DIMENSI PARTISI BEBERAPA GRAF DENGAN DUA JEMBATAN

(Skripsi)

Oleh

PUONE THAHIRA RACHMANI
2217031086

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

ABSTRACT

PARTITION DIMENSION OF SOME GRAPHS WITH TWO BRIDGES

By

PUONE THAHIRA RACHMANI

Let $G = (V, E)$ be a connected graph. A partition $\Pi = \{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$ of the vertex set $V(G)$, where G is a connected graph, is called a resolving partition if each vertex of G has a unique representation with respect to Π. The distance from a vertex u to a partition L, denoted by $d(u, L)$, is defined as $d(u, L) = \min\{d(u, l_i) \mid l_i \in L\}$. The vector $(d(u, L_1), d(u, L_2), \ldots, d(u, L_k))$ is called the representation of the vertex u with respect to the partition Π, denoted by $r(u \mid \Pi)$. The minimum number k of subsets in such a partition is called the partition dimension of the graph G, denoted by $pd(G)$. In this research, we study the partition dimension of graphs with two bridges formed by connecting two graphs through two new edges. The focus of this study is on double bridge graphs constructed from several pairs of graphs, namely path graphs, cycle graphs, star graphs, complete graphs, and rose graphs. For each pair of graphs, the exact value of the partition dimension is determined, as well as a lower bound for the partition dimension of a graph formed from arbitrary graphs.

Keywords: Graph, Partition Dimension, Double Bridge Graphs

ABSTRAK

DIMENSI PARTISI BEBERAPA GRAF DENGAN DUA JEMBATAN

Oleh

PUONE THAHIRA RACHMANI

Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf terhubung. Suatu partisi $\Pi = \{L_1, L_2, ..., L_k\}$ dari himpunan titik $V(G)$ dengan G merupakan graf terhubung disebut partisi pembeda jika setiap titik di G memiliki representasi yang unik terhadap Π. Jarak dari titik u ke partisi L, dinotasikan dengan $d(u, L)$, didefinisikan dengan $min\{d(u, l_i|l_i \in L\}$. Vektor $d((u, L_1), d(u, L_2), ..., d(u, L_k))$ merupakan representasi dari titik u ke himpunan partisi Π, dinotasikan dengan $r(u|\Pi)$. Minimum k partisi disebut sebagai dimensi partisi dari graf G, dinotasikan dengan $pd(G)$. Dalam penelitian ini dikaji dimensi partisi graf dengan dua jembatan yang dibentuk dengan menghubungkan dua graf melalui dua sisi baru. Fokus penelitian ini adalah graf dengan dua jembatan yang dikonstruksi dari beberapa pasangan graf, yaitu graf lintasan, graf lingkaran, graf bintang, graf lengkap, dan graf mawar. Untuk setiap pasangan graf tersebut ditentukan nilai eksak dimensi partisinya, serta batas bawah dimensi partisi untuk graf sebarang.

Kata-kata kunci: Graf, Dimensi Partisi, Graf Dua Jembatan

DIMENSI PARTISI BEBERAPA GRAF DENGAN DUA JEMBATAN

Oleh

PUONE THAHIRA RACHMANI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

Judul Skripsi	:	**DIMENSI PARTISI BEBERAPA GRAF DENGAN DUA JEMBATAN**
Nama Mahasiswa	:	**PUONE THAHIRA RACHMANI**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031086**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.	**Dr. Dian Kastika Syofyan, S.Si., M.Si.**
NIP 19760411 200012 2 001	NIP 19890117 202403 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dr. Dian Kastika Syofyan, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **29 Januari 2026**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Puone Thahira Rachmani**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031086**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Dimensi Partisi Beberapa Graf dengan Dua Jembatan**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 29 Januari 2026

Puone Thahira Rachmani

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Puone Thahira Rachmani, lahir pada tanggal 26 April 2004 di OKU Timur, Sumatera Selatan. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara, putri dari pasangan Bapak Triyoko, S.E. dan Ibu Netti Yuniarti, S.Pd.

Penulis menempuh pendidikan formal di Taman Kanak-Kanak (TK) Negeri Nusa Bakti pada tahun 2007–2009, kemudian melanjutkan pendidikan di Sekolah Dasar (SD) Negeri 2 Trikarya pada tahun 2009–2016. Pendidikan menengah pertama ditempuh di SMP Negeri 2 Belitang III pada tahun 2016–2018, kemudian melanjutkan di SMP Negeri 4 Martapura pada tahun 2018–2019. Selanjutnya, penulis menempuh pendidikan menengah atas di SMA Negeri 1 Belitang pada tahun 2019–2022.

Pada tahun 2022, penulis terdaftar sebagai mahasiswi Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi (SBMPTN). Pada tahun 2025, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sinar Gunung, Kecamatan Abung Pekurun, Kabupaten Lampung Utara, Provinsi Lampung selama 30 hari pada periode Januari–Februari 2025 sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat. Pada tahun yang sama, penulis juga mengikuti kegiatan Merdeka Belajar Kampus Merdeka (MBKM) di Badan Riset dan Inovasi Nasional (BRIN) Cibinong, Bogor, Jawa Barat, selama lima bulan, pada periode Februari–Juli 2025.

KATA INSPIRASI

”Dan sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar.”
(QS. Al-Baqarah: 153)

”Hadapi semuanya langsung di muka, apapun yang terjadi tidak apa, setiap hari ku bersyukur, melihatmu berselimut harapan, berbekal cerita.”
(Hindia, Baskara Putra)

”Semua jatuh bangunmu hal yang biasa, angan dan pertanyaan waktu yang menjawabnya, berikan tenggat waktu bersedihah secukupnya, rayakan perasaanmu sebagai manusia.”
(Hindia, Baskara Putra)

”Maaf atas perjalanan yang tidak sempurna, namun percayalah untukmu kujual dunia.”
(Hindia, Baskara Putra)

”Pada akhirnya ini semua hanyalah permulaan.”
(Nadin Amizah)

PERSEMBAHAN

Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat, karunia, dan ridho-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu persyaratan untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Skripsi ini penulis persembahkan dengan penuh rasa syukur dan terima kasih kepada bunda, ayah, kakak, dan adik tercinta, atas doa yang tak pernah terputus, pengorbanan, kasih sayang, serta dukungan yang tulus. Setiap tetes keringat dan perjuangan yang diberikan menjadi kekuatan bagi penulis hingga dapat menyelesaikan pendidikan dan meraih gelar sarjana.

Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada dosen pembimbing, dosen pembahas, serta seluruh dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung, atas bimbingan, ilmu pengetahuan, arahan, dan nasihat yang telah diberikan selama proses perkuliahan hingga penyusunan skripsi ini.

Terima kasih juga penulis ucapkan kepada teman-teman seperjuangan yang telah memberikan dukungan, semangat, serta kebersamaan selama penulis menempuh pendidikan di bangku perkuliahan.

Akhir kata, skripsi ini penulis persembahkan kepada almamater tercinta, Universitas Lampung.

SANWACANA

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala berkat, rahmat, dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik. Skripsi yang berjudul Dimensi Partisi Beberapa Graf dengan Dua Jembatan ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis menyadari bahwa keberhasilan tidak terlepas dari bantuan, dukungan, dan bimbingan berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku pembimbing utama, atas kesediaan beliau meluangkan waktu, memberikan bimbingan, arahan, masukan, serta motivasi yang sangat berarti bagi penulis sejak awal hingga terselesaikannya skripsi ini.

2. Ibu Dr. Dian Kastika Syofyan, S.Si., M.Si. selaku pembimbing kedua, atas perhatian, kesabaran, dan dukungan beliau dalam memberikan saran, koreksi, serta pandangan yang memperkaya penyempurnaan skripsi ini.

