

**PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN NONLINEAR
DENGAN MENGGUNAKAN METODE NEWTON-
RAPHSON DAN LEVENBERG-MARQUADRT**

Skripsi

Oleh

**CYNTIA DWI ANANDA
NPM. 2217031017**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

ABSTRACT

SOLUTION OF NONLINEAR EQUATION SYSTEMS USING THE NEWTON–RAPHSON AND LEVENBERG–MARQUARDT METHODS

By

Cyntia Dwi Ananda

Nonlinear systems of equations exhibit complex characteristics, as they may have a single solution, multiple solutions, or even no solution at all. Numerical methods are commonly used as an approach to obtain sufficiently accurate approximate solutions. This study aims to compare the performance and effectiveness of the Newton–Raphson method and the Levenberg–Marquardt method in solving nonlinear systems of equations. Both methods are tested using five cases and implemented through Python programming. The comparison is conducted based on the number of iterations, error values, and computational time. The results show that the Newton–Raphson method is more efficient in most cases but fails to converge when the Jacobian matrix is singular. In contrast, the Levenberg–Marquardt method is able to achieve convergence in all tested cases and demonstrates better stability.

Keywords: Nonlinear systems of equations, numerical methods, Newton–Raphson method, Levenberg–Marquardt method.

ABSTRAK

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN NONLINEAR DENGAN MENGGUNAKAN METODE NEWTON- RAPHSON DAN LEVENBERG-MARQUADRT

Oleh

Cyntia Dwi Ananda

Sistem persamaan nonlinier memiliki karakteristik yang kompleks karena dapat memiliki satu, beberapa, atau bahkan tidak memiliki solusi. Metode numerik digunakan sebagai pendekatan untuk memperoleh solusi pendekatan yang cukup akurat. Penelitian ini bertujuan membandingkan kinerja dan efektivitas dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinear antara metode Newton-Raphson dan metode Levenberg Marquardt. Kedua metode diuji dengan menggunakan 5 kasus dan diimplementasikan menggunakan pemrograman *Python*. Perbandingan dilakukan berdasarkan jumlah iterasi, nilai galat, dan waktu komputasi. Hasil menunjukkan bahwa metode Newton-Raphson lebih efisien pada sebagian besar kasus, namun gagal pada kondisi matriks Jacobian singular. Sebaliknya, metode Levenberg-Marquardt mampu mencapai konvergensi pada seluruh kasus dan menunjukkan kestabilan yang lebih baik.

Kata-kata kunci: Sistem persamaan nonlinear, Metode Numerik Metode Newton-Raphson, Metode Levenberg-Marquardt.

**PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN NONLINEAR
DENGAN MENGGUNAKAN METODE NEWTON-
RAPHSON DAN LEVENBERG-MARQUADRT**

CYNTIA DWI ANANDA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

Judul Skripsi

: **PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN
NONLINEAR DENGAN MENGGUNAKAN
METODE NEWTON-RAPHSON DAN
LEVENBERG-MARQUADRT**

Nama Mahasiswa

: **Cyntia Dwi Ananda**

Nomor Pokok Mahasiswa

: **2217031017**

Program Studi

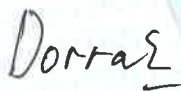
: **Matematika**

Fakultas

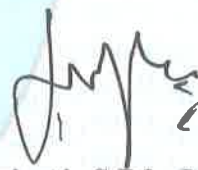
: **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing



Dra. Dorrah Aziz, M.Si.
NIP 196101281988112001



Misgivati, S.Pd., M.Si.
NIP 198509282023212032

2. Ketua Jurusan Matematika



Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**

Dorrah

Sekretaris : **Misgiyati, S.Pd., M.Si.**

Misgiyati

Penguji
Bukan Pembimbing : **Drs. Tiryono, M.Sc., Ph.D.**

Tiryono

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.

NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **29 Januari 2026**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Cyntia Dwi Ananda**
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031017**
Jurusan : **Matematika**
Judul Skripsi : **Penyelesaian Sistem Persamaan
Nonlinear dengan Menggunakan Metode
Newton-Raphson dan Levenberg-Marquardt**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 29 Januari 2026

Penulis,



Cyntia Dwi Ananda

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Cyntia Dwi Ananda yang lahir di Bandar Lampung pada tanggal 30 November 2003. Penulis merupakan anak bungsu dari dua bersaudara, seorang anak dari pasangan Joni Edi dan Yulina.

Penulis memulai pendidikan formal di TK Kartini I pada tahun 2008 dan menyelesaikannya pada tahun 2010. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di SD Negeri 2 Palapa pada tahun 2010 sampai dengan 2016. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 25 Bandar Lampung pada tahun 2016 sampai dengan tahun 2019, dan menyelesaikan pendidikan di SMA Negeri 3 Bandar Lampung pada tahun 2022. Setelah itu, penulis diterima di program studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN) pada tahun 2022.

Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif dalam kepengurusan Unit Kegiatan Mahasiswa Universitas (UKM-U) Sains dan Teknologi (Saintek) Universitas Lampung sebagai anggota Departemen KRT ada tahun 2025. Pada akhir tahun 2024 sampai dengan awal tahun 2025, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Dinas Perhubungan Kota Bandar Lampung (DISHUB) selama 40 hari sampai dengan 31 Januari 2025. Selain itu, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari pada Bulan Juli tahun 2025 di Kelurahan Batu Putuk, Teluk Betung Barat, Bandar Lampung.

KATA INSPIRASI

"Allah tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya"
(Q.S. Al-Baqarah: 286)

*"But perhaps you hate a thing and it is good for you, and perhaps you love a thing
and it is bad for you. And Allah knows, while you know not"*
(Q.S. Al-Baqarah: 216)

"if you never bleed, you never gonna grow"
(Taylor Swift)

*"Everyone has their own pace, your pace is special in itself as well. So don't care
about others too much, just go the way you're headed, cause it will lead to a very
special place."*
(Bang Chan)

"long story short, i survived."
(Taylor Swift)

PERSEMBAHAN

Alhadulillahi robbil'alamin

Dengan mengucapkan puji dan syukur atas kehadiran Allah Subhanahu Wata'ala karena limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya.

Tak lupa shalawat beserta salam selalu tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu Alaihi Wasallam.

