $P \in R$ dengan indeks nilpotensi n, diperoleh bahwa derivasi inner $d_P(x) = [P, x]$ bersifat nilpoten dan memenuhi $d_P^{2n-1}(R) = 0$, sehingga indeks nilpotensi d_P paling tinggi adalah $2n - 1$. Sebagai catatan, apabila elemen pembangkit P tidak nilpoten dan $d_P \neq 0$, maka derivasi inner tersebut bukan merupakan derivasi Jordan nilpoten.

5.2 Saran

Penelitian ini masih terbatas pada kajian derivasi Jordan dan derivasi nilpoten pada ring semiprima bebas 2-torsi. Oleh karena itu, penelitian selanjutnya dapat diarahkan untuk mengkaji apakah hasil-hasil yang diperoleh tetap berlaku apabila syarat bebas 2-torsi dilemahkan atau diganti dengan kondisi aljabar lain yang lebih umum. Selain itu, menarik untuk menyelidiki perilaku derivasi Jordan nilpoten pada kelas ring yang lebih luas, seperti ring dengan ideal nilpoten tak nol atau ring yang tidak semiprima. Penelitian lanjutan juga dapat difokuskan pada pemetaan aditif lain yang berkaitan dengan derivasi, misalnya pemetaan yang memenuhi derivasi *triple* Jordan atau identitas komutator tertentu, serta keterkaitannya dengan struktur pusat ring. Di samping itu, eksplorasi contoh konkret pada ring matriks berdimensi lebih tinggi atau pada kelas ring nonkomutatif lainnya diharapkan dapat memberikan wawasan tambahan mengenai batasan dan kekuatan hasil-hasil yang telah diperoleh dalam penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Ahmed, W., Alali, A. S., & Mozumder, M. R. 2024. Characterization of (α, β)-Jordan bi-derivations in prime rings. *AIMS Mathematics, 9*(6), 14549–14557. https://doi.org/10.3934/math.2024707.

Ali, S., Rafiquee, N. N., & Varshney, V. 2024. Certain types of derivations in rings: A survey. *Journal of the Indonesian Mathematical Society, 30*(2), 256–306. https://doi.org/10.22342/jims.30.2.1623.256-306.

Alali, A. S., Alnoghashi, H. M., & Rehman, N. u. 2023. Centrally-extended Jordan $*$-derivations centralizing symmetric or skew elements. *Axioms, 12*(1), 86. https://doi.org/10.3390/axioms12010086.

Andari, A. 2015. *Teori Grup.* Universitas Brawijaya Press.

Andari, A. 2017. *Ring, Field dan Daerah Integral (Edisi Revisi)*. Malang: Universitas Brawijaya Press.

Apriyani, D. C. N. 2024. *Buku Ajar Teori Ring.* LPPM Press STKIP PGRI Pacitan.

Ber, A., Kudaybergenov, K., & Sukochev, F. 2020. Notes on Derivations of Murray–von Neumann algebras. *Journal of Functional Analysis*, 279(1), 1–26.

Bera, N., & Dhara, B. 2023. Jordan homoderivation behavior of generalized derivations in prime rings. *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, 75*(9), 1178–1194. https://doi.org/10.3842/umzh.v75i9.7241.

Bhushan, B., Sandhu, G. S., Ali, S., & Kumar, D. 2023. Centrally-extended generalized Jordan derivations in rings. *Studia Mathematica, 22*(1), 33–47. https://doi.org/10.2478/aupcsm-2023-0004.

Bresar, M. 1988. Jordan derivations on semiprime rings. *Proceedings of the American Mathematical Society, 104*(4), 1003–1006.

Chung, L. O., & Luh, J. 1983. Nilpotency of derivations. *Canadian Mathematical Bulletin, 26*, 34–346.

Chung, L. O., & Luh, J. 1984. Nilpotency of derivations. II. *Proceedings of the American Mathematical Society, 91*(3), 357–358. 10.1090/S0002-9939-1984-0744628-9.

Das, M. R., Islam, M. A., Faruk, O., & Kar, S. 2020. Jordan right derivations on semiprime Γ-ring. *Journal of Mechanics of Continua and Mathematical Sciences, 17*(9), 14–24. https://doi.org/10.26782/jmcms.2022.09.00003.

Dasgupta, N., & Gaifullin, S. A. 2025. On locally nilpotent derivations of polynomial algebra in three variables. *Sbornik Mathematics, 216*(4), 456–484. https://doi.org/10.4213/sm10094e.