3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung dan penguji utama, atas evaluasi, kritik, dan saran yang membangun sehingga skripsi ini dapat disusun dengan lebih baik dan sistematis.

4. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing akademik, atas bimbingan dan arahan yang diberikan selama penulis menempuh pendidikan di Jurusan Matematika.

5. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung atas bantuan, pelayanan, serta ilmu yang telah diberikan kepada penulis selama masa perkuliahan.

7. Kedua orang tua tercinta, Bunda Netti Yuniarti dan Ayah Triyoko serta kakak penulis Puone Aissyah Maharani dan adik penulis Puone Abizzar Alghifari, atas doa, kasih sayang, dukungan moral, dan pengorbanan yang tak ternilai selama proses perkuliahan hingga penyusunan skripsi ini.

8. Riahana Bersyeba Br Saragi dan Wanda Trecy Raninta Simarmata, yang telah membersamai, memberikan semangat, serta dukungan kepada penulis selama proses penyusunan skripsi.

9. Mawar, Gebrina, Anisa Fatin, Vina, dan Adinda selaku teman satu bimbingan, atas kebersamaan, dukungan, dan semangat yang saling diberikan selama proses penyusunan skripsi.

10. Teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika angkatan 2022, atas kebersamaan dan pengalaman berharga selama masa perkuliahan.

11. Diri penulis sendiri, terima kasih telah bertahan sejauh ini untuk setiap malam yang dilalui dengan lelah, setiap pagi yang disertai keraguan dan ketakutan, serta setiap tantangan yang mampu dihadapi dengan keberanian dan keikhlasan, meskipun tidak selalu berjalan sesuai dengan harapan.

12. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah memberikan bantuan, dukungan, serta pemikiran demi kelancaran dan keberhasilan penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih memiliki keterbatasan dan kekurangan. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi pembaca dan perkembangan ilmu pengetahuan.

DAFTAR ISI

ABSTRAK . . . . **iii**

DAFTAR ISI . . . . **xiii**

DAFTAR GAMBAR . . . . **xiv**

I PENDAHULUAN **1**

1.1 Latar Belakang Masalah 1

1.2 Tujuan Penelitian 4

1.3 Manfaat Penelitian 4

II TINJAUAN PUSTAKA **5**

2.1 Konsep Dasar Graf dan Beberapa Kelas Graf 5

2.2 Dimensi Metrik Graf 10

2.3 Dimensi Partisi Graf 12

III METODE PENELITIAN **16**

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 16

3.2 Metode Penelitian 16

IV HASIL DAN PEMBAHASAN **18**

4.1 Dimensi Partisi Graf dengan Dua Jembatan dari Dua Graf Sebarang $pd(B(G_1, G_2, e_1, e_2))$ 18

4.2 Dimensi Partisi Graf dengan Dua Jembatan dari Graf Lintasan - Graf Lintasan $(B(P_m, P_n, e_1, e_2))$ 19

4.3 Dimensi Partisi Graf dengan Dua Jembatan dari Graf Lingkaran - Graf Lingkaran $(B(C_m, C_n, e_1, e_2))$ 22

4.4 Dimensi Partisi Graf dengan Dua Jembatan dari Graf Bintang - Graf Bintang $(B(S_m, S_n, e_1, e_2))$ 25

4.5 Dimensi Partisi Graf dengan Dua Jembatan dari Graf Lengkap - Graf Lengkap $(B(K_m, K_n, e_1, e_2))$ 30

4.6 Dimensi Partisi Graf dengan Dua Jembatan dari Graf Lintasan - Graf Lingkaran $(B(P_m, C_n, e_1, e_2))$ 35

4.7 Dimensi Partisi Graf dengan Dua Jembatan dari Graf Lintasan - Graf Bintang $(B(P_m, S_n, e_1, e_2))$ 39

4.8 Dimensi Partisi Graf dengan Dua Jembatan dari Graf Lintasan - Graf Lengkap $(B(P_m, K_n, e_1, e_2))$ 43
4.9 Dimensi Partisi Graf dengan Dua Jembatan dari Graf Lingkaran - Graf Bintang $(B(C_m, S_n, e_1, e_2))$ 47
4.10 Dimensi Partisi Graf dengan Dua Jembatan dari Graf Lingkaran - Graf Lengkap$(B(C_m, K_n, e_1, e_2))$ 51
4.11 Dimensi Partisi Graf dengan Dua Jembatan dari Graf Lengkap - Graf Bintang $(B(K_m, S_n, e_1, e_2))$ 55
4.12 Dimensi Partisi Graf dengan Dua Jembatan dari Graf Mawar - Graf Mawar $(B(M(C_m), M(C_n), e_1, e_2))$ 60

V KESIMPULAN DAN SARAN 92

5.1 Kesimpulan 92
5.2 Saran 93

DAFTAR PUSTAKA 94

DAFTAR GAMBAR

2.1 Graf G dengan 6 Titik dan 8 Sisi 5
2.2 (a) Contoh Graf G Terhubung, (b) Contoh Graf G Tidak Terhubung 6
2.3 Graf Lintasan P_6 7
2.4 Graf Lingkaran C_5 7
2.5 Graf Lengkap K_5 8
2.6 Graf Bintang S_6 8
2.7 Graf Mawar $M(C_5)$ 9
2.8 Contoh Graf Lingkaran C_5 dengan Satu Jembatan $(B(C_5, C_5, u_1, v_1))$ 9
2.9 Contoh Graf Lingkaran C_5 dengan Dua Jembatan $(B(C_5, C_5, e_1, e_2))$ 10
2.10 Graf G 11
2.11 Gedung dengan 5 Ruang. 12
2.12 Graf Lingkaran C_6 15

4.1 Graf Lintasan - Graf Lintasan $(B(P_5, P_5, e_1, e_2))$ 20
4.2 Graf Lintasan - Graf Lintasan $(B(P_7, P_5, e_1, e_2))$ 21
4.3 Graf Lingkaran - Graf Lingkaran $(B(C_6, C_6, e_1, e_2))$ 23
4.4 Graf Lingkaran - Graf Lingkaran $(B(C_8, C_7, e_1, e_2))$ 24
4.5 Graf Bintang - Graf Bintang $(B(S_7, S_7, e_1, e_2))$ 27
4.6 Graf Bintang - Graf Bintang $(B(S_8, S_6, e_1, e_2))$ 29
4.7 Graf Lengkap - Graf Lengkap $(B(K_7, K_7, e_1, e_2))$ 33
4.8 Graf Lengkap - Graf Lengkap $(B(K_6, K_5, e_1, e_2))$ 34
4.9 Graf Lintasan - Graf Lingkaran $(B(P_9, C_9, e_1, e_2))$ 36
4.10 Graf Lintasan - Graf Lingkaran $(B(P_8, C_6, e_1, e_2))$ 38
4.11 Graf Lintasan - Graf Bintang $(B(P_8, S_8, e_1, e_2))$ 41
4.12 Graf Lintasan - Graf Bintang $(B(P_4, S_7, e_1, e_2))$ 42
4.13 Graf Lintasan - Graf Lengkap $(B(P_8, K_8, e_1, e_2))$ 45
4.14 Graf Lintasan - Graf Lengkap $(B(P_8, K_6, e_1, e_2))$ 46
4.15 Graf Lingkaran - Graf Bintang $(B(C_5, S_5, e_1, e_2))$ 49

