

**TEOREMA ROLLE DAN TEOREMA NILAI RATA-RATA PADA FUNGSI
BERNILAI BARISAN ℓ_1**

Skripsi

Oleh

**NUR HALIMAH SA'DIAH
NPM. 2217031062**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

ABSTRACT

ROLLE'S THEOREM AND THE MEAN VALUE THEOREM FOR FUNCTIONS TAKING VALUES IN THE SEQUENCE SPACE ℓ_1

By

Nur Halimah Sa'diah

Rolle's Theorem and the Mean Value Theorem are studied for sequence-valued functions in the Banach space ℓ_1 , which is the space of sequences equipped with the norm

$$\|p\|_1 = \sum_{d=1}^{\infty} |p_d|.$$

The space ℓ_1 allows the extension of fundamental concepts of real analysis, such as limits, continuity, and derivatives, to infinite-dimensional spaces. The discussion is carried out using a mathematical analysis approach based on literature study, employing the definitions of continuity, differentiability, and the completeness property of the space ℓ_1 .

The results show that Rolle's Theorem and the Mean Value Theorem remain valid for sequence-valued functions in the space ℓ_1 , provided that the function is continuous on a closed interval and differentiable on an open interval. The proof is obtained by examining the derivatives of each sequence component and utilizing the properties of the ℓ_1 norm, ensuring the existence of a point within the interval that satisfies the conditions of both theorems. These results confirm that fundamental theorems of differential analysis on $\mathbb{R}$ can be generalized to Banach spaces, particularly the space ℓ_1 .

Keywords: Rolle's Theorem, Mean Value Theorem, ℓ_1 space, Banach space, sequence-valued functions, derivative.

ABSTRAK

TEOREMA ROLLE DAN TEOREMA NILAI RATA-RATA PADA FUNGSI BERNILAI BARISAN ℓ_1

Oleh

Nur Halimah Sa'diah

Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-Rata dibahas pada fungsi bernilai barisan dalam ruang Banach ℓ_1 , yaitu ruang barisan yang memiliki norma

$$\|p\|_1 = \sum_{d=1}^{\infty} |p_d|.$$

Ruang ℓ_1 memungkinkan pengembangan konsep dasar analisis real, seperti limit, kekontinuan, dan turunan, ke ruang berdimensi tak hingga. Pembahasan dilakukan melalui pendekatan analisis matematis berbasis studi literatur dengan memanfaatkan definisi fungsi kontinu, fungsi terdiferensialkan, serta sifat kelengkapan ruang ℓ_1 .

Hasil pembahasan menunjukkan bahwa Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-Rata tetap berlaku pada fungsi bernilai barisan di ruang ℓ_1 apabila fungsi kontinu pada interval tertutup dan terdiferensialkan pada interval terbuka. Pembuktian diperoleh dengan meninjau turunan setiap komponen barisan serta menggunakan sifat norma pada ruang ℓ_1 , sehingga diperoleh suatu titik pada interval yang memenuhi kondisi kedua teorema tersebut. Hasil ini menegaskan bahwa teorema dasar analisis diferensial pada $\mathbb{R}$ dapat diperluas ke ruang Banach, khususnya ruang ℓ_1 .

Kata-kata kunci: Teorema Rolle, Teorema Nilai Rata-Rata, ruang ℓ_1 , ruang Banach, fungsi bernilai barisan, turunan.

**TEOREMA ROLLE DAN TEOREMA NILAI RATA-RATA PADA FUNGSI
BERNILAI BARISAN ℓ_1**

NUR HALIMAH SA'DIAH

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

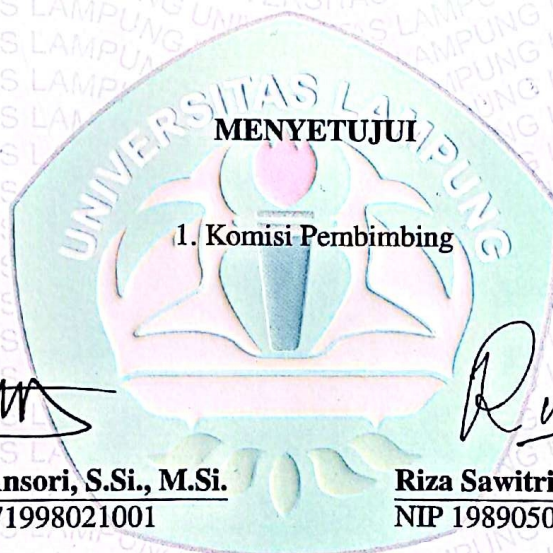
Judul Skripsi : **TEOREMA ROLLE DAN TEOREMA NILAI
RATA-RATA PADA FUNGSI BERNILAI
BARISAN ℓ_1**

Nama Mahasiswa : **Nur Halimah Sa'diah**

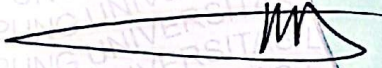
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031062**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



1. Komisi Pembimbing


Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.
NIP 197202271998021001


Riza Sawitri, S.Pd., M.Sc.
NIP 198905042024062001

2. Ketua Jurusan Matematika


Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**



Sekretaris : **Riza Sawitri, S.Pd., M.Sc.**



Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**



Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng Heri Satria, S.Si., M.Si.

NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **06 Februari 2026**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Nur Halimah Sa'diah**
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031062**
Jurusan : **Matematika**
Judul Skripsi : **Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-rata
Pada Fungsi Bernilai Barisan ℓ_1**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 06 Februari 2026

Penulis,

A handwritten signature in black ink is written over a rectangular meter stamp. The stamp is pink and white, featuring the Garuda Pancasila emblem and the text '1000', 'METERAI TEMPEL', and 'DE097ANX283366988'.

Nur Halimah Sa'diah

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Nur Halimah Sa'diah, lahir di Subang Jaya pada 9 September 2004, sebagai anak pertama dari dua bersaudara, putri pasangan Bapak Suwarno dan Ibu Siti Komariah.

Pendidikan formal penulis diawali di TK Miftahul Huda pada tahun 2007 dan diselesaikan pada tahun 2009. Setelah itu, penulis melanjutkan pendidikan di SD Negeri Subang Jaya pada periode 2009–2016. Pendidikan tingkat menengah pertama ditempuh di SMP Negeri 1 Bandar Surabaya pada tahun 2016–2019, kemudian dilanjutkan ke SMA Negeri 1 Seputih Surabaya hingga lulus pada tahun 2022. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN).

Selama menjalani masa perkuliahan, penulis aktif berpartisipasi dalam berbagai kegiatan organisasi baik di lingkungan kampus maupun di luar kampus. Pada tahun 2023, penulis bergabung sebagai anggota Bidang Kaderisasi dan Kepemimpinan HIMATIKA FMIPA Universitas Lampung. Selanjutnya, pada tahun 2024 penulis menjabat sebagai Wakil Kepala Divisi Kesekretariatan UKM KSR PMI Unit Universitas Lampung, serta menjadi bagian dari Core Team Divisi Public Relation and Marketing pada kegiatan World Cleanup Day (WCD) Lampung sejak tahun yang sama.

Sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis melaksanakan kegiatan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Dono Arum, Kecamatan Seputih Agung, Kabupaten Lampung Tengah pada Januari–Februari 2025. Selain itu, penulis juga melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Pengelolaan Keuangan dan Aset Daerah (BPKAD) Provinsi Lampung pada Juni–Agustus 2025.

KATA INSPIRASI

“Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya”
(QS. Al-Baqarah: 286)

”Karena sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan”
(QS. Al-Insyirah (94): 5–6)

”Perbanyak sholawat dan ingat Allah, nanti Allah yang buat kita bisa, mampu dan sanggup dalam mencapai hal apapun”
(Wirda Mansyur)

“Jika lelah jangan terus terpaku pada tujuan di depan, tetapi sesekali lihatlah ke belakang dan sadari betapa banyak perjuangan serta pengorbanan yang telah dilalui hingga sampai pada titik ini”
(Penulis)

PERSEMBAHAN

Alhadulillahirobbil'alamin

Dengan mengucapkan puji dan syukur atas kehadiran Allah Subhanahu Wata'ala karena limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya.

Tak lupa shalawat beserta salam selalu tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu Alaihi Wasallam.

Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Bapak dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-rata Pada Fungsi Bernilai Barisan ℓ_1 " dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Diri sendiri, atas segala usaha, ketekunan, dan perjuangan yang telah dilakukan untuk menyelesaikan skripsi ini tepat pada waktunya. Terima kasih telah bertahan di tengah tantangan dan terus maju meski dihadapkan pada berbagai rintangan.
2. Bapak, Mama, Dek Fakhri dan keluarga besar yang selalu menjadi pengingat agar selalu berada di jalan Allah SWT, sukses didunia maupun diakhirat, selalu memberikan do'a dan dukungan kepada penulis, semoga kita bisa bersama-sama menuju Jannah Allah SWT. Aamiinn yaa Rabbal'amin.
3. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sepanjang proses penyusunan skripsi ini.
4. Ibu Riza Sawitri, S.Pd., M.Sc. selaku Pembimbing 2 yang telah memberikan arahan, dukungan, serta doa sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Penguji dan Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas

Lampung yang telah bersedia memberikan saran, kritik, serta evaluasi yang membangun sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

6. Bapak Drs. Nusyirwan, M.Si. selaku dosen Pembimbing Akademik penulis di masa perkuliahan.
7. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Teman-teman satu bimbingan yang selalu support satu sama lain, Kartika dan Heni. Semoga Allah SWT lancarkan selalu urusan kita.
9. Sahabat terbaikku Mawar, Eka, Dwi terimakasih untuk persaudaraan dan kebersamaan selama ini. terimakasih atas segala hal-hal baik yang pernah kalian berikan.
10. Teman-temanku Dafiani, Clara, Tiya, Livia, Resti, Abel dan seluruh penghuni Kost Asrama Putri yang telah menjadi rumah dan menyediakan telinga untuk mendengarkan tanpa menghakimi.
11. Saudara dan Sahabat terbaikku Ante ica dan Nadiya yang senantiasa menjadi tempat pulang dalam perjalanan penulis hingga saat ini.
12. Teman-teman Kaderisasi dan Kepemimpinan dan KKN Desa Dono Arum yang telah memberikan pengalaman luar biasa.
13. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 06 Februari 2026