Dengan rasa syukur dan bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Orang Tua Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Penyelesaian Sistem Persamaan Nonlinear dengan Menggunakan Metode Newton-Raphson dan Levenberg-Marquardt" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dra. Dorrah Azis, M.Si. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Misgiyati, S.Pd., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Drs. Tiryono, M.Sc., Ph.D. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Bapak Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc. selaku dosen Pembimbing Akademik.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Ayah, Mama, dan Uni yang selalu memberikan dukungan, doa, serta kasih sayang kepada penulis selama perkuliahan.
8. Sahabat penulis yang telah menemani sejak SMP, Ratih, Aura, Putri, dan Ica yang selalu memberikan dukungan kepada penulis.
9. Sahabat seperjuangan, April, Najiya, Zahra, Aprial, dan Valens yang kebersamaan penulis selama perkuliahan. Terima kasih atas bantuan dan dukungan kepada penulis selama penyusunan skripsi hingga selesai.
10. Teman-teman semasa SMA, Icha dan Ica yang selalu memberi semangat dan dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini.
11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 29 Januari 2026

Cyntia Dwi Ananda

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR TABEL	xv
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Tujuan Penelitian	3
1.3 Manfaat Penelitian	3
II TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Persamaan	4
2.1.1 Persamaan Linear	5
2.1.2 Persamaan nonlinear	5
2.2 Sistem Persamaan nonlinear	6
2.3 Matriks	7
2.3.1 Matriks Jacobian	8
2.4 Metode Numerik	8
2.5 Metode Newton-Raphson	9
2.6 Metode Levenberg Marquardt	12
2.7 Galat (<i>Error</i>)	16
III METODE PENELITIAN	17
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	17
3.2 Metode Penelitian	17
3.2.1 Algoritma Newton-Raphson	18
3.2.2 Algoritma Levenberg-Marquardt	19
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	22
4.1 Penyelesaian Sistem Persamaan Nonlinear Kasus 1	22
4.1.1 Penyelesaian Kasus 1 Menggunakan Metode Newton-Raphson	22
4.1.2 Penyelesaian Kasus 1 Menggunakan Metode Levenberg-Marquardt	25
4.2 Penyelesaian Sistem Persamaan Nonlinear Kasus 2	28
4.2.1 Penyelesaian Kasus 2 Menggunakan Metode Newton-Raphson	28

4.2.2	Penyelesaian Kasus 2 Menggunakan Metode Levenberg-Marquardt	31
4.3	Penyelesaian Sistem Persamaan Nonlinear Kasus 3	34
4.3.1	Penyelesaian Kasus 3 Menggunakan Metode Newton-Raphson	34
4.3.2	Penyelesaian Kasus 3 Menggunakan Metode Levenberg-Marquardt	35
4.4	Penyelesaian Sistem Persamaan Nonlinear Kasus 4	35
4.4.1	Penyelesaian Kasus 4 Menggunakan Metode Newton-Raphson	36
4.4.2	Penyelesaian Kasus 4 Menggunakan Metode Levenberg-Marquardt	37
4.5	Penyelesaian Sistem Persamaan Nonlinear Kasus 5	38
4.5.1	Penyelesaian Kasus 5 Menggunakan Metode Newton-Raphson	38
4.5.2	Penyelesaian Kasus 5 Menggunakan Metode Levenberg-Marquardt	39
4.6	Perbandingan Solusi Sistem Persamaan Nonlinear Metode Newton-Raphson dan Metode Levenberg-Marquardt	39
4.6.1	Metode Newton-Raphson dan Metode Levenberg-Marquardt Kasus 1	40
4.6.2	Metode Newton-Raphson dan Metode Levenberg-Marquardt Kasus 2	40
4.6.3	Metode Newton-Raphson dan Metode Levenberg-Marquardt Kasus 3	41
4.6.4	Metode Newton-Raphson dan Metode Levenberg-Marquardt Kasus 4	41
4.6.5	Metode Newton-Raphson dan Metode Levenberg-Marquardt Kasus 5	42
4.6.6	Perbandingan Kasus 1-5 dengan Metode Newton-Raphson dan Levenberg Marquardt	42
V	KESIMPULAN DAN SARAN	43
5.1	Kesimpulan	43
5.2	Saran	44
	DAFTAR PUSTAKA	45
	LAMPIRAN	47

DAFTAR TABEL

2.1	<i>Output</i> Metode Newton-Raphson	12
2.2	<i>Output</i> Hasil Iterasi Metode Levenberg-Marquardt	15
4.1	Solusi Penyelesaian Kasus 1 dengan Metode Newton-Raphson . . .	24
4.2	Solusi Penyelesaian Kasus 1 dengan Metode Levenberg-Marquardt .	27
4.3	Solusi Penyelesaian Kasus 2 dengan Metode Newton-Raphson . . .	30
4.4	Solusi Penyelesaian Kasus 2 dengan Metode Levenberg-Marquardt .	33
4.5	Solusi Penyelesaian Kasus 3 dengan Metode Levenbert-Marquardt .	35
4.6	Solusi Penyelesaian Kasus 4 dengan Metode Newton-Rahson	36
4.7	Solusi Penyelesaian Kasus 4 dengan Metode Levenbert-Marquardt .	37
4.8	Solusi Penyelesaian Kasus 5 dengan Metode Newton-Rahson	38
4.9	Solusi Penyelesaian Kasus 5 dengan Metode Levenbert-Marquardt .	39
4.10	Perbandingan Metode Newton-Raphson dan Metode Levenberg-Marquardt Kasus 1	40
4.11	Perbandingan Metode Newton-Raphson dan Metode Levenberg-Marquardt Kasus 2	40
4.12	Perbandingan Metode Newton-Raphson dan Metode Levenberg-Marquardt Kasus 3	41
4.13	Perbandingan Metode Newton-Raphson dan Metode Levenberg-Marquardt Kasus 4	41
4.14	Perbandingan Metode Newton-Raphson dan Metode Levenberg-Marquardt Kasus 5	42
4.15	Hasil Iterasi Kasus 1–5 dengan Metode Newton-Raphson dan Levenberg-Marquardt	42

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Sistem persamaan merupakan permasalahan yang sering dijumpai dalam berbagai bidang ilmu seperti matematika, fisika, teknik, hingga ilmu komputer. Sistem persamaan ini terbagi menjadi dua yaitu sistem persamaan linear dan sistem persamaan nonlinear. Pada sistem persamaan linear biasanya dapat diselesaikan dengan metode analitik atau metode komputasi sederhana dikarenakan hubungan antara variabel yang setara. Dalam kehidupan nyata, hubungan antar variabel tidak selalu linear. Proses pertumbuhan populasi, reaksi kimia, hingga pemodelan optimisasi dalam *machine learning* biasanya menggunakan sistem persamaan nonlinear yang kompleks.

Tidak seperti sistem persamaan linear yang umumnya memiliki solusi yang jelas, sistem persamaan nonlinear dapat menunjukkan perilaku yang lebih kompleks. Sistem ini bisa saja memiliki satu solusi, beberapa solusi sekaligus, atau bahkan tidak memberikan solusi sama sekali. Bentuk persamaan yang tidak dapat diselesaikan secara langsung membuat metode analitik menjadi sulit diterapkan. Oleh karena itu, metode numerik digunakan sebagai pendekatan untuk memperoleh solusi pendekatan yang cukup akurat. Metode numerik dapat diterapkan untuk menyelesaikan persoalan matematika sederhana maupun persoalan matematika yang tergolong rumit yang metode analitik belum tentu dapat menyelesaikan permasalahan (Munir, 2006).