4.16 Graf Lingkaran - Graf Bintang $(B(C_5, S_6, e_1, e_2))$ 50
4.17 Graf Lingkaran - Graf Lengkap $(B(C_5, K_5, e_1, e_2))$ 53
4.18 Graf Lingkaran - Graf Lengkap $(B(C_5, K_6, e_1, e_2))$ 54
4.19 Graf Lengkap - Graf Bintang $(B(K_6, S_6, e_1, e_2))$ 57
4.20 Graf Lengkap - Graf Bintang $(B(K_8, S_6, e_1, e_2))$ 59
4.21 Kemungkinan 1 Partisi Titik-Titik u_1, u_2, v_1, dan v_2 62
4.22 Kasus (i), untuk $a_1 \in L_1, b_1 \in L_1$ 63
4.23 Kasus (ii), untuk $a_1 \in L_2, b_1 \in L_2$ 63
4.24 Kasus (iii), untuk $a_1 \in L_1, b_1 \in L_2$ 64
4.25 Kasus (iv), untuk $a_1 \in L_2, b_1 \in L_3$ 65
4.26 Kemungkinan 2 Partisi Titik-Titik u_1, u_2, v_1, dan v_2 65
4.27 Kasus (i), untuk $a_1 \in L_1, b_1 \in L_1$ 66
4.28 Kasus (ii), untuk $a_1 \in L_1, b_1 \in L_2$ 66
4.29 Kasus (iii), untuk $a_1 \in L_1, b_1 \in L_3$ 67
4.30 Kasus (iv), untuk $a_1 \in L_2, b_1 \in L_3$ 67
4.31 Kasus (v), untuk $a_1 \in L_3, b_1 \in L_3$ 68
4.32 Kemungkinan 3 Partisi Titik-Titik u_1, u_2, v_1, dan v_2 68
4.33 Kasus (i), untuk $a_1 \in L_1, b_1 \in L_1$ 69
4.34 Kasus (ii), untuk $a_1 \in L_1, b_1 \in L_2$ 70
4.35 Kasus (iii), untuk $a_1 \in L_1, b_1 \in L_3$ 70
4.36 Kasus (iv), untuk $a_1 \in L_2, b_1 \in L_2$ 71
4.37 Kasus (v), untuk $a_1 \in L_2, b_1 \in L_3$ 71
4.38 Kasus (vi), untuk $a_1 \in L_3, b_1 \in L_3$ 72
4.39 Kemungkinan 4 Partisi Titik-Titik u_1, u_2, v_1, dan v_2 73
4.40 Kasus (i), untuk $a_1 \in L_1, b_1 \in L_1$ 73
4.41 Kasus (ii), untuk $a_1 \in L_1, b_1 \in L_2$ 74
4.42 Kasus (iii), untuk $a_1 \in L_1, b_1 \in L_3$ 74
4.43 Kasus (iv), untuk $a_1 \in L_2, b_1 \in L_2$ 75
4.44 Kasus (v), untuk $a_1 \in L_2, b_1 \in L_3$ 76
4.45 Kemungkinan 5 Partisi Titik-Titik u_1, u_2, v_1, dan v_2 76
4.46 Kasus (i), untuk $a_1 \in L_1, b_1 \in L_1$ 77
4.47 Kasus (ii), untuk $a_1 \in L_1, b_1 \in L_3$ 77
4.48 Kasus (iii), untuk $a_1 \in L_2, b_1 \in L_2$ 78
4.49 Kasus (iv), untuk $a_1 \in L_2, b_1 \in L_3$ 78

4.50 Kasus (v), untuk $a_1 \in L_3, b_1 \in L_3$ 79
4.51 Kemungkinan 6 Partisi Titik-Titik u_1, u_2, v_1, dan v_2 79
4.52 Kasus (i), untuk $a_1 \in L_1, b_1 \in L_1$ 80
4.53 Kemungkinan 7 Partisi Titik-Titik u_1, u_2, v_1, dan v_2 80
4.54 Kasus (i), untuk $a_1 \in L_1, b_1 \in L_2$ 81
4.55 Kasus (ii), untuk $a_1 \in L_1, b_1 \in L_2$ 82
4.56 Kasus (iii), untuk $a_1 \in L_2, b_1 \in L_3$ 82
4.57 Kasus (iv), untuk $a_1 \in L_2, b_1 \in L_2$ 83
4.58 Kemungkinan 8 Partisi Titik-Titik u_1, u_2, v_1, dan v_2 84
4.59 Kasus (i), untuk $a_1 \in L_1, b_1 \in L_1$ 84
4.60 Kasus (ii), untuk $a_1 \in L_1, b_1 \in L_2$ 85
4.61 Kasus (iii), untuk $a_1 \in L_1, b_1 \in L_3$ 86
4.62 Kasus (iv), untuk $a_1 \in L_2, b_1 \in L_2$ 86
4.63 Kasus (v), untuk $a_1 \in L_3, b_1 \in L_3$ 87
4.64 Graf Mawar - Graf Mawar $(B(M(C_6), M(C_6), e_1, e_2))$ 88
4.65 Graf Mawar - Graf Mawar $(B(M(C_8), M(C_6), e_1, e_2))$ 90

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang mempelajari hubungan antarobjek melalui representasi titik dan sisi (Bondy dan Murty, 1982). Konsep ini memiliki peranan penting dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi, karena mampu mengaplikasikan berbagai jenis struktur dan relasi, seperti jaringan komputer, sistem komunikasi, struktur molekul, dan interaksi sosial antarindividu (Gross dan Yellen, 2004). Salah satu penerapan teori graf adalah algoritma lintasan terpendek yang digunakan untuk menentukan rute optimal pada suatu jaringan. Misalnya, penelitian oleh Koritsoglou dkk. (2022) mengembangkan algoritma lintasan terpendek berbasis penalti untuk sistem navigasi pejalan kaki. Algoritma ini memodifikasi metode k-*shortest paths* untuk memperoleh jalur alternatif yang tidak hanya paling efisien, tetapi juga lebih aman dan mudah diakses oleh pengguna. Dalam teori graf, salah satu konsep penting yang banyak dikaji adalah dimensi metrik, yaitu kardinalitas minimum himpunan pembeda dan kardinalitas dari basis metrik (Chartrand dkk., 2000a). Konsep ini kemudian dikembangkan menjadi dimensi partisi, yang diperkenalkan oleh Chartrand dkk. (1998) sebagai variasi dari dimensi metrik dengan menggunakan partisi titik.

Misalkan G adalah suatu graf terhubung dengan himpunan titik $V(G)$. Himpunan partisi dari $V(G)$ dinotasikan dengan $\Pi = \{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$. Himpunan partisi Π disebut partisi pembeda jika setiap titik di graf G memiliki representasi yang unik terhadap himpunan partisi. Jarak dari satu titik u ke himpunan partisi L dinotasikan dengan $d(u, L)$, dan didefinisikan dengan $\min\{d(u, l_i) \mid l_i \in L\}$. Minimum k partisi disebut dimensi partisi dari graf G, dinotasikan dengan $pd(G)$ (Chartrand dkk., 2000b).

Penelitian mengenai variasi konsep dimensi metrik termasuk dimensi partisi, berkembang pesat dalam beberapa tahun terakhir. Meskipun demikian, kajian dimensi partisi pada berbagai kelas graf dan penerapannya masih terbatas. Berbeda dengan dimensi metrik yang telah banyak dikaji dan diaplikasikan dalam berbagai bidang, dimensi partisi masih membutuhkan perkembangan lebih lanjut, baik secara teoretis maupun praktis. Salah satu contoh penerapan konsep dimensi metrik terdapat pada penelitian Wahyudi (2018) yang memanfaatkan dimensi metrik untuk meminimalkan jumlah sensor kebakaran pada sebuah gedung dengan merepresentasikan titik sebagai ruangan dan sisi sebagai dinding atau lantai antar ruangan pada graf. Oleh karena itu, penelitian terhadap kelas graf baru seperti graf sederhana dengan dua jembatan diharapkan dapat memperluas pemahaman dan memperkaya hasil kajian dalam bidang dimensi partisi.