Nur Halimah Sa'diah

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	xiii
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Manfaat Penelitian	3
II TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Fungsi	4
2.2 Limit dan Kekontinuan	8
2.3 Turunan	11
2.4 Barisan	13
2.5 Deret	15
2.6 Ruang Bernorm dan Ruang Banach	22
2.7 Ruang Barisan ℓ_1	24
2.8 Fungsi Bernilai Barisan	26
2.9 Teorema Rolle	27
2.10 Teorema Nilai Rata-rata (TNR)	28
III METODE PENELITIAN	32
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	32
3.2 Metode Penelitian	32
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	33
4.1 Fungsi Bernilai Barisan pada Ruang ℓ_1	33
4.2 Kekontinuan Fungsi Bernilai Barisan	35
4.3 Turunan Fungsi Bernilai Barisan	43
4.4 Teorema Rolle pada Ruang ℓ_1	49
4.5 Teorema Nilai Rata-rata pada Ruang ℓ_1	56

V KESIMPULAN DAN SARAN	61
5.1 Kesimpulan	61
5.2 Saran	63
DAFTAR PUSTAKA	64

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Analisis real adalah bagian dari matematika yang mempelajari sifat-sifat bilangan real, fungsi real, serta konsep seperti limit, kekontinuan, dan diferensial (Suzila dkk., 2024). Dua teorema yang berperan penting dalam analisis real adalah teorema Rolle dan teorema Nilai Rata-Rata (TNR). Kedua teorema ini tidak hanya memiliki nilai teoretis, tetapi juga menjadi landasan bagi pengembangan hasil-hasil lain, seperti teorema Taylor, teorema dasar kalkulus, serta aplikasi dalam analisis numerik dan persamaan diferensial (Martínez-Legaz, 2023).

Teorema Rolle dan TNR dapat diartikan sebagai hasil pokok dalam analisis real yang menjelaskan keberadaan suatu titik pada interval $[k, l]$ dengan sifat tertentu dari turunannya. Secara khusus, teorema Rolle menjamin adanya $m \in (k, l)$ dengan $f'(m) = 0$ apabila $f(k) = f(l)$, sedangkan TNR menyatakan adanya $m \in (k, l)$ dengan $f'(m) = \frac{f(l) - f(k)}{l - k}$ (Suzila dkk., 2024). Hasil tersebut memiliki peranan fundamental dalam pengembangan analisis matematika, teori aproksimasi, serta persamaan diferensial (Koceic-Bilan dan Mirosvic, 2023).

Perkembangan analisis fungsional dalam lima tahun terakhir menunjukkan bahwa teorema kecenderungan untuk memperluas hasil-hasil klasik kalkulus, termasuk teorema Rolle dan TNR pada kerangka ruang norma dan ruang Banach (Fiorenza dan Fiorenza, 2024). Salah satu ruang Banach yang penting dalam konteks ini adalah ruang ℓ_1 , yang terdiri dari semua barisan bilangan real atau kompleks (p_a) dengan $\sum_{a=1}^{\infty} |p_a| < \infty$. Ruang ini dilengkapi dengan norma $\|p\|_1 = \sum_{a=1}^{\infty} |p_a|$ dan memiliki sifat kelengkapan sehingga setiap barisan Cauchy di dalamnya pasti konvergen (Haryadi dkk., 2024). Dengan sifat kelengkapan ini, definisi turunan dalam norma $\|\cdot\|_1$ dapat dirumuskan secara konsisten, sehingga memungkinkan untuk memperluas pembuktian teorema-teorema diferensial klasik.

Meskipun demikian, penelitian mengenai perluasan teorema Rolle dan TNR pada fungsi bernilai barisan di ruang ℓ_1 masih relatif jarang. Penelitian terdahulu yang dilakukan oleh Koceic-Bilan dan Mirosevic (2023) menunjukkan bentuk umum teorema Nilai Rata-rata pada diferensiasi non-klasik. Penelitian lainnya dilakukan oleh Utami dkk (2022) membahas kelengkapan ruang ℓ^p pada norm-2 dan menjelaskan sifat-sifat yang menguatkan keberadaan struktur Banach dalam ruang barisan. Selain itu, penelitian Haryadi dkk (2024) mengenai ruang barisan yang terdefinisi oleh fungsi Orlicz memperlihatkan relevansi ruang barisan dalam memperluas teori konvergensi.