Metode numerik memungkinkan proses penyelesaian dilakukan secara bertahap (iteratif) dengan memulai dari suatu nilai awal yang kemudian diperbaiki hingga mendekati solusi sebenarnya. Perbedaan solusi numerik dengan analitik terdapat pada hasil, pada metode numerik hasil berupa angka sedangkan solusi analitik

biasanya menghasilkan solusi dalam bentuk matematik yang kemudian dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka. Metode komputasi dalam perhitungan numerik disebut algoritma. Dengan metode pendekatan, setiap perhitungan akan mempunyai galat (*error*) dimana jika galat semakin kecil maka semakin baik begitupun sebaliknya (Maharani & Suprpto, 2018).

Salah satu metode numerik yang cukup sering digunakan adalah Metode Newton-Raphson. Metode Newton-Raphson merupakan metode pendekatan yang menggunakan satu titik awal (*initial value*) sebagai tebakan awal, memerlukan *slope* atau gradien pada titik tersebut dan barisan titik potong garis singgungnya dengan sumbu-x. Metode ini unggul dalam kecepatan konvergensi yang sangat cepat apabila nilai awal yang digunakan berada cukup dekat dengan solusi sebenarnya, maka metode ini mampu menemukan hasil akhir hanya dalam beberapa langkah iterasi. Kelemahan dari metode ini yaitu jika pemilihan titik awal memberikan nilai turunannya nol (Rochmad, 2013).

Metode Levenberg-Marquardt mengabungkan prinsip Metode Gauss-Newton dengan Metode Steepest Descent, sehingga proses perhitungannya menjadi lebih stabil, khususnya ketika nilai awal berada jauh dari solusi atau saat fungsi yang dianalisis memiliki tingkat nonlinieritas yang tinggi. Apabila nilai pendekatan awal cukup dekat dengan solusi, metode ini akan bekerja menyerupai metode Gauss-Newton yang memiliki kecepatan konvergensi tinggi. Namun, ketika titik awal berada jauh dari solusi, perilakunya berubah dan metode ini cenderung mengikuti pola Steepest Descent yang lebih stabil dan aman, meskipun proses konvergensi berlangsung lebih lambat (Ahmadian, 2016).

Terdapat beberapa penelitian terdahulu terkait metode Newton-Raphson dan metode Levenberg-Marquardt. Pada penelitian Utami dkk (2013), membandingkan metode Newton-Raphson dan metode Jacobian dalam mencari solusi sistem persamaan nonlinear. Hasilnya metode Newton-Raphson menghasilkan iterasi lebih sedikit dibanding metode Jacobian, tetapi metode Jacobian mendapat hasil yang lebih mendekati nilai eksak. Pada penelitian lain, Syafi'i dkk (2023) menerapkan metode Newton-Raphson dalam menentukan akar-akar fungsi kompleks dan diperoleh hasil yang sama dengan perhitungan secara analitik. Putro dkk (2025) membandingkan metode Levenberg-Marquardt dan Trust-Region dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinear multivariabel, hasilnya metode Levenberg-Marquardt lebih

efisien secara iterasi dan metode Trust-Region menghasilkan akurasi yang lebih tinggi. Selain itu, Lisa (2015) meneliti Levenberg Marquardt untuk memprediksi curah hujan, hasilnya menunjukkan bahwa algoritma Levenberg Marquardt dengan regularisasi menjadi lebih baik. Chen & Ma (2022) memodifikasi metode Levenberg-Marquardt dengan parameter adaptif dan menghasilkan bahwa metode ini lebih stabil dan cepat konvergen, terutama pada sistem persamaan nonlinear yang sulit atau bersifat singular.

Berdasarkan uraian di atas, belum ada penelitian yang membahas tentang perbandingan metode Newton-Raphson dengan metode Levenberg-Marquardt. Dengan demikian, pada penelitian ini penulis akan membahas tentang penyelesaian 5 kasus sistem persamaan nonlinear dengan membandingkan metode Newton-Raphson dan metode Levenberg-Marquardt.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui perbandingan kinerja dan efektivitas dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinear antara metode Newton-Raphson dan metode Levenberg Marquardt.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang ingin diperoleh dari penelitian ini yaitu:

1. Menambah wawasan dan pengetahuan terkait metode Newton-Raphson dan Levenberg-Marquardt dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinear.
2. Mengetahui metode yang lebih efektif dan efisien dari kedua metode tersebut dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinear.
3. Mengetahui kelebihan dan kekurangan dari masing-masing metode dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinear.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan

Persamaan merupakan pernyataan pada matematika yang menyatakan bahwa dua hal berbeda memiliki nilai yang sama ditandai dengan simbol sama dengan ($=$) (Pandia & Sitepu, 20221). Persamaan menunjukkan hubungan kesetaraan antara ekspresi pada sisi kanan dan sisi kiri. Sebuah persamaan bisa memuat angka, variabel, dan berbagai operasi matematika, dan dengan menyelesaikannya dapat diperoleh nilai variabel yang belum diketahui.

Contoh 2.1.1 Contoh persamaan sebagai berikut

$$2x + 6 = 8 \text{ yang menyatakan bahwa } x = 1$$

$$x + 5 = 3 \text{ yang menyatakan bahwa } x = -2$$

Dapat dilihat pada Contoh 2.1.1, pernyataan tersebut merupakan persamaan. Persamaan tersebut benar dikarenakan terdapat solusi pada nilai variabelnya. Oleh karena itu, untuk menemukan suatu persamaan berarti menyelesaikan persamaan tersebut.

Huruf alfabet awal seperti $a, b, c, d, \dots$ biasanya sering digunakan untuk menyimbolkan konstanta, sedangkan huruf akhir alfabet seperti x, y, z , biasanya sering disimbolkan sebagai lambang variabel. Selain itu, persamaan dapat dikelompokkan berdasarkan jenis operasi yang dilibatkan seperti persamaan linear dan persamaan nonlinear (Hulu & Sinaga, 2019).

2.1.1 Persamaan Linear

Persamaan dengan variabel yang derajat paling tingginya satu disebut persamaan linear (Azizah & Ariyanti, 2020). Persamaan linear merupakan persamaan aljabar dan jika digambarkan hasilnya akan berupa garis lurus. Ciri utamanya adalah pangkat tertinggi setiap variabel adalah 1, tidak ada perkalian antar variabel, dan biasanya terdiri dari dua ruas yang dihubungkan oleh tanda sama dengan (=).

Secara umum, persamaan linear dengan n variabel dapat dinyatakan sebagai.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b \quad (2.1.1)$$

dimana $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ merupakan koefisien dari variabel, b merupakan konstanta, dan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ merupakan variabel (Soebagyo dkk, 2020).