Penelitian mengenai dimensi partisi graf telah berkembang cukup luas. Amrullah dkk. (2021) meneliti dimensi partisi graf, khususnya pada graf jembatan yang dinyatakan dengan $pd(B(G_1, G_2, uv))$. Graf jembatan yaitu graf yang dibentuk dengan menghubungkan dua buah graf melalui satu sisi baru. Penelitian ini memperoleh hasil dimensi partisi graf jembatan dari graf lintasan - graf lintasan yaitu:

$$pd(B(P_m, P_n, uv)) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } u, v \text{ titik daun,} \\ 3, & \text{untuk lainnya.} \end{cases}$$

Dimensi partisi untuk graf lingkaran - graf lingkaran $pd(B(C_m, C_n, uv)) = 3$, graf sembarang - graf lengkap $pd(B(G, K_n, uv) \geq n$ untuk $n \geq 4$, graf lengkap - graf lengkap $pd(B(K_m, K_n, uv) = n$ untuk $3 \leq m \leq n$, dan dimensi partisi untuk graf bintang - graf bintang yaitu:

$$pd(B(S_{1,m}, S_{1,n}, zw)) = \begin{cases} n-1, & \text{untuk } z \text{ dan } w \text{ merupakan dua titik daun,} \\ & \text{atau } z \text{ titik daun dan } w \text{ titik pusat dengan} \\ & n > m, \\ n, & \text{untuk lainnya.} \end{cases}$$

Asmiati dkk. (2025) berhasil mendapatkan dimensi partisi graf Daisy $pd(D(K_n))$

yaitu:

$$pd(D(K_n)) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 3, \\ n - \left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor, & \text{untuk } n > 3. \end{cases}$$

Dimensi partisi pada graf barbel Daisy $pd(B_{(D(K_n))})$ yaitu:

$$pd(B_{(D(K_n))}) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } n = 3, 4, \\ n - \left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor, & \text{untuk } n > 4. \end{cases}$$

Daming dan Yuliani (2024) berhasil mendapatkan dimensi partisi graf amalgamasi sisi antara graf roda dan graf bintang yaitu $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)) = 3$ untuk $4 \leq n \leq 7$ dan $m = 3$, $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)) = 4$ untuk $n = 3$ dan $3 \leq m \leq 4$, $pd(amal_s(W_n, S_m; v_1v_2, u_0u_1)) = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ untuk $n \geq 8$ dan $3 \leq m \leq \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$. Haspika dkk. (2023) berhasil mendapatkan dimensi partisi graf grid $pd(G_{m,n}) = 3$ untuk $(m, n) \geq 2$ dan n genap. Hasanah dkk. (2024) berhasil mendapatkan dimensi partisi graf hasil operasi korona tingkat-*k* $pd(G \odot {}^k P_m)$ yaitu:

$$pd(G \odot {}^k P_m) = pd(G) + k \begin{cases} 2, & \text{untuk } m \leq 4, \\ 2 + \left\lfloor \dfrac{m-4}{3} \right\rfloor, & \text{untuk } m > 4. \end{cases}$$

Dimensi partisi graf hasil operasi korona $pd(G \odot {}^k C_m)$ yaitu:

$$pd(G \odot {}^k C_m) = pd(G) + k \begin{cases} 3, & \text{untuk } m \leq 6, \\ \left\lfloor \dfrac{m}{3} \right\rfloor, & \text{untuk } m > 6. \end{cases}$$

Dimensi partisi graf hasil operasi korona $pd(G \odot {}^k K_m) = pd(G) + km$.

Sejauh penelusuran literatur yang penulis lakukan, belum terdapat penelitian yang mengkaji mengenai dimensi partisi graf dengan dua jembatan, yaitu graf yang dibentuk dengan menghubungkan dua buah graf melalui dua sisi penghubung berbeda, sehingga penelitian ini dilakukan untuk memperkenalkan dan mengkaji dimensi partisi dari graf jembatan ganda yang dibentuk dari lima graf sederhana.

Secara khusus penelitian ini menggunakan kombinasi dari graf lintasan *(path graph)*, graf lingkaran *(cycle graph)*, graf lengkap *(complete graph)*, graf bintang *(star graph)*, dan graf bunga mawar *(rose graph)*. Penelitian ini dilakukan untuk menentukan dimensi partisi graf dengan dua jembatan.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan dimensi partisi graf dengan dua jembatan pada graf sederhana.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini yaitu:

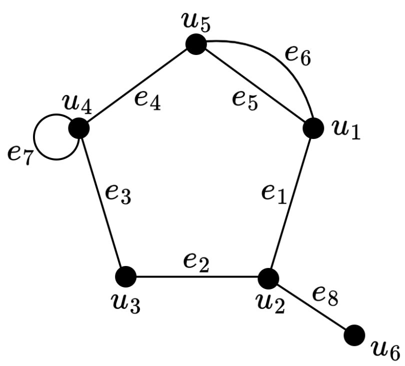
1. Mendapat dimensi partisi graf dengan dua jembatan.
2. Menambah referensi dan wawasan baru kepada pembaca.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf dan Beberapa Kelas Graf

Graf G merupakan himpunan terurut $V(G)$ dan $E(G)$ dengan $V(G)$ merupakan himpunan titik tak kosong dan dan $E(G)$ merupakan himpunan sisi yang merupakan pasangan dari dua titik $V(G)$. Misalkan u dan v adalah titik pada graf G, kemudian u dan v dihubungkan oleh sisi e, maka u dan v dikatakan bertetangga *(adjacent)*, sedangkan titik u dan v dikatakan menempel *(incident)* dengan sisi e, dan sisi e dikatakan menempel pada titik u dan v. Himpunan tetangga *(neighbourhood)* dari titik v, dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan v (Deo, 1989). Orde dari graf G adalah banyaknya titik pada graf G, dinotasikan dengan $|V(G)|$. Ukuran dari graf G adalah banyaknya sisi pada graf G, dinotasikan dengan $|E(G)|$ (Santi dkk., 2019).

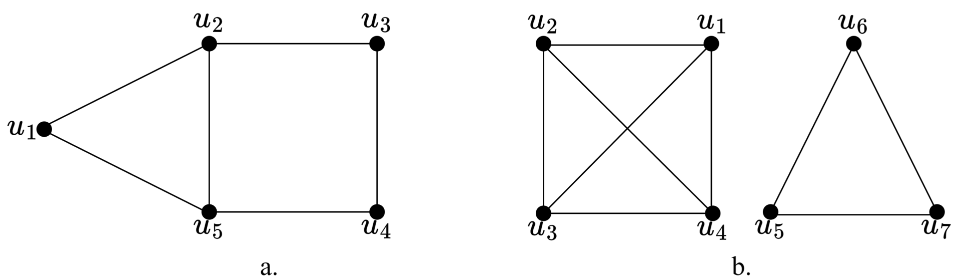


Gambar 2.1 Graf G dengan 6 Titik dan 8 Sisi

Sebuah graf G dengan himpunan titik $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ ditunjukkan pada Gambar 2.1. Karena graf ini memiliki 6 titik dan 8 sisi, maka ordenya adalah 6 dan ukurannya adalah 8. Pada graf G, titik u_1 dan u_2 dikatakan bertetangga, sedangkan titik u_1 dan u_2 dikatakan menempel pada sisi e_1 dan sisi e_1 dikatakan menempel pada titik u_1 dan u_2. Himpunan tetangga dari titik u_1 adalah $N(u_1) = \{u_2, u_5\}$.

Titik dengan derajat satu disebut daun (Qiao dkk., 2022). Derajat suatu titik v pada graf adalah banyaknya sisi yang menempel dengan titik tersebut, dinotasikan dengan $d(v)$. Titik yang tidak memiliki sisi (titik berderajat 0) disebut titik terisolasi (*isolated vertex*). Pada Gambar 2.1, $d(u_1) = 3, d(u_2) = 3, d(u_3) = 2, d(u_4) = 4, d(u_5) = 3, d(u_6) = 1$. *Loop* adalah sisi yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri, sedangkan sisi paralel adalah dua atau lebih sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Pada Gambar 2.1, *loop* yaitu sisi e_7 dan sisi paralel ditunjukkan oleh e_5 dan e_6 (Santi dkk., 2019).