Ekrami, S. Kh. 2022. Jordan higher derivations, a new approach. *Journal of Algebraic Systems*, 10(1), 167–177.

Ernanto, I. 2018. Sifat-sifat ring faktor yang dilengkapi derivasi. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA), 1*(1), 12-21.

Fitriani, & Faisol, A. 2022. *Grup*. Matematika, Yogyakarta.

Fitriani, Wijayanti, I. E., Faisol, A., & Ali, S. 2022. On f-derivations on polynomial modules. *Journal of Algebra and Its Applications, 21*(12), 2250235. https://doi.org/10.1142/S0219498821501613.

Faisol, A., & Fitriani. 2025. A study of derivations and linear mappings on skew generalized power series modules. *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, 19*(4), 3047–3058. https://doi.org/10.30598/barekengvol19no4pp3047-3058.

Hattori, K., & Kojima, H. 2024. Rings of nilpotent elements of monomial derivations on polynomial rings. *Communications in Algebra, 52*(7), 2998–3009. https://doi.org/10.1080/00927872.2024.2312459.

Herstein, I.N. 1963. Sui Commutatori Degli Anelli Semplici, *Seminario Mat. e. Fis. di Milano, 33*, 80-86.

Hongan, M., & Rehman, N. u. 2012. On generalized Jordan *-derivations in semiprime rings with involution. *Palestine Journal of Mathematics, 1*(2), 74–75.

Karim, M. 2022. Jordan generalized centralizerhomo on prime rings. *Journal of Advances in Mathematics, 21*, 1–4. https://doi.org/10.24297/jam.v21i.9159.

Liu, D., & Sun, X. 2022. Retracts that are kernels of locally nilpotent derivations. *Czechoslovak Mathematical Journal, 72*(1), 191–199. https://doi.org/10.21136/CMJ.2021.0388-20.

Ma, A., Chen, L., & Qin, Z. 2023. Jordan semi-triple derivations and Jordan centralizers on generalized quaternion algebras. *AIMS Mathematics, 8*(3), 6026–6035. https://doi.org/10.3934/math.2023304.

Madni, M. A., Mozumder, M. R., Ansari, A. Z., & Shujat, F. 2025. Characterization of multiplicative mixed Jordan-type derivations on ring with involution. *European Journal of Pure and Applied Mathematics, 18*(2). https://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.v18i2.6084.

Malleswari, G. N., & Sreenivasulu, S. 2024. On skew Jordan product and generalized derivations in prime rings with involution. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, 63*(4), 329–334. https://doi.org/10.17654/0972555524020.

Mursyidah, D. L., Utami, B. H. S., Fitriani, & Faisol, A. 2025. Nil derivation and δ-ideal on polynomial ring. *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 16(3), 1069–1078.

Rasiman, Rubowo, M. R., & Pramasyahsari, A. S. 2018. *Teori Ring*. Univ. PGRI Semarang Press, Semarang.

Ren, D., & Zhang, J. 2025. Nonlinear mixed $*$-Jordan type higher derivations on $*$-algebras. *Filomat, 39*(15), 5203–5216. https://www.pmf.ni.ac.rs/filomat-content/2025/39-15/39-15-16-24758.pdf.

Shujat, F., Alharbi, F., & Ansari, A. Z. 2025. Weak (p, q)-Jordan centralizer and derivation on rings and algebras. *AIMS Mathematics, 10*(4), 8322–8330. https://doi.org/10.3934/math.2025383.

Sitompul, D. E., Fitriani, Chasanah S. L., & Faisol A. 2025. Jordan Derivation on the polynomial ring $R[x]$. *Integra: Journal of Integrated Mathematics and Computer Science, 2*(2), 41-47.

Sun, X., & Wang, B. 2024. Images of locally nilpotent derivations of bivariate polynomial algebras over a domain. *Czechoslovak Mathematical Journal, 74*(2), 599–610. https://doi.org/10.21136/CMJ.2024.0008-24.

Suryanti, S. 2017. *Teori Grup (Struktur Aljabar 1)*. UMG Press. Gresik.

Thomas, A. B., Puspita, N. P., & Fitriani. 2024. Derivation on several rings. *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, 18*(3), 1729–1738. https://doi.org/10.30598/barekengvol18iss3pp1729-1738.

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. 2017. *Teori Ring dan Modul*. Gadjah Mada University Press.

Waluyo, R., Faisol, A., & Fitriani. 2025. (σ, τ)-Derivasi pada ring grup. *Euler: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi, 13*(2), 142–146. https://doi.org/10.37905/euler.v13i2.31564.