2.1.2 Persamaan nonlinear

Persamaan nonlinear merupakan persamaan yang dapat memiliki pangkat selain satu atau adanya suku yang merupakan perkalian antara dua variabel atau lebih (Pratikno dkk, 2015). Dalam proses penyelesaiannya, persamaan nonlinear memerlukan penentuan nilai akar yang memenuhi persamaan tersebut. Akar sebuah persamaan nonlinear $f(x) = 0$ merupakan nilai x yang menghasilkan nol pada $f(x)$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa akar persamaan dari $f(x)$ merupakan titik potong antara kurva persamaan tersebut dengan sumbu- x (Rosidi., 2019).

Persamaan dalam bentuk $f(x) = 0$ diklasifikasikan sebagai persamaan nonlinear apabila fungsi $f(x)$ memiliki hubungan yang tidak linier terhadap variabelnya. Artinya, apabila di dalam persamaan ada pangkat lebih dari 1, akar, logaritma, trigonometri, eksponensial, atau bentuk lain yang membuatnya tidak linear, maka persamaan itu termasuk persamaan nonlinear (Basuki & Ramadijanti, 2005).

Salah satu bentuk umum dari persamaan nonlinear adalah sebagai berikut.

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x^1 + a_0 \quad (2.1.2)$$

dimana $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1$ merupakan koefisien dari variabel, $x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, x^1$ merupakan variabel, dan a_0 merupakan konstanta

Contoh 2.1.2 Contoh persamaan nonlinear sebagai berikut.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

pada persamaan tersebut terdapat variabel dengan pangkat tertinggi 2. Persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan mencari akar-akar persamaan yang nilai x nya menghasilkan $f(x) = 0$.

2.2 Sistem Persamaan nonlinear

Sistem persamaan nonlinear adalah kumpulan beberapa persamaan yang merupakan persamaan nonlinear (Devitriani dkk, 2019). Suatu persamaan disebut nonlinear apabila fungsi $f(x)$ didalamnya tidak dapat dinyatakan sebagai bentuk linear dari variabel-variabel yang terlibat. Dengan kata lain, persamaan tersebut mengandung variabel berpangkat lebih dari satu, melibatkan perkalian antar variabel, atau memuat fungsi-fungsi tertentu seperti eksponensial, logaritma, dan trigonometri. Sistem persamaan nonlinear dapat memiliki solusi lebih dari satu, satu, maupun tidak terdapat solusi sama sekali, sehingga penyelesaian menjadi kompleks.

Secara umum, bentuk umum sistem persamaan nonlinear sebagai berikut

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (2.2.3)$$

dengan $n = 1, 2, 3, \dots, n$.

Penyelesaian suatu sistem persamaan bertujuan untuk mencari nilai dari variabel-variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ yang dapat membuat semua persamaan dalam sistem tersebut terpenuhi secara bersamaan. Dapat diartikan bahwa nilai-nilai variabel tersebut harus memberikan hasil yang benar untuk setiap persamaan yang

ada. Namun, tidak seperti pada sistem persamaan linear yang relatif lebih sederhana dan dapat diselesaikan dengan metode analitik secara langsung, sistem persamaan nonlinear memiliki tingkat kerumitan yang jauh lebih tinggi. Kompleksitas ini muncul karena hubungan antarvariabelnya bersifat tidak linier, sehingga solusi tidak dapat diperoleh dengan cara aljabar biasa. Oleh karena itu, untuk menemukan solusi yang mendekati nilai sebenarnya, digunakan pendekatan melalui metode numerik. Metode ini memungkinkan memperoleh solusi secara bertahap melalui proses iteratif, sehingga meskipun hasilnya berupa pendekatan, tingkat ketelitiannya dapat disesuaikan sesuai kebutuhan perhitungan.

2.3 Matriks

Matriks merupakan suatu himpunan bilangan yang disusun dalam bentuk persegi panjang, terdiri atas baris dan kolom di mana setiap angka didalamnya disebut sebagai entri atau elemen matriks. Ukuran suatu matriks dinyatakan berdasarkan banyaknya baris (yang tersusun secara horizontal) dan kolom (yang tersusun secara vertikal) (Anton & Kaul, 2019).

Contoh 2.3.1 Berikut adalah beberapa contoh matriks.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Contoh 2.3.1, dapat diketahui bahwa matriks pertama memiliki dua baris dan dua kolom, sehingga disebut sebagai matriks berukuran 2×2 . Selanjutnya, matriks kedua memiliki satu baris dan tiga kolom, atau disebut matriks berukuran 1×3 yang berarti hanya ada satu baris dengan tiga elemen didalamnya. Sedangkan matriks ketiga berukuran 2×3 yaitu memiliki dua baris dan tiga kolom. Perbedaan ukuran ini menunjukkan bahwa setiap matriks bisa memiliki bentuk dan jumlah elemen yang berbeda tergantung pada banyaknya baris dan kolom penyusunnya.

Dalam penamaannya, matriks dinotasikan menggunakan huruf kapital seperti $A, B, C, \dots, X, Y, Z$ dan huruf kecil menotasikan jumlah numerik yang terdapat di dalam matriks tersebut. Secara umum, sebuah matriks A yang berukuran $m \times n$ di mana m menunjukkan banyaknya baris dan n menunjukkan banyaknya kolom,

dapat dituliskan dalam bentuk berikut.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.3.4)$$

dengan a_{ij} untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$ merupakan entri-entri dari matriks $\mathbf{A}$.

2.3.1 Matriks Jacobian

Matriks Jacobian adalah suatu susunan turunan parsial pertama dari fungsi yang memiliki lebih dari satu variabel. Dengan menggunakan matriks ini, sebuah fungsi nonlinear dapat didekati oleh bentuk linear pada suatu titik tertentu, sehingga memudahkan proses analisis dan perhitungan numerik. Perhatikan fungsi vektor berikut

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (2.3.5)$$

Untuk persamaan (2.3.4), matriks Jacobian didefinisikan sebagai berikut.

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.3.6)$$

2.4 Metode Numerik

Metode numerik adalah kumpulan cara atau teknik yang digunakan untuk mengubah suatu persoalan matematika menjadi bentuk yang bisa diselesaikan dengan perhitungan dasar, seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Metode ini membantu mencari solusi dari masalah matematika yang sulit

diselesaikan secara analitik, dengan menggunakan pendekatan perhitungan angka. Proses dalam metode numerik biasanya melibatkan beberapa langkah perhitungan yang dilakukan secara bertahap dan berulang hingga mendekati hasil yang diinginkan. Oleh karena itu, metode numerik sering digunakan ketika penyelesaian secara langsung tidak memungkinkan atau terlalu rumit untuk dilakukan (Susila, 1993).