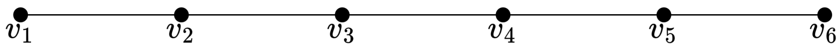
Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung *loop* maupun sisi paralel (Gross dan Yellen, 2004). Graf pada Gambar 2.1 bukan graf sederhana karena terdapat *loop* pada sisi e_7 dan sisi paralel yaitu e_5 dan e_6. Graf G dikatakan terhubung apabila untuk setiap pasangan titik yang berbeda pada G, terdapat setidaknya satu lintasan yang menghubungkan keduanya (Barahama dkk., 2021). Berikut adalah contoh graf terhubung dan graf tidak terhubung.



Gambar 2.2 (a) Contoh Graf G Terhubung, (b) Contoh Graf G Tidak Terhubung

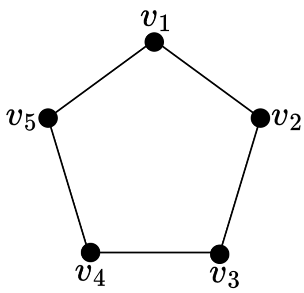
Pada contoh (a) $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_2u_5, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_1\}$ dan terdapat lintasan untuk setiap pasang titik berbeda maka graf G adalah graf terhubung. Pada contoh (b) $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$, $E(G) = \{u_1u_2, u_1u_3, u_1u_4, u_2u_3, u_2u_4, u_3u_4, u_5u_6, u_5u_7, u_6u_7\}$ dan tidak terdapat lintasan dari titik u_1 ke u_7 maka graf G bukan graf terhubung.

Beberapa kelas graf sederhana adalah graf lintasan (*path graph*), graf lingkaran (*cycle graph*), graf lengkap (*complete graph*), graf bintang (*star graph*), dan graf bunga mawar (*rose graph*). Graf lintasan (*path graph*) adalah urutan berhingga tak kosong $P_n = v_0e_1v_1e_2v_2...e_nv_n$ dan sisi e_i menghubungkan titik v_{i-1} dan v_i untuk $1 \leq i \leq n$. P_n disebut sebagai lintasan dari v_0 ke v_n atau (v_0, v_n)-lintasan. Titik v_0 dan v_n disebut titik awal dan titik akhir dari P_n, sedangkan $v_1, v_2, ..., v_{n-1}$ adalah titik internal atau titik perantara yang dilewati di tengah lintasan. Bilangan bulat n disebut panjang lintasan (*length*) dari P_n. Panjang lintasan adalah banyaknya sisi yang dilalui dalam lintasan. Graf lintasan P_n terdiri atas n titik dan $n - 1$ sisi (Bondy dan Murty, 1982). Berikut adalah contoh graf lintasan P_6.



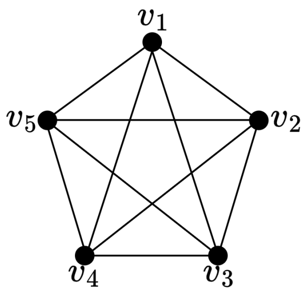
Gambar 2.3 Graf Lintasan P_6

Graf lingkaran (*cycle graph*) adalah lintasan tertutup yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama yaitu $v_1 = v_n$, dan titik-titik internalnya berbeda dimana setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dinotasikan dengan C_n, untuk $n \geq 3$. Jika titik $V(C_n) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ maka sisi $E(C_n) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), ..., (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)\}$. Graf lingkaran C_n memiliki n titik dan n sisi (Daniel dan Taneo, 2019). Berikut adalah contoh graf lingkaran C_5.



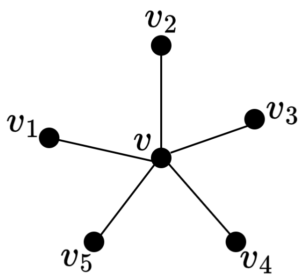
Gambar 2.4 Graf Lingkaran C_5

Graf lengkap (*complete graph*) adalah graf dengan setiap pasang titik yang berbeda terhubung oleh satu sisi, artinya semua titik di graf lengkap saling bertetangga. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n. Banyaknya sisi pada K_n adalah $\frac{n(n-1)}{2}$ (Daniel dan Taneo, 2019). Berikut adalah contoh graf lengkap K_5.



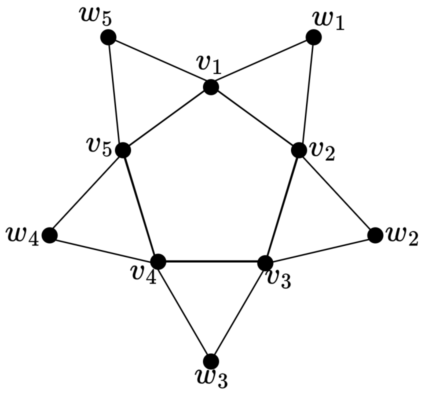
Gambar 2.5 Graf Lengkap K_5

Graf bintang (*star graph*) adalah graf yang terdiri dari satu titik pusat yang terhubung dengan $n-1$ daun, dinotasikan dengan S_n, untuk $n \geq 3$. Graf bintang memiliki n titik dan $n-1$ sisi (Bangkit dan Rahadjeng, 2022). Berikut adalah contoh graf bintang S_6.



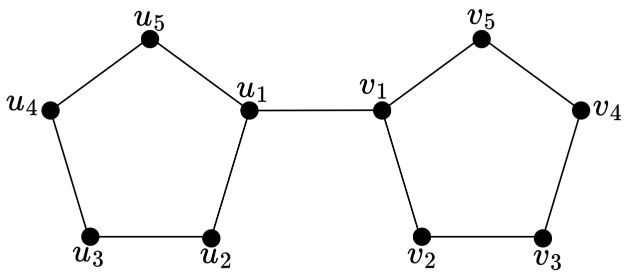
Gambar 2.6 Graf Bintang S_6

Graf mawar (*rose graph*) juga dikenal sebagai graf tengah (*middle graph*) dari suatu siklus. Graf tengah $M(G)$ dari graf terhubung G adalah graf yang himpunan titiknya $V(G) \cup E(G)$ di mana dua titik saling bertetangga jika dan hanya jika keduanya bertetangga di G atau salah satunya adalah titik di G dan yang lainnya adalah sisi yang terhubung dengan titik tersebut di G. Misalkan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah titik-titik dari siklus C_n dengan $n \geq 3$ dan n sisi dari C_n adalah $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$. Dengan demikian, graf mawar $M(C_n)$ dapat dibentuk dari siklus C_n dengan titik-titik $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan menambahkan titik-titik terisolasi $w_1, w_2, \ldots, w_n$, kemudian menghubungkan setiap dua titik v_i dan v_{i+1} dengan w_i, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$, dengan ketentuan $v_{n+1} = v_1$. Jadi, graf mawar $M(C_n)$ memiliki n titik dengan derajat 2 dan n titik dengan derajat 4. Berikut adalah contoh graf mawar $M(C_5)$ (Sugeng dkk., 2022). Berikut adalah contoh graf bunga mawar $M(C_5)$.