Berdasarkan penelitian sebelumnya, belum ada penelitian yang mengkaji tentang pengembangan teorema Rolle dan TNR pada fungsi bernilai barisan pada ruang ℓ_1 . Oleh karena itu, penelitian ini difokuskan pada perluasan teorema Rolle dan TNR untuk fungsi bernilai barisan dalam ruang Banach ℓ_1 untuk memberikan kontribusi teoretis dalam analisis fungsional dan memperkaya literatur matematika terkait generalisasi teorema diferensial klasik. Hasil penelitian ini diharapkan bisa menjadi referensi untuk penelitian berikutnya dalam mempelajari teorema diferensial pada ruang ℓ_p dengan $p > 1$ maupun pada ruang fungsional lainnya, sehingga semakin memperluas cakupan analisis modern baik dalam aspek teoretis maupun aplikatif.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah penelitian ini yaitu:

1. bagaimana definisi fungsi bernilai barisan di ruang ℓ_1 ?
2. bagaimana cara mengonstruksikan teorema Rolle untuk fungsi bernilai barisan di ruang ℓ_1 ?
3. bagaimana cara mengonstruksikan teorema Nilai Rata-rata untuk fungsi bernilai barisan di ruang ℓ_1 ?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini yaitu:

1. menjelaskan definisi fungsi bernilai barisan di ruang ℓ_1 ;
2. mengonstruksikan teorema Rolle untuk fungsi bernilai barisan di ℓ_1 ;
3. mengonstruksikan teorema Nilai Rata-rata untuk fungsi bernilai barisan di ℓ_1 .

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini yaitu:

1. menyajikan bentuk umum teorema Rolle untuk fungsi bernilai barisan di ruang ℓ_1 ;
2. menyajikan bentuk umum teorema Nilai Rata-rata untuk fungsi bernilai barisan di ruang ℓ_1 ;
3. mengonstruksikan keberlakuan kedua teorema tersebut dalam ruang Banach ℓ_1 .

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan beberapa konsep dasar yang menjadi dasar teori untuk mempermudah pemahaman pada bagian berikutnya.

2.1 Fungsi

Salah satu konsep dasar yang menjadi landasan dalam analisis matematika adalah fungsi. Pemahaman terhadap konsep fungsi sangat penting karena menjadi dasar bagi pembahasan lebih lanjut mengenai limit, kekontinuan, dan turunan yang digunakan dalam analisis real maupun analisis fungsional (Rafiqi dan Prasetyo, 2023). Berikut diberikan penjelasan mengenai definisi dan contoh fungsi.

Definisi 2.1.1 Fungsi f adalah suatu aturan yang menghubungkan setiap objek p dari suatu himpunan yang disebut daerah asal (*domain*) ke sebuah nilai tunggal $f(p)$ dalam himpunan lain yang disebut daerah hasil (*range*). Fungsi biasanya dinyatakan dengan satu huruf seperti f atau g , dan $f(p)$ menyatakan nilai fungsi f pada p . (Purcell dkk., 2007)

Contoh 2.1.1 Diberikan fungsi

$$f(p) = p^2 - 4p + 1.$$

Jika dilakukan substitusi $p = 1 + h$, dengan $h \in \mathbb{R}$, maka diperoleh

$$f(1 + h) = (1 + h)^2 - 4(1 + h) + 1.$$

Dengan melakukan ekspansi dan penyederhanaan, diperoleh

$$\begin{aligned} f(1+h) &= (1+2h+h^2) - (4+4h) + 1 \\ &= 1+2h+h^2-4-4h+1 \\ &= (1-4+1) + (2h-4h) + h^2 \\ &= -2-2h+h^2. \end{aligned}$$

Definisi 2.1.2 Diberikan himpunan K dan L . Fungsi $f : K \rightarrow L$ dikatakan *surjektif* (onto) jika untuk setiap $q \in L$ terdapat $p \in K$ sehingga $f(p) = q$. (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.2 Diberikan fungsi

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

yang didefinisikan oleh

$$f(p) = 3p + 1.$$

Untuk setiap $q \in \mathbb{R}$, dapat ditentukan

$$p = \frac{q-1}{3} \in \mathbb{R}$$

sehingga

$$f(p) = f\left(\frac{q-1}{3}\right) = 3\left(\frac{q-1}{3}\right) + 1 = q - 1 + 1 = q.$$

Dengan demikian, fungsi f bersifat surjektif.

Definisi 2.1.3 Fungsi $f : K \rightarrow L$ disebut *injektif* jika untuk setiap $p, r \in K$, berlaku bahwa

$$f(p) = f(r) \implies p = r.$$

(Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.3 Misalkan

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

didefinisikan oleh

$$f(p) = p^3 + p.$$

Ambil $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ dan misalkan

$$f(p_1) = f(p_2).$$

Maka

$$p_1^3 + p_1 = p_2^3 + p_2,$$

sehingga

$$(p_1 - p_2)(p_1^2 + p_1p_2 + p_2^2 + 1) = 0.$$

Karena

$$p_1^2 + p_1p_2 + p_2^2 + 1 > 0,$$

maka diperoleh

$$p_1 = p_2.$$

Dengan demikian, fungsi f bersifat injektif.

Definisi 2.1.4 Diberikan himpunan K dan L . Fungsi $f : K \rightarrow L$ disebut *bijektif* jika fungsi f bersifat injektif dan surjektif. (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.4 Misalkan

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

didefinisikan oleh

$$f(p) = 3p - 1.$$

Akan ditunjukkan bahwa fungsi f merupakan fungsi bijektif.