Solusi dari metode numerik selalu berupa numerik, berbeda dengan metode analitik yang solusinya berbentuk matematis dan kemudian dapat dievaluasi untuk contoh tertentu. Metode numerik menghasilkan solusi berupa nilai pendekatan terhadap solusi sebenarnya. Penggunaan metode numerik menjadi penting ketika suatu permasalahan matematika tidak dapat diselesaikan secara analitik. Metode numerik juga memberikan fleksibilitas dalam penyelesaian masalah, di mana akurasi hasil dapat ditingkatkan dengan melakukan iterasi berulang hingga mencapai batas toleransi kesalahan tertentu. Secara umum, metode numerik adalah suatu pendekatan yang mengubah permasalahan matematika ke dalam bentuk yang dapat diselesaikan melalui serangkaian operasi aritmetika. Metode ini memformulasikan persoalan matematika agar dapat dihitung menggunakan proses perhitungan numerik secara bertahap (Chapra & Canale, 2015).

2.5 Metode Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson merupakan salah satu metode iteratif yang digunakan untuk mencari solusi dari persamaan nonlinear dengan menggunakan turunan pertama dari fungsi tersebut (Rahayu dkk, 2020). Metode ini mendekati fungsi nonlinear dengan garis singgung pada titik tebakan awal, kemudian menggunakan perpotongan garis tersebut dengan sumbu- x sebagai perkiraan nilai akar berikutnya. Proses ini dilakukan secara berulang hingga diperoleh nilai akar yang mendekati solusi sebenarnya. Dalam mencari hampiran akar-akar $f(x) = 0$ diperlukan titik awal (*initial value*) sebagai tebakan awal (Rochmad, 2013). Metode Newton-Raphson dinyatakan sebagai berikut.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (2.5.7)$$

dimana x_k merupakan nilai pendekatan pada iterasi ke k dan x_{k+1} merupakan hasil dari pendekatan iterasi selanjutnya.

Dalam proses mencari solusi dari suatu sistem persamaan nonlinear, metode ini memanfaatkan matriks Jacobian, yang berisi turunan parsial dari setiap fungsi terhadap variabel-variabelnya. Matriks Jacobian berperan penting karena menggambarkan bagaimana perubahan kecil pada variabel akan memengaruhi nilai fungsi secara keseluruhan. Dengan menggunakan pendekatan ini, metode Newton-Raphson dapat dinyatakan dalam bentuk vektor, sehingga proses perhitungannya menjadi lebih terstruktur dan mudah diterapkan pada sistem dengan banyak variabel. Bentuk umum dari metode Newton-Raphson dalam notasi vektor dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\mathbf{J}(x_k)\Delta x = -F(x_k) \quad (2.5.8)$$

Setelah menyelesaikan sistem linear tersebut kemudian perbarui solusi dengan:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x \quad (2.5.9)$$

dimana x_k merupakan vektor variabel pada iterasi ke- k , $F(x)$ merupakan sistem persamaan nonlinear, dan $\mathbf{J}(x)$ merupakan Matriks Jacobian berukuran $n \times n$ dari fungsi $F(x)$. Matriks Jacobian $\mathbf{J}(x)$ tidak boleh berupa matriks singular dikarenakan metode Newton-Raphson memerlukan invers dari matriks tersebut untuk menentukan langkah iterasi berikutnya. Apabila matriks Jacobian singular, maka inversnya tidak dapat dihitung sehingga proses iterasi akan terhenti dan metode gagal menemukan solusi.

Pada metode iteratif, galat (*error*) digunakan sebagai ukuran seberapa jauh nilai pendekatan dari iterasi saat ini dibandingkan dengan iterasi sebelumnya. Iterasi dihentikan apabila nilai galat telah berada di bawah batas toleransi yang telah ditentukan sebelumnya. Galat (*error*) dapat dihitung menggunakan:

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon \quad (2.5.10)$$

Langkah-langkah metode Newton-Raphson dalam menyelesaikan solusi sistem persamaan nonlinear sebagai berikut.

1. Definisikan fungsi $f(x)$ dan $\mathbf{J}(x)$.
2. Tentukan tebakan awal x_0 .
3. Hitung fungsi $F(x_0)$ dan $\mathbf{J}(x_0)$.
4. Selesaikan sistem linear dengan menggunakan persamaan (2.5.7).
5. Perbarui solusi baru menggunakan persamaan (2.5.9).
6. Iterasi dihentikan jika $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, jika tidak lanjut ke langka 3.

Contoh 2.5.1 Selesaikan persamaan nonlinear berikut menggunakan metode Newton-Raphson

$$x^3 - x = 1$$

dengan toleransi galat $\varepsilon = 0.0001$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x - 1 = 0 \\ f'(x) &= 3x^2 - 1 \end{aligned}$$

Menentukan tebakan awal $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} f(x_0) &= (1)^3 - 1 - 1 = -1 \\ f'(x_0) &= 3(1)^2 - 1 = 2 \end{aligned}$$

Iterasi 1

$$\begin{aligned} x_{0+1} &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x_1 &= 1 - \frac{-1}{2} = 1,5 \end{aligned}$$

Diperoleh $f(x_1) = (1,5)^3 - (1,5) - 1 = 0,875$ dan $f'(x_1) = 3(1,5)^2 - 1 = 5,75$

Iterasi 2

$$\begin{aligned} x_{1+1} &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ x_2 &= 1,5 - \frac{0,875}{5,75} = 1,34782 \end{aligned}$$

Diperoleh $f(x_2) = (1,34782)^3 - (1,34782) - 1 = 0,100655$ dan $f'(x_1) = 3(1,34782)^2 - 1 = 4,44986$

Iterasi 3

$$x_{2+1} = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$x_3 = 1,34782 - \frac{0,100655}{4,44986} = 1,3252$$

Diperoleh $f(x_3) = (1,3252)^3 - (1,3252) - 1 = 0,00205666$

Dengan menggunakan pemrograman *Python* persamaan tersebut dapat diselesaikan dan diperoleh sebagai berikut.

Tabel 2.1 Output Metode Newton-Raphson

iter	x	$f(x)$
0	1	-1
1	1,5	0,875
2	1,34783	0,100655
3	1,32520	0.002058
4	1,32471	0,00000

Dapat dilihat pada Tabel 2.1, diperoleh akar persamaan $x = 1,32471$ pada iterasi ke 4.

2.6 Metode Levenberg Marquardt

Metode Levenberg-Marquardt merupakan salah satu metode iteratif yang digunakan untuk mencari sistem persamaan nonlinear. Analisis teoritis pertama tentang konvergensi lokal metode ini dilakukan pada kondisi nonsingularitas (Fan, 2014). Metode ini merupakan gabungan antara pendekatan Gauss-Newton yang cepat namun sensitif terhadap tebakan awal dan Gradient Descent yang lebih stabil namun lambat. Hal tersebut menyebabkan metode Levenberg-Marquardt ini mampu meningkatkan kestabilan konvergensi terutama ketika solusi berada jauh dari tebakan awal (Han & Rui, 2024).