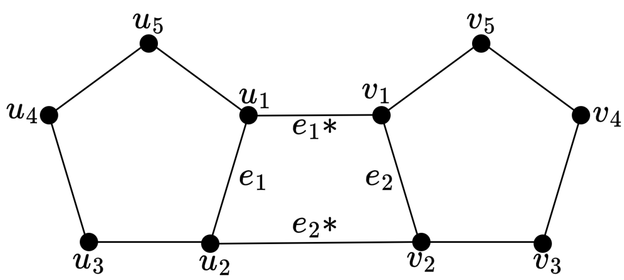
Gambar 2.7 Graf Mawar $M(C_5)$

Salah satu cara untuk membentuk graf baru dari dua graf terhubung adalah dengan menghubungkannya melalui satu sisi baru yang telah dilakukan penelitian oleh Amrullah dkk. (2021). Graf hasil konstruksi ini disebut graf jembatan. Graf jembatan dinotasikan dengan $B(H_1, H_2, uv)$. Misalkan H_1 dan H_2 merupakan dua graf terhubung dengan $u \in V(H_1)$ dan $v \in V(H_2)$. Sebuah graf diperoleh dari graf H_1 dan H_2 dengan menambahkan satu sisi baru e_1 yang dihubungkan dari titik u ke titik v (Amrullah dkk., 2021). Berikut diberikan contoh graf dengan satu jembatan.



Gambar 2.8 Contoh Graf Lingkaran C_5 dengan Satu Jembatan $(B(C_5, C_5, u_1, v_1))$

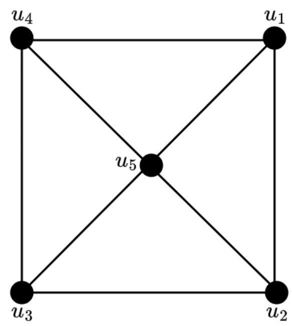
Konsep graf jembatan dapat diperluas menjadi graf dengan dua jembatan, yaitu graf yang dibentuk dengan menambahkan dua sisi penghubung antara dua graf terhubung. Dalam penelitian ini, fokus diberikan pada graf dengan dua jembatan yang dinotasikan dengan $B(G, H, e_1, e_2)$. Misalkan G dan H adalah dua graf terhubung. Ambil titik $e_1 = u_1u_2 \in E(G)$ dan $e_2 = v_1v_2 \in E(H)$. Sebuah graf baru $B(G, H, e_1, e_2)$ terbentuk dari graf G dan graf H dengan menghubungkan titik u_1 ke titik v_1 yang menghasilkan sisi baru $e_1* = u_1v_1$ dan menghubungkan titik u_2 ke titik v_2 yang menghasilkan sisi baru $e_2* = u_2v_2$. Berikut diberikan contoh graf dengan dua jembatan.



Gambar 2.9 Contoh Graf Lingkaran C_5 dengan Dua Jembatan $(B(C_5, C_5, e_1, e_2))$

2.2 Dimensi Metrik Graf

Dimensi metrik adalah kardinalitas minimum himpunan pembeda (*resolving set*) pada graf G. Misalkan titik u dan titik v adalah titik-titik pada graf terhubung G maka jarak $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara titik u dan titik v di G. Himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, ..., w_k\}$ dari titik-titik di graf terhubung G dan titik $v \in (G)$, representasi dari titik v ke himpunan W adalah k-vektor, dinotasikan dengan $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), ..., d(v, w_k))$. Jika $r(v|W)$ untuk setiap titik $v \in V(G)$ berbeda, maka W disebut himpunan pembeda dari $V(G)$. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum (basis metrik) dan kardinalitas dari basis metrik dinamakan dimensi metrik dari graf G, dinotasikan $dim(G)$ (Chartrand dkk., 2000a).

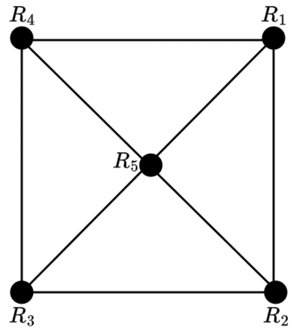


Gambar 2.10 Graf G

Pada Gambar 2.10 pilih $W = \{u_1\}$, maka representasi setiap titik di graf G adalah $r(u_1|W) = (0); r(u_2|W) = (1); r(u_3|W) = (2); r(u_4|W) = (1); r(u_5|W) = (1)$. Terlihat bahwa terdapat representasi titik yang sama untuk $W = \{u_1\}$, sehingga himpunan tersebut bukan himpunan pembeda dan bukan basis metrik. Dengan demikian, banyaknya anggota $W = \{u_1\}$ tidak dapat dikatakan sebagai dimensi metrik. Oleh karena itu, perlu dipilih himpunan W yang lain.

Pilih $W = \{u_1, u_2\}$, maka representasi setiap titik di graf G adalah $r(u_1|W) = (0, 1); r(u_2|W) = (1, 0); r(u_3|W) = (2, 1); r(u_4|W) = (1, 2); r(u_5|W) = (1, 1)$. Terlihat bahwa representasi semua titik berbeda untuk $W = \{u_1, u_2\}$, sehingga $W = \{u_1, u_2\}$ merupakan himpunan pembeda dari basis metrik. Dengan demikian, banyaknya anggota basis ini merupakan paling minimum, sehingga banyaknya anggota $W = \{u_1, u_2\}$ dapat dikatakan sebagai dimensi metrik. Oleh karena itu W adalah himpunan pembeda, maka $dim(G) = 2$.

Contoh pengaplikasian dimensi metrik pada suatu graf yang telah diteliti oleh Wahyudi (2018) disajikan berikut ini sebagai gambaran yang lebih jelas mengenai penerapan konsep dimensi metrik. Misal terdapat gedung yang memiliki lima ruangan yaitu R_1, R_2, R_3, R_4, R_5. Jika kebakaran di salah satu ruang, maka sensor dapat mendeteksi jarak ruang sensor ke ruang kebakaran.



Gambar 2.11 Gedung dengan 5 Ruang.

Misal sensor diletakkan di R_1. Jika kebakaran terjadi di R_3, maka sensor akan mendeteksi terjadi kebakaran pada sebuah ruang yang berjarak 2 dari R_1, karena hanya R_3 yang memiliki jarak 2 dari R_1. Jika kebakaran terjadi di R_1, maka sensor akan mendeteksi terjadi kebakaran pada sebuah ruang yang berjarak 0 dari R_1, karena hanya R_1 yang memiliki jarak 0 dari R_1. Kemudian, jika kebakaran terjadi di R_2, maka sensor akan mendeteksi terjadi kebakaran pada sebuah ruang yang berjarak 1 dari R_1, namun yang berjarak 1 dari R_2 tidak hanya R_2 ada R_4 dan R_5, maka informasi ini tidak dapat memberikan kepastian ruangan terjadinya kebakaran.

Misal sensor diletakkan pada dua kamar, yaitu di R_1 dan R_2. Jika kebakaran terjadi di R_3, maka sensor akan mendeteksi terjadi kebakaran pada sebuah ruang yang berjarak 2 dari R_1 dan berjarak 1 dari R_2, karena hanya R_3 yang memiliki jarak 2 dari R_1 dan jarak 1 dari R_2. Jika kebakaran terjadi di R_4, maka sensor akan mendeteksi terjadi kebakaran pada sebuah ruang yang berjarak 1 dari R_1 dan berjarak 2 dari R_2, karena hanya R_4 yang memiliki jarak 1 dari R_1 dan jarak 2 dari R_2. Kemudian, jika kebakaran terjadi di R_5, maka sensor akan mendeteksi terjadi kebakaran pada sebuah ruang yang berjarak 1 dari R_1 dan R_2, karena hanya R_5 yang memiliki jarak 1 dari R_1 dan R_2. Karena semua ruangan memiliki kode yang berbeda maka minimum banyaknya sensor yang dibutuhkan dalam mendeteksi tempat kebakaran adalah dua.