Ambil $p, q \in \mathbb{R}$ dan misalkan

$$f(p) = f(q).$$

Maka

$$3p - 1 = 3q - 1,$$

sehingga diperoleh

$$p = q.$$

Dengan demikian, fungsi f bersifat injektif.

Selanjutnya, ambil sebarang $r \in \mathbb{R}$. Dipilih

$$p = \frac{r+1}{3} \in \mathbb{R}$$

sehingga

$$f(p) = f\left(\frac{r+1}{3}\right) = 3\left(\frac{r+1}{3}\right) - 1 = r + 1 - 1 = r.$$

Hal ini menunjukkan bahwa fungsi f bersifat surjektif.

Oleh karena itu, fungsi f merupakan fungsi bijektif (korespondensi satu-satu).

Definisi 2.1.5 Misalkan $f : K \rightarrow L$ merupakan fungsi bijektif. Fungsi $f^{-1} : L \rightarrow K$ yang didefinisikan oleh

$$f^{-1}(l) = k \iff f(k) = l,$$

disebut fungsi invers dari f . (Derwantoro dkk., 2020).

Contoh 2.1.5 Misalkan fungsi

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

didefinisikan oleh

$$f(p) = 2p - 3.$$

Karena fungsi f merupakan korespondensi satu-satu, maka fungsi invers dari f ada.

Misalkan

$$f(p) = q,$$

sehingga

$$q = 2p - 3.$$

Dari persamaan tersebut diperoleh

$$p = \frac{q+3}{2}.$$

Dengan demikian, fungsi invers dari f adalah

$$f^{-1}(q) = \frac{q + 3}{2}.$$

2.2 Limit dan Kekontinuan

Setelah memahami pengertian fungsi, langkah berikutnya adalah mempelajari konsep limit dan kekontinuan. Kedua konsep ini memiliki peranan penting dalam menjelaskan perilaku fungsi ketika mendekati suatu titik dan menjadi dasar bagi definisi turunan fungsi (Susanti dan Ramadhan, 2022). Berikut diberikan penjelasan mengenai definisi, teorema dan contoh pada limit dan kekontinuan.

Definisi 2.2.1 Dikatakan

$$\lim_{p \rightarrow k} f(p) = B$$

jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga

$$|f(p) - B| < \varepsilon$$

untuk setiap $p \in K$ yang memenuhi

$$0 < |p - k| < \delta.$$

(Purcell dan Varberg, 1987).

Contoh 2.2.1 Akan ditunjukkan bahwa

$$\lim_{p \rightarrow 3} (4p - 5) = 7.$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ akan ditentukan $\delta > 0$ sehingga jika $0 < |p - 3| < \delta$, maka $|(4p - 5) - 7| < \varepsilon$.

Perhatikan bahwa

$$|(4p - 5) - 7| = |4p - 12| = 4|p - 3|.$$

Agar $4|p - 3| < \varepsilon$, cukup dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

Dengan demikian, jika $0 < |p - 3| < \delta$, maka

$$|(4p - 5) - 7| < \varepsilon.$$

(Purcell dkk., 2007).

Teorema 2.2.1 Jika $\lim_{p \rightarrow k} f(p)$ ada, maka limit tersebut bernilai tunggal. (Parzynski dan Philip, 1982).

Bukti: Misalkan

$$\lim_{p \rightarrow k} f(p) = B \quad \text{dan} \quad \lim_{p \rightarrow k} f(p) = A.$$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Terdapat $\delta_1, \delta_2 > 0$ sehingga:

- (i) $|f(p) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $0 < |p - k| < \delta_1$,
- (ii) $|f(p) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $0 < |p - k| < \delta_2$.

Ambil $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Maka untuk $0 < |p - k| < \delta$ berlaku

$$|B - A| \leq |B - f(p)| + |f(p) - A| < \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, diperoleh $B = A$.

Definisi 2.2.2 Fungsi f dikatakan kontinu di $p = k$ jika memenuhi:

- (1) $f(k)$ ada,
- (2) $\lim_{p \rightarrow k} f(p)$ ada,
- (3) $\lim_{p \rightarrow k} f(p) = f(k)$.

Jika salah satu syarat tidak terpenuhi, maka fungsi f tidak kontinu di $p = k$. (Amir dan Prasajo, 2017).

Contoh 2.2.2 Diberikan $f(p) = 3p - 2$. Akan ditunjukkan bahwa f kontinu di $p = 4$.

$$(1) f(4) = 3(4) - 2 = 10,$$

$$(2) \lim_{p \rightarrow 4} (3p - 2) = 10,$$

(3) Karena $f(4) = \lim_{p \rightarrow 4} f(p)$, maka f kontinu di $p = 4$.

Teorema 2.2.2 Misalkan f dan g kontinu di $k \in K$ dan $a \in \mathbb{R}$. Maka:

a. $f + g$ kontinu di k ,

b. af kontinu di k .

(Bartle dan Sherbert, 2000).

Bukti:

a. Karena f dan g kontinu di k , maka

$$(f + g)(k) = \lim_{p \rightarrow k} (f(p) + g(p)),$$

sehingga $f + g$ kontinu di k .

b. Karena f kontinu di k , maka

$$f(k) = \lim_{p \rightarrow k} f(p).$$

Dikalikan dengan a , diperoleh

$$af(k) = \lim_{p \rightarrow k} af(p),$$

sehingga af kontinu di k .