Dalam mencari langkah-langkah iteratif, metode Levenberg-Marquardt

menggunakan rumus berikut:

$$(\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \lambda \mathbf{I}) \Delta x = -\mathbf{J}^T F(x) \quad (2.6.11)$$

Kemudian dilakukan perbaruan solusi menggunakan persamaan (2.5.8).

dimana $\mathbf{J}$ matriks Jacobian dari $f(x)$, λ merupakan parameter damping atau nilai pengendali yang digunakan untuk mengatur keseimbangan dan memastikan metode tetap stabil, terutama jika Jacobian mendekati singularitas, $\mathbf{I}$ merupakan matriks identitas untuk menjaga komputasi tetap stabil dengan menambahkan kontribusi diagonal ke sistem linear, dan Δx menunjukkan perubahan nilai x , yaitu langkah koreksi yang akan diterapkan pada vektor parameter pada iterasi berikutnya untuk mendekati solusi sistem. Koreksi ini bertujuan untuk membuat nilai tebakan solusi pada iterasi berikutnya semakin dekat dengan solusi sebenarnya dari sistem persamaan nonlinear (Putro dkk, 2025).

Langkah-langkah metode Levenberg-Marquardt sebagai berikut.

1. Tentukan tebakan awal x_0 dan parameter $\lambda_0 > 0$.
2. Hitung $F(x_k)$ dan $\mathbf{J}(x_k)$.
3. Hitung koreksi menggunakan persamaan (2.6.11).
4. Hitung solusi baru menggunakan persamaan (2.5.8).
5. Jika $\|f(x_{k+1})\| < \|f(x_k)\|$, turunkan nilai λ . Jika tidak, naikkan nilai λ dan kembali ke langkah 3.
6. Ulangi hingga memenuhi kriteria konvergensi.

Contoh 2.6.1 Tentukan akar persamaan dari sistem persamaan berikut menggunakan metode Levenberg-Marquardt

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^2 + y - 11 = 0 \\ f_2(x, y) &= x + y^2 - 7 = 0 \end{aligned}$$

dengan tebakan awal $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ dan parameter damping $\lambda_0 = 0.01$.

Penyelesaian:**Iterasi 1**

Evaluasi di titik $x_0 = 1$ dan $y_0 = 1$

$$\begin{aligned}f_1(1, 1) &= 1 + 1 - 11 = -9 \\f_2(1, 1) &= 1 + 1 - 7 = -5 \\||F(x_0, y_0)|| &= \sqrt{(-9)^2 + (-5)^2} = 10.29563\end{aligned}$$

Matriks Jacobian

$$\mathbf{J}(1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hitung $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ dan $\mathbf{J}^T f$

$$\mathbf{J}^T \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^T f = \begin{bmatrix} -23 \\ -19 \end{bmatrix}$$

Substitusi ke persamaan (2.6.10)

$$\begin{bmatrix} 5,01 & 4 \\ 4 & 5,01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $\Delta x = 4.3109$ dan $\Delta y = 0.3505$

Hitung solusi baru menggunakan persamaan (2.5.9)

$$x_1 = (1 + 4.3109, 1 + 0.3505) = (5.3109, 1.3505)$$

Hitung nilai fungsi baru

$$\begin{aligned}f_1(5.3109, 1.3505) &= (5.3209)^2 + 1.3505 - 11 = 18.5565 \\f_2(5.3109, 1.3505) &= 5.3209 + (1.3505)^2 - 7 = 0.1349 \\||F(x_1, y_1)|| &= 18.5565\end{aligned}$$

Karena $||F(x_1, y_1)|| > ||F(x_0, y_0)||$, maka langkah ditolak. Ulangi iterasi 2 dengan $\lambda = 0,01 \times 2 = 0.02$ dan tebakan awal (x, y) tetap.

Iterasi 2

Substitusi $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ dan $\mathbf{J}^T f$ ke persamaan (2.6.11) dengan λ baru, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 5,02 & 4 \\ 4 & 5,02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $\Delta x = 4,2891$ dan $\Delta y = 0,3674$

Hitung solusi baru

$$x_2 = (1 + 4.2891, 1 + 0.3674) = (5.2891, 1.3574)$$

Hitung nilai fungsi baru

$$f_1(5.2891, 1.3574) = (5.2891)^2 + 1.3574 - 11 = 18.3424$$

$$f_2(5.2891, 1.3574) = 5.2891 + (1.3574)^2 - 7 = 0.1589$$

$$\|F(x_2, y_2)\| = 18.3427$$

Karena $\|F(x_2, y_2)\| > \|F(x_1, y_1)\|$, maka langkah ditolak. Ulangi iterasi 2 dengan $\lambda = 0,02 \times 2 = 0.04$ dan tebakan awal (x, y) tetap.

Untuk selanjutnya akan dicari menggunakan bantuan pemrograman *Phyton*.

Tabel 2.2 Output Hasil Iterasi Metode Leverberg-Marquadt

iter	x	y	$\ F(x, y)\ $	Status
1	1	1	10.29563	Tolak
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
8	1	1	10.29563	Terima
9	3.19995	2.165609	6.727422	Terima
10	3.115764	1.981515	0.690787	Terima
11	3.002750	1.999056	0.015599	Terima
12	3.000006	1.999994	0.000036	Terima
13	3.000000	2.000000	0.000000	Terima

Berdasarkan Tabel 2.2, hasil perhitungan diperoleh pada iterasi ke-13 dengan nilai $x = 3.000000$ dan $y = 2.000000$.

2.7 Galat (*Error*)

Dalam metode numerik, galat (*error*) merupakan selisih yang terjadi antara solusi sebenarnya dengan solusi yang dihasilkan. Solusi yang dihasilkan pada metode numerik merupakan solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sebenarnya. Oleh karena itu, hasil perhitungan numerik disebut sebagai hampiran (*approximation*) yang tingkat ketelitiannya dapat diatur. Namun, karena solusi hampiran tidak sama seperti solusi sebenarnya, maka mengakibatkan selalu ada selisih antara solusi sebenarnya dan solusi hampiran. Selisih tersebut yang disebut sebagai galat (*error*) (Syafii, 2014).