2.3 Dimensi Partisi Graf

Dimensi partisi pada sebuah graf merupakan variasi dari dimensi metrik. Pada dimensi metrik partisi menggunakan beberapa himpunan titik acuan *(landmark)* secara unik untuk menentukan semua titik lainnya melalui jarak, sedangkan dimensi partisi menggunakan partisi dari himpunan itu sendiri. Suatu partisi $\Pi = \{L_1, L_2, ..., L_k\}$ dari himpunan titik $V(G)$ dengan G merupakan graf terhubung disebut partisi pembeda jika setiap titik di G memiliki representasi yang unik terhadap Π. Jarak dari titik u ke partisi L, dinotasikan dengan $d(u, L)$, didefinisikan dengan $min\{d(u, l_i|l_i \in L\}$. Vektor $d((u, L_1), d(u, L_2), ..., d(u, L_k))$ merupakan representasi dari titik u ke himpunan partisi Π, dinotasikan dengan $r(u|\Pi)$. Minimum k partisi disebut sebagai dimensi partisi dari graf G, dinotasikan dengan $pd(G)$ (Chartrand dkk., 2000b).

Berikut teorema dasar yang disampaikan oleh Chartrand dkk. (1998) terkait dimensi partisi pada graf lingkaran C_n.

Teorema 2.3.1 (Chartrand dkk., 1998) Dimensi partisi graf siklus $pd(C_n) = 3$, untuk $n \geq 3$.

Proposisi 2.3.2 (Chartrand dkk., 2000b) Misalkan G adalah graf terhubung dengan orde $n \geq 2$. Maka $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika $G = P_n$.

Bukti.
Misalkan $P_n = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, dan $\Pi = \{L_1, L_2\}$ merupakan partisi dari $V(P_n)$ dengan $L_1 = \{u_1\}$ dan $L_2 = \{u_2, u_3, \ldots, u_n\}$. Karena

$$r(u_1|\Pi) = (0, 1) \quad \text{dan} \quad r(u_i|\Pi) = (i-1, 0), \quad \text{untuk } 2 \leq i \leq n,$$

maka Π adalah partisi pembeda dari P_n, sehingga $pd(P_n) = 2$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa graf lintasan P_n untuk $n \geq 2$, berlaku $pd(P_n) = 2$. Misalkan $\Pi = \{L_1, L_2\}$ adalah partisi pembeda dari suatu graf G dengan ordo n. Karena graf G terhubung, maka ada dua titik bertetangga $u \in L_1$ dan $v \in L_2$. Karena representasi

$$r(u|\Pi) = (0, d(u, L_2)), \quad u \in L_1,$$

dan

$$r(v|\Pi) = (d(v, L_1), 0), \quad v \in L_2,$$

berbeda, maka u adalah titik unik di L_1 yang bertetangga dengan titik di L_2, dan v adalah titik unik di L_2 yang bertetangga dengan titik di L_1.

Karena L_1 dan L_2 adalah lintasan dalam graf G dan graf G terhubung, jika $L_1 - \{u\}$ memuat titik x, maka x harus bertetangga dengan paling sedikit satu titik di L_1. Selanjutnya, titik u bertetangga dengan paling banyak satu titik di L_1, sebab jika u bertetangga dengan dua titik $u_1, u_2 \in L_1$, maka

$$r(u_1|\Pi) = r(u_2|\Pi) = (0, 2),$$

yang bertentangan dengan Π sebagai partisi pembeda dari $V(G)$.

Jadi, w adalah titik unik di L_1 yang bertetangga dengan u. Demikian juga w bertetangga dengan paling banyak satu titik di L_1 yang berbeda dari u. Dengan ini dapat dilihat bahwa L_1 adalah lintasan dalam graf G. Dengan cara yang sama, L_2 juga adalah lintasan dalam graf G, maka graf G adalah lintasan. ■

Lemma 2.3.3 (Chartrand dkk., 2000b) Misalkan Π adalah partisi pembeda di $V(G)$ dan $u, v \in V(G)$. Jika $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka u dan v harus berada dalam partisi yang berbeda di Π.

Bukti.
Misalkan $\Pi = \{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$ dengan u dan v berada dalam partisi yang sama, yaitu L_i, dari Π. Maka

$$d(u, L_i) = d(v, L_i) = 0.$$

Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk semua $w \in V(G) - \{u, v\}$, diperoleh

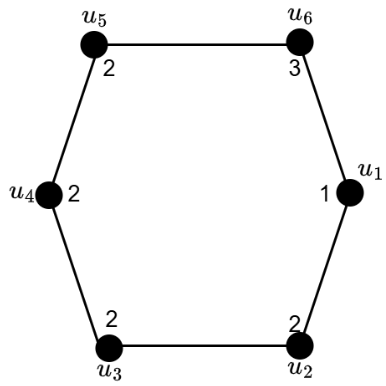
$$d(u, L_j) = d(v, L_j) \quad \text{untuk semua } j,\ 1 \leq j \neq i \leq k.$$

Oleh karena itu,

$$r(u|\Pi) = r(v|\Pi)$$

dan Π bukan merupakan partisi pembeda. ■

Sebagai ilustrasi dari penerapan konsep dimensi partisi, berikut diberikan contoh untuk menentukan dimensi partisi graf lingkaran C_6.



Gambar 2.12 Graf Lingkaran C_6

Diberikan himpunan partisi $\Pi = \{L_1, L_2, L_3\}$, dengan:

$$L_1 = \{u_1\},$$
$$L_2 = \{u_2, u_3, u_4, u_5\},$$
$$L_3 = \{u_6\}.$$

Maka representasi setiap titik diperoleh

$$r(u_1|\Pi) = (0, 1, 1), \qquad r(u_4|\Pi) = (3, 0, 2),$$
$$r(u_2|\Pi) = (1, 0, 2), \qquad r(u_5|\Pi) = (2, 0, 1),$$
$$r(u_3|\Pi) = (2, 0, 3), \qquad r(u_6|\Pi) = (1, 1, 0).$$

Karena representasi dari setiap titik berbeda maka Π adalah partisi pembeda dari graf C_6, dan $pd(C_6) \leq 3$. Untuk menunjukkan $pd(C_6) \geq 3$. Berdasarkan proposisi 2.3.2 oleh Chartrand dkk. (2000b), bahwa graf dengan dimensi partisi dua hanya berlaku untuk graf lintasan P_n. Karena graf C_6 bukan graf lintasan sehingga $pd(C_6) \geq 3$. Selanjutnya, diperoleh bahwa $pd(C_6) \leq 3$ dan $pd(C_6) \geq 3$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa $pd(C_6) = 3$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026, di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan untuk menentukan dimensi partisi graf dengan dua jembatan $(B(G_1, G_2, e_1, e_2))$ adalah sebagai berikut:

1. Menentukan dimensi partisi graf dengan dua jembatannya dari dua graf sembarang, graf lintasan - graf lintasan, graf lingkaran - graf lingkaran, graf lengkap - graf lengkap, graf bintang - graf bintang, graf lintasan - graf lingkaran, graf lintasan - graf lengkap, graf lintasan - graf bintang, graf lingkaran - graf lengkap, graf lingkaran - graf bintang, graf lengkap - graf bintang, graf bunga mawar - graf bunga mawar.

   a.) Menentukan notasi dari dua graf yang dihubungkan dengan dua jembatan.

   b.) Menentukan batas atas dengan memberikan himpunan partisi $\Pi = \{L_1, L_2, ..., L_k\}$ pada graf dengan dua jembatan $(B(G_1, G_2, e_1, e_2))$. Partisi ini dibentuk sedemikian sehingga setiap titik pada graf tersebut memiliki representasi yang unik terhadap Π, sehingga semua titik dapat dibedakan. Strategi dalam menentukan partisi bergantung pada struktur graf yang dikonstruksikan. Misalnya pada graf lintasan, titiknya dapat dikelompokkan berdasarkan letak titik dari ujung lintasan. Pada graf lingkaran, dapat dipilih beberapa titik pembeda saja. Pada graf lengkap dan graf bintang, diberikan partisi pembeda pada titik-titik tertentu karena pada graf tersebut terdapat titik yang memiliki jarak yang sama ke titik lainnya, sehingga batas atas diperoleh berdasarkan banyaknya kelas partisi yang dibutuhkan untuk membedakan setiap titik.