2.3 Turunan

Konsep turunan merupakan lanjutan dari pembahasan limit dan kekontinuan yang menggambarkan laju perubahan suatu fungsi terhadap variabel bebasnya. Pembahasan mengenai turunan sangat penting karena menjadi dasar bagi pembentukan teorema-teorema diferensial seperti Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-Rata (Hidayat dan Sari, 2023). Pada bab ini akan diuraikan mengenai definisi, teorema, dan contoh turunan.

Definisi 2.3.1 Misalkan fungsi $f(p)$ terdefinisi pada interval $[k, l]$ dan $m \in (k, l)$. Turunan fungsi f di titik m didefinisikan oleh

$$f'(m) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(m+h) - f(m)}{h},$$

jika limit tersebut ada. (Toheri, 2016).

Contoh 2.3.1 Misalkan akan ditentukan turunan dari fungsi

$$f(p) = p^3 + 2p - 5$$

pada titik $p = 2$. Berdasarkan definisi turunan, diperoleh

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 + 2(2+h) - 5 - (2^3 + 2 \cdot 2 - 5)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(8 + 12h + 6h^2 + h^3 + 4 + 2h - 5) - (8 + 4 - 5)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 6h^2 + h^3 + 2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (14 + 6h + h^2) \\ &= 14. \end{aligned}$$

(Toheri, 2016).

Definisi 2.3.2 Misalkan f suatu fungsi yang terdefinisi pada suatu selang terbuka yang memuat titik m . Turunan pertama fungsi f di titik m didefinisikan oleh

$$f'(m) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(m+h) - f(m)}{h},$$

asalkan limit tersebut ada. Secara ekuivalen, turunan f di titik m dapat dituliskan sebagai

$$f'(m) = \lim_{p \rightarrow m} \frac{f(p) - f(m)}{p - m}.$$

Apabila limit tersebut ada, maka $f'(m)$ terdefinisi dan fungsi f dikatakan mempunyai turunan (terdiferensiabel) di titik m . Sebaliknya, jika limit tersebut tidak ada, maka fungsi f dikatakan tidak memiliki turunan di titik m . (Malik dan Bakhri, 2023).

Teorema 2.3.1 Jika fungsi f memiliki turunan di titik m , maka fungsi f kontinu di titik m . (Toheri, 2016).

Bukti Fungsi f dikatakan kontinu di titik m apabila

$$\lim_{p \rightarrow m} f(p) = f(m).$$

Dengan kata lain, cukup ditunjukkan bahwa

$$\lim_{p \rightarrow m} [f(p) - f(m)] = 0.$$

Perhatikan bahwa

$$\lim_{p \rightarrow m} [f(p) - f(m)] = \lim_{p \rightarrow m} \left[(p - m) \cdot \frac{f(p) - f(m)}{p - m} \right].$$

Karena fungsi f memiliki turunan di titik m , maka

$$\lim_{p \rightarrow m} \frac{f(p) - f(m)}{p - m} = f'(m).$$

Dengan demikian,

$$\lim_{p \rightarrow m} [f(p) - f(m)] = \lim_{p \rightarrow m} (p - m) \cdot f'(m) = 0 \cdot f'(m) = 0.$$

Oleh karena itu,

$$\lim_{p \rightarrow m} f(p) = f(m),$$

sehingga terbukti bahwa jika fungsi f memiliki turunan di titik m , maka fungsi f kontinu di titik m .

2.4 Barisan

Sebelum beralih pada pembahasan ruang bernorm dan ruang Banach, perlu dipahami terlebih dahulu konsep barisan. Barisan digunakan untuk menggambarkan urutan bilangan yang memiliki sifat konvergensi tertentu dan menjadi dasar dalam pembentukan ruang-ruang barisan seperti ℓ_p (Utami dkk., 2022). Berikut diberikan penjelasan mengenai definisi, teorema, dan contoh Barisan.

Definisi 2.4.1 Barisan bilangan real adalah suatu fungsi

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dengan kata lain, barisan merupakan suatu aturan yang menghubungkan setiap bilangan asli $d \in \mathbb{N}$ ke tepat satu bilangan real p_d .

Untuk setiap $d \in \mathbb{N}$, nilai fungsi $f(d)$ dinyatakan dengan

$$f(d) = p_d,$$

di mana p_d disebut sebagai suku ke- d dari barisan tersebut. Barisan dengan suku ke- d adalah p_d dinotasikan dengan

$$(p_d) \quad \text{atau} \quad (p_d)_{d \in \mathbb{N}}.$$

(Bartle dan Sherbert, 2000).