Metode numerik melakukan perhitungan secara berulang untuk mendapat solusi yang semakin mendekati solusi sebenarnya. Dalam perhitungan tersebut, setiap hasil perhitungan akan mempunyai galat (*error*) atau nilai kesalahan. Nilai kesalahan ini penting untuk diperhatikan karena penggunaan metode yang kurang tepat dapat menghasilkan galat yang besar (Maharani & Suprpto, 2018). Dalam mengukur seberapa jauh nilai hampiran dan nilai sebenarnya dapat dihitung sebagai berikut.

$$\varepsilon = |x - x_a| \quad (2.7.12)$$

Dimana ε merupakan galat (*error*), x merupakan nilai sesungguhnya, dan x_a merupakan nilai hampiran. Solusi numerik dianggap semakin tepat apabila nilai galat yang dihasilkan semakin kecil.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada Semester Ganjil Tahun Ajaran 2025/2026 di Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan studi literatur secara sistematis yang diperoleh dari buku, jurnal, artikel ilmiah ataupun dari media lain yang terkait dengan sistem persamaan nonlinear, metode Newton-Raphson, dan metode Levenberg-Marquardt. Adapun tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Mencari dan mempelajari sumber literatur dari beberapa buku dan jurnal yang terkait dengan topik penelitian.
2. Mencari 5 kasus yang akan diselesaikan menggunakan metode Newton-Raphson dan metode Levenberg-Marquardt.

Adapun kasus sistem persamaan nonlinear yang akan digunakan sebagai berikut.

a. Kasus 1.

$$\begin{cases} 2x_1^2 - x_2 - 3 = 0 \\ (x_1 - 1)^2 + x_2 - 3 = 0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

b. Kasus 2.

$$\begin{cases} x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 + 5 = 0 \\ x_1x_2^2 + 2x_1 - 7x_2 + 6 = 0 \end{cases} \quad (3.2.2)$$

c. Kasus 3.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 12 \\ x_1x_2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3^2 = 1 \end{cases} \quad (3.2.3)$$

d. Kasus 4.

$$\begin{cases} \cos x_2 - \sin x_1 = 0 \\ x_3^{x_1} - \frac{1}{x_2} = 0 \\ \exp x_1 - x_3^2 = 0 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

e. Kasus 5.

$$\begin{cases} 12x_1 + x_2^2 - 3x_3 - 10 = 0 \\ x_1^2 + 8x_2 - \exp(-x_3) - 9 = 0 \\ x_2^3 - 20x_3 + 18 = 0 \end{cases} \quad (3.2.5)$$

3. Menyusun algoritma metode Newton-Raphson dan metode Levenberg-Marquardt dan mengimplementasikan ke dalam pemrograman *Python*.
4. Menyelesaikan kasus permasalahan dengan program yang telah dibuat menggunakan masing-masing metode.
5. Menganalisa dan membandingkan keakuratan, iterasi serta galat dari kedua metode yang digunakan.
6. Menentukan kesimpulan.

Adapun algoritma yang digunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinear dengan menggunakan metode Newton-Raphson dan Levenberg-Marquardt.

3.2.1 Algoritma Newton-Raphson

Algoritma dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinear dengan metode Newton-Raphson sebagai berikut.

1. Mulai.
2. Definisikan $F(x)$ dan $\mathbf{J}(x)$.
3. Inisialisasi:
 - Tebakan awal: x_0
 - Toleransi galat
 - Iterasi maksimum
4. Hitung fungsi dan Jacobian:
 - $F(x) = F(x_0)$
 - $\mathbf{J}(x) = \mathbf{J}(x_0)$
5. Selesaikan $\mathbf{J}(x_0)\Delta x = -F(x_0)$ untuk memperoleh Δx .
6. Perbarui solusi: $x_1 = x_0 + \Delta x$.
7. Cek konvergensi
 - Jika galat $<$ toleransi, solusi konvergen.
 - Jika galat $>$ toleransi, solusi tidak konvergen lanjut ke iterasi selanjutnya.
8. Berhenti.

3.2.2 Algoritma Levenberg-Marquardt

Algoritma dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinear dengan metode Levenberg-Marquardt sebagai berikut.

1. Mulai.
2. Definisikan $F(x)$ dan $\mathbf{J}(x)$.
3. Inisialisasi:
 - Tebakan awal: x_0
 - Toleransi galat
 - Iterasi maksimum

- Parameter redaman: λ_0

4. Hitung fungsi dan Jacobian

- $F(x) = F(x_0)$
- $\mathbf{J}(x) = \mathbf{J}(x_0)$

5. Selesaikan $(\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \lambda_0 I) \Delta x = -\mathbf{J}^T F(x)$ untuk memperoleh Δx .

6. Perbarui solusi: $x_1 = x_0 + \Delta x$.

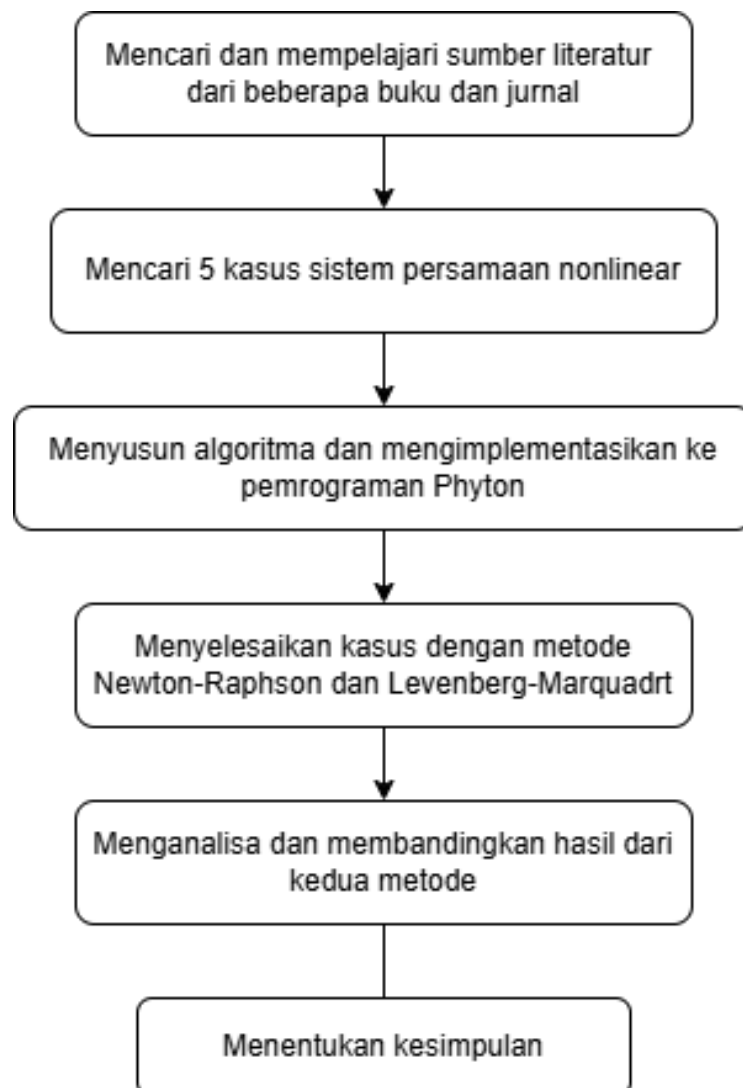
7. Evaluasi perbaikan:

- Jika $\|F(x_1)\| < \|F(x_0)\|$, langkah diterima. Turunkan nilai λ dan $x = x_1$.
- Jika $\|F(x_1)\| > \|F(x_0)\|$, langkah ditolak. Naikkan nilai λ dan tetap gunakan $x = x_0$.