c.) Menentukan batas bawah melalui pendekatan kontradiksi. Hal ini dilakukan dengan mengasumsikan bahwa dimensi partisi graf dengan dua jembatan $(B(G_1, G_2, e_1, e_2))$ lebih kecil dari nilai yang telah diperoleh pada batas atas. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa asumsi tersebut bertentangan, yaitu terdapat setidaknya dua titik yang tidak dapat dibedakan atau memiliki representasi yang sama. Kontradiksi ini membuktikan bahwa nilai yang lebih kecil tidak dapat terjadi, sehingga diperoleh batas bawahnya.

d.) Jika diperoleh

$$(B(G_1, G_2, e_1, e_2)) \leq x$$

dan

$$(B(G_1, G_2, e_1, e_2)) \geq x$$

maka dapat disimpulkan bahwa dimensi partisi graf dengan dua jembatan

$$(B(G_1, G_2, e_1, e_2)) = x.$$

e.) Hasil yang diperoleh kemudian dirumuskan dalam bentuk teorema.

f.) Membuktikan hasil yang diperoleh secara rinci dengan mengikuti langkah-langkah di atas.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Pada penelitian ini telah diperoleh batas bawah dimensi partisi graf untuk graf dengan dua jembatan dari dua graf sebarang, $pd(B(G_1, G_2, e_1, e_2)) \geq max\{pd(G_1), pd(G_2)\} - 1$ dan nilai eksak dimensi partisi dari graf dengan dua jembatan untuk pasangan kelas graf tertentu, adalah sebagai berikut

1. Dimensi partisi dari graf dengan dua jembatan pada graf lintasan - graf lintasan $pd(B(P_m, P_n, e_1, e_2)) = 3$ untuk $m \geq n \geq 2$.
2. Dimensi partisi dari graf dengan dua jembatan pada graf lingkaran - graf lingkaran $pd(B(C_m, C_n, e_1, e_2)) = 3$ untuk $m \geq n \geq 3$.
3. Dimensi partisi dari graf dengan dua jembatan pada graf bintang - graf bintang

$$pd(B(S_m, S_n, e_1, e_2)) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } 3 \leq m \leq 5, \\ m - 2, & \text{untuk } m \geq 6. \end{cases}$$

4. Dimensi partisi dari graf dengan dua jembatan pada graf lengkap - graf lengkap

$$pd(B(K_m, K_n, e_1, e_2)) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } m \leq 4, n \leq 3, \\ 4, & \text{untuk } m = n = 4, \\ m - 1, & \text{untuk } m \geq 5. \end{cases}$$

5. Dimensi partisi dari graf dengan dua jembatan pada graf lintasan - graf lingkaran $pd(B(P_m, C_n, e_1, e_2)) = 3$ untuk $m \geq 2$, $n \geq 3$.

6. Dimensi partisi dari graf dengan dua jembatan pada graf lintasan - graf bintang

$$pd(B(P_m, S_n, e_1, e_2)) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } 3 \leq n \leq 5, \\ n-2, & \text{untuk } n \geq 6. \end{cases}$$

7. Dimensi partisi dari graf dengan dua jembatan pada graf lintasan - graf lengkap

$$pd(B(P_m, K_n, e_1, e_2)) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n \leq 4, \\ n-1, & \text{untuk } n \geq 5. \end{cases}$$

8. Dimensi partisi dari graf dengan dua jembatan pada graf lingkaran - graf bintang

$$pd(B(C_m, S_n, e_1, e_2)) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n \leq 5, \\ n-2, & \text{untuk } n \geq 6. \end{cases}$$

9. Dimensi partisi dari graf dengan dua jembatan pada graf lingkaran - graf lengkap

$$pd(B(C_m, K_n, e_1, e_2)) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n \leq 3, \\ n-1, & \text{untuk } n \geq 4. \end{cases}$$

10. Dimensi partisi dari graf dengan dua jembatan pada graf lengkap - graf bintang

$$pd(B(K_m, S_n, e_1, e_2)) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } m \leq 4, n \leq 5, \\ max\{m-1, n-2\}, & \text{untuk } m \geq 5, n \geq 6. \end{cases}$$

11. Dimensi partisi dari graf dengan dua jembatan pada graf mawar - graf mawar $pd(B(M(C_m), M(C_n), e_1, e_2)) = 4$ untuk $m \geq n \geq 3$.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dikembangkan untuk menentukan dimensi partisi graf dengan dua jembatan pada operasi graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Amrullah, A. Syahrul, M. Turmuzi, Baidowi, N. K., dan K. Nani. 2021. The bridge graphs partition dimension. *Journal of Physics: Conference Series*. **1779**(1).

Asmiati, Rachmawati, A. A., Nurvazly, D. E., dan Hamzah, N. 2025. The Partition Dimension of Daisy Graphs and Its Barbell. *Science and Technology Indonesia*. 313-319.

Bangkit, M. M. N., dan Rahadjeng, B. 2022. Dekomposisi Graf Bintang, Graf Bintang Ganda, dan Graf Sapu. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*. **10**(1).

Barahama, R. M., Montalalu, C. E. J. C., dan Tumilaar, R. 2021. Eksentrisitas Digraf pada Graf Gir Menggunakan Algoritma Breadth First Search. *d'Cartesian: Jurnal Matematika dan Aplikasi*. **10**(2).

Bondy, J. A. dan Murty, U. S. R. 1982. *Graph Theory with Applications*. Elsevier Science Publishing Co, New York.

Chartrand, G., Salehi, E., dan Zhang, P. 1998. On the Partition Dimension of a Graph. *Congressus Numerantium*. **130**:157-168.

Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M. A., dan Oellermann, O. R. 2000a. Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics*. **105**:99-113.

Chartrand, G., Salehi, E., dan Zhang, P. 2000b. The partition dimension of a graph. *Aequationes Mathematicae*. **59**(1):45–54.

Daming, A. S., dan Yuliani. 2024. Dimensi Partisi Graf Hasil Amalgamasi Sisi Graf Roda dengan Graf Bintang. *Euler: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*. **12**(2):139-144.

Daniel, F., dan Taneo Prida N. L. 2019. *Teori Graf*. Deepublish, Yogyakarta.

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall of India Prive Limited, New Delhi.

Gross, J. L., dan Yellen, J. 2004. Handbook of Graph Theory. *CRC Press, Boca Raton, FL*, New York.

Hasanah, U. N. Y., Amalia, R., Faisol, Yulianto, T., dan Kuzairi. 2024. Dimensi Partisi pada Graf Hasil Operasi Korona Tingkat-k. *Contemporary Mathematics and Applications*. **6**(1):27-45.

Haspika, Hasmawati, dan Aris, N. 2023. Dimensi Partisi pada Graf Grid. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*. **19**(2):351-358.

Koritsoglou, K., Tsoumanis, G., Patras, V., dan Fudos, I. 2022. Shortest path algorithms for pedestrian navigation systems. *Information*. **13**(6):269.

Santi, N., dan Mulyani. 2019. Optimasi biaya jalur tercepat Indarung–Unitas menggunakan algoritma Greedy. *Menara Ilmu*. **13**(11).

Sugeng, K. A., John, P., Lawrence, M. L., Anwar, L. F., Bača, M., dan Semaničová-Fenovčíková, A. 2022. Modular Irregularity Strength on Some Flower Graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications (EJGTA)*. **11**(1):27-38.

Wahyudi, S. 2018. Aplikasi dimensi metrik untuk meminimalkan pemasangan sensor kebakaran sebuah gedung. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*. **15**(2):89–96.

Qiao, P., Zhan, X., dan Shanghai. 2022. The Relation Between The Number of Leaves of a Tree and Its Diameter. *Czechoslovak Mathematical Journal*. **72**(147):365-369.