Contoh 2.4.1 Diketahui barisan

$$(p_d) = (2, 4, 6, 8, \dots)$$

merupakan barisan bilangan genap. Barisan tersebut dapat dinyatakan dengan

$$p_d = 2d, \quad d \in \mathbb{N}.$$

Definisi 2.4.2 Barisan adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada himpunan bilangan bulat positif, yaitu

$$p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Untuk setiap $d \in \mathbb{N}$, nilai $p(d)$ dinotasikan dengan p_d . Dengan demikian, $p_1, p_2, \dots, p_d, \dots$ disebut sebagai suatu barisan bilangan real (Mizrahi dan Sullivan, 1982).

Teorema 2.4.1 Jika barisan (p_d) konvergen, maka barisan tersebut terbatas (Gunawan, 2011).

Bukti Misalkan barisan (p_d) konvergen ke B . Berdasarkan definisi kekonvergenan, terdapat $D \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $d \geq D$ berlaku

$$|p_d - B| < 1.$$

Akibatnya, untuk setiap $d \geq D$, diperoleh

$$|p_d| \leq |p_d - B| + |B| < 1 + |B|.$$

Selanjutnya, untuk suku-suku awal barisan, yaitu $p_1, p_2, \dots, p_{D-1}$, masing-masing memiliki nilai mutlak yang hingga. Ambil

$$A = \max\{|p_1|, |p_2|, \dots, |p_{D-1}|, 1 + |B|\}.$$

Maka untuk setiap $d \in \mathbb{N}$ berlaku

$$|p_d| \leq A.$$

Dengan demikian, barisan (p_d) terbukti terbatas.

2.5 Deret

Deret merupakan kelanjutan dari konsep barisan yang membahas penjumlahan suku-suku barisan. Dalam analisis real fungsional, deret tak hingga berperan penting dalam kajian konvergensi, serta menjadi dasar pendefinisian ruang barisan ℓ_1 yang digunakan sebagai kodomain fungsi bernilai barisan. (Bartle dan Sherbert, 2000).

Definisi 2.5.1 Misalkan (p_d) adalah suatu barisan dan didefinisikan

$$S_d = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_d.$$

Barisan (S_d) disebut barisan jumlah parsial dari deret tak hingga

$$\sum_{d=1}^{\infty} p_d.$$

Bilangan p_d disebut suku ke- d dari deret

$$\sum_{d=1}^{\infty} p_d,$$

dan S_d disebut jumlah parsial ke- d dari deret

$$\sum_{d=1}^{\infty} p_d$$

(Wahyuningsih dkk., 2022).

Teorema 2.5.1 Misalkan deret

$$\sum_{d=1}^{\infty} p_d = S \quad \text{dan} \quad \sum_{d=1}^{\infty} q_d = T,$$

serta $C \in \mathbb{R}$. Maka berlaku:

- (1) $\sum_{d=1}^{\infty} (Cp_d) = CS,$
- (2) $\sum_{d=1}^{\infty} (p_d + q_d) = S + T,$

$$(3) \sum_{d=1}^{\infty} (p_d - q_d) = S - T.$$

(Wahyuningsih dkk., 2022).

Bukti Misalkan barisan jumlah parsial dari deret $\sum_{d=1}^{\infty} p_d$ dan $\sum_{d=1}^{\infty} q_d$ berturut-turut didefinisikan oleh

$$S_n = \sum_{d=1}^n p_d \quad \text{dan} \quad T_n = \sum_{d=1}^n q_d.$$

Karena

$$\sum_{d=1}^{\infty} p_d = S \quad \text{dan} \quad \sum_{d=1}^{\infty} q_d = T,$$

maka berlaku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad \text{dan} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T.$$

(1) Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\sum_{d=1}^n (Cp_d) = C \sum_{d=1}^n p_d = CS_n.$$

Dengan mengambil limit ketika $n \rightarrow \infty$ diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{d=1}^n (Cp_d) = C \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = CS.$$

Jadi,

$$\sum_{d=1}^{\infty} (Cp_d) = CS.$$

(2) Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\sum_{d=1}^n (p_d + q_d) = \sum_{d=1}^n p_d + \sum_{d=1}^n q_d = S_n + T_n.$$

Dengan mengambil limit ketika $n \rightarrow \infty$ diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{d=1}^n (p_d + q_d) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + T_n) = S + T.$$

Jadi,

$$\sum_{d=1}^{\infty} (p_d + q_d) = S + T.$$

(3) Dengan cara yang sama, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\sum_{d=1}^n (p_d - q_d) = \sum_{d=1}^n p_d - \sum_{d=1}^n q_d = S_n - T_n.$$

Mengambil limit ketika $n \rightarrow \infty$ diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{d=1}^n (p_d - q_d) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - T_n) = S - T.$$

Dengan demikian,

$$\sum_{d=1}^{\infty} (p_d - q_d) = S - T.$$

Definisi 2.5.2 Deret tak hingga

$$\sum_{d=1}^{\infty} p_d$$

dikatakan konvergen apabila barisan jumlah parsial

$$(S_n), \quad \text{dengan } S_n = \sum_{d=1}^n p_d,$$

merupakan barisan yang konvergen.

Sebaliknya, deret tak hingga

$$\sum_{d=1}^{\infty} p_d$$

dikatakan divergen apabila barisan jumlah parsial (S_n) merupakan barisan yang divergen (Wahyuningsih dkk., 2022).