8. Cek konvergensi

- Jika galat $<$ toleransi, solusi konvergen.
- Jika galat $>$ toleransi, solusi tidak konvergen dan lanjut ke iterasi selanjutnya.

9. Berhenti.



Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah didapatkan diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Metode Newton–Raphson dan Levenberg–Marquardt secara umum mampu menyelesaikan sistem persamaan nonlinier pada lima kasus uji, dengan menghasilkan solusi variabel yang sama serta nilai galat yang sangat kecil.
2. Pada Kasus 1, Kasus 2, dan Kasus 4, kedua metode mencapai konvergensi dengan jumlah iterasi yang sama, namun metode Newton–Raphson memiliki waktu komputasi yang lebih singkat dibandingkan metode Levenberg–Marquardt.
3. Pada Kasus 3, metode Newton–Raphson gagal mencapai konvergensi akibat matriks Jacobian yang bersifat singular, sedangkan metode Levenberg–Marquardt tetap mampu mencapai konvergensi dan menunjukkan kestabilan yang lebih baik.
4. Pada Kasus 5, kedua metode mencapai konvergensi dengan jumlah iterasi yang sama, namun metode Levenberg–Marquardt memerlukan waktu komputasi yang lebih singkat dibandingkan metode Newton–Raphson.
5. Secara keseluruhan, berdasarkan jumlah iterasi, nilai galat, dan waktu komputasi, metode Newton–Raphson menunjukkan kinerja yang lebih efisien pada sebagian besar kasus, sedangkan metode Levenberg–Marquardt lebih stabil dan andal karena mampu mencapai konvergensi pada seluruh kasus uji, khususnya pada kasus dengan kondisi matriks Jacobian yang kurang baik.

5.2 Saran

Penelitian selanjutnya disarankan menggunakan tebakan awal yang bervariasi untuk melihat pengaruhnya terhadap tingkat konvergensi metode. Selain itu, penelitian juga dapat menggunakan sistem persamaan nonlinear yang lebih kompleks untuk mengetahui kinerja dalam kondisi yang lebih beragam.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmadian, A. S. (2016). *Chapter 4 - Theories and methodology*. Dalam *Numerical Models for Submerged Breakwater*. Butterworth-Heinemann.
- Anton, H., & Kaul, S. (2019). *Elementary Linear Algebra* (12th ed.). Wiley.
- Azizah, N. L., & Ariyanti, N. (2020). *Dasar-Dasar Aljabar Linear*. Sidoarjo: UMSIDA Press.
- Basuki, A., & Ramadijanti. (2005). *Metode Numerik dan Algoritma Komputasi*. Yogyakarta: Andi.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *Numerical Methods for Engineers* (7th ed.). McGraw-Hill Education.
- Chen, L., & Ma, Y. (2022). A Modified Levenberg-Marquardt Method for Solving System Nonlinear Equation. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 69, 2019-2040.
- Devitriani., Kiftiah, M., & Yudhi. (2019). Analisis Metode Newton-Raphson Ganda Orde Konvergensi Empat dalam Menyelesaikan Sistem persamaan Nonlinear. *Bimaster: Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya*, 8(2), 213-220.
- Fan, J. (2014). Accelerating The Modified Levenberg-Marquardt Method for Nonlinear Equation. *Mathematics of Computation*, 83(287), 1173-1187.
- Han, Y., & Rui, S. (2024). A New Adaptive levenberg-Marquardt Method for Nonlinear Equations and Its Convergence Rate under The Holderian Local Error Bound Condition. *Symmetry*, 16(6), 1-19.
- Hulu, V. T., & Sinaga, T. R. (2019). *Analisis Data Statistik Parameter Aplikasi SPSS dan Statcal*. Ed. ke-11. Medan: Yayasan Kita Menulis.
- Lisa, Y. (2015). Implementasi Algoritma Pelatihan Levenberg Marquardt dan Regularisasi Bayes untuk Prediksi Curah Hujan. *Vox Edukasi*, 6(2), 200-210.
- Maharani, S., & Suprpto, E. (2018). *Analisis Numerik: Berbasis Group Investigation untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kritis*. Magetan: CV. AE MEDIA GRAFIKA.
- Munir, R. (2006). *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.

- Pandia, W., & Sitepu, I. (2021). Penentuan Akar Persamaan Non Linier dengan Metode Numerik. *Jurnal Mutiara Pendidikan*, 6(2), 122-129.
- Pratikno, I., Kususmastuti, N., & Prihandono, B. (2015). Penyelesaian Persamaan Nonlinear Berderajat Dua Menggunakan Metode Hopfield Modifikasi. *BIMASTER : Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, 4(03), 353-362.
- Putro, D. S., Syahrudin., Sirajuddin., Mahsup., & Abdillah. (2025). Comparison of the Accuracy og The Levenberg-Marquardt and Trust-Region Methodin Solving Multivariable Non-Linear Equation System. *Aceh International Journal of Science and Thecnology*, 14(2), 128-139.
- Rahayu, Y., Noviani, E., & Yudhi. (2020). Modifikasi Metode Newton Raphson dengan Konvergensi Orde Tiga untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Nonlinear. *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya*, 09(4), 533-540.
- Rochmad. (2013). Aplikasi Metode Newton-Raphson untuk Menghampiri Solusi Persamaan nonlinear. *Jurnal MIPA*, 36(2), 193-200.
- Rosidi, M. (2020). *Metode Numerik Menggunakan R untuk Teknik Lingkungan*.
- Soebagyo, J., Maarif, S. & Purwanto, S. E. (2020). *Matematika Teknik Aljabar Linier dan Metriks*. Bandung: Manggu Makmur Tanjung Lestari.
- Susila, I. N. (1993). *Dasar-Dasar Metode Numerik*. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Proyek Pembinaan Tenaga Kependidikan Pendidikan Tinggi.
- Syafii. (2014). *Metode Numerik Algoritma dan Pemrograman Visual C++*. Padang: Andalas University Press.
- Syafi'i, M., Ridhallah, R., & Nur, R. A. (2023). Penerapan Metode Newton-Raphson untuk Mencari AKar pada Fungsi Kompleks. *JOSTECH: Journal of Science and Technology*, 3(1), 71-78.
- Utami, N. N., Widana, I. N., & Asih, N. M. (2013). Perbandingan Solusi SIstem Persamaan Nonlinear Menggunakan Metode Newton-Raphson dan Metode Jacobian. *E-Jurnal Matematika*, 2(2), 11-17.