Contoh 2.5.1 Diberikan deret

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d(d+1)}.$$

Deret tersebut konvergen karena barisan jumlah parsial S_n konvergen. Karena

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1,$$

maka deret

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d(d+1)}$$

konvergen ke 1, atau dapat ditulis

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d(d+1)} = 1.$$

Definisi 2.5.3 Deret tak hingga

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^p},$$

dengan $p \in \mathbb{R}$, disebut *deret- p* . Deret ini konvergen jika dan hanya jika $p > 1$, dan divergen jika $p \leq 1$ (Bartle dan Sherbert, 2000).

Definisi 2.5.4 Deret

$$\sum_{d=0}^{\infty} kr^d$$

disebut deret geometri, dengan k sebagai suku pertama dan r sebagai rasio. Deret ini konvergen jika dan hanya jika $|r| < 1$, dan dalam hal ini berlaku

$$\sum_{d=0}^{\infty} kr^d = \frac{k}{1-r}$$

(Purcell dkk., 2007).

Contoh 2.5.2 Diberikan deret geometri

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{2^d}.$$

Deret tersebut dapat ditulis ulang sebagai

$$\sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^d.$$

Karena $|r| = \frac{1}{2} < 1$, maka deret tersebut konvergen dan

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{2^d} = 1.$$

Teorema 2.5.2 Jika deret

$$\sum_{d=1}^{\infty} |p_d|$$

konvergen, maka deret

$$\sum_{d=1}^{\infty} p_d$$

juga konvergen (Bartle dan Sherbert, 2000).

Bukti Misalkan deret

$$\sum_{d=1}^{\infty} |p_d|$$

konvergen. Berdasarkan definisi konvergensi deret, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m > n \geq N$ berlaku

$$\sum_{d=n+1}^m |p_d| < \varepsilon.$$

Untuk setiap $m > n \geq N$, dengan menggunakan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$\left| \sum_{d=n+1}^m p_d \right| \leq \sum_{d=n+1}^m |p_d| < \varepsilon.$$

Hal ini menunjukkan bahwa barisan jumlah parsial

$$S_n = \sum_{d=1}^n p_d$$

merupakan barisan Cauchy. Karena $\mathbb{R}$ adalah ruang lengkap, maka barisan (S_n) konvergen. Dengan demikian, deret $\sum_{d=1}^{\infty} p_d$ konvergen.

Konsep konvergensi mutlak ini menjadi dasar dalam pendefinisian ruang ℓ_1 , yaitu ruang barisan yang jumlah nilai mutlak suku-sukunya konvergen.

Contoh 2.5.3 Diberikan deret

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{(-1)^d}{d^2}.$$

Karena

$$\sum_{d=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^d}{d^2} \right| = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2}$$

merupakan deret yang konvergen, maka deret

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{(-1)^d}{d^2}$$

konvergen secara mutlak.

Teorema 2.5.3 Misalkan deret

$$\sum_{d=1}^{\infty} p_d$$

merupakan deret dengan suku-suku positif dan berlaku

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{p_{d+1}}{p_d} = \rho.$$

Maka berlaku:

- (1) Jika $\rho < 1$, maka deret $\sum_{d=1}^{\infty} p_d$ konvergen.
- (2) Jika $\rho > 1$, maka deret $\sum_{d=1}^{\infty} p_d$ divergen.
- (3) Jika $\rho = 1$, maka uji rasio tidak dapat digunakan untuk menentukan konvergensi atau divergensi deret.

(Wahyuningsih dkk., 2022).

Bukti Misalkan $p_d > 0$ untuk setiap $d \in \mathbb{N}$ dan

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{p_{d+1}}{p_d} = \rho.$$

(1) Kasus $\rho < 1$.

Ambil $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga

$$\rho + \varepsilon < 1.$$

Berdasarkan definisi limit, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $d \geq N$ berlaku

$$\frac{p_{d+1}}{p_d} < \rho + \varepsilon.$$

Akibatnya,

$$p_{d+1} < (\rho + \varepsilon)p_d.$$

Dengan menggunakan ketaksamaan tersebut secara berulang, diperoleh

$$p_{N+k} < p_N(\rho + \varepsilon)^k \quad \text{untuk setiap } k \in \mathbb{N}.$$

Perhatikan bahwa deret geometri

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_N(\rho + \varepsilon)^k$$

konvergen karena $\rho + \varepsilon < 1$. Dengan menggunakan uji perbandingan, maka deret

$$\sum_{d=1}^{\infty} p_d$$

juga konvergen.

(2) Kasus $\rho > 1$.

Ambil $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga

$$\rho - \varepsilon > 1.$$

Berdasarkan definisi limit, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $d \geq N$ berlaku

$$\frac{p_{d+1}}{p_d} > \rho - \varepsilon > 1.$$

Akibatnya,

$$p_{d+1} > (\rho - \varepsilon)p_d.$$

Dengan demikian, barisan (p_d) tidak menuju nol. Karena syarat perlu konvergensi deret adalah

$$\lim_{d \rightarrow \infty} p_d = 0,$$

maka deret

$$\sum_{d=1}^{\infty} p_d$$

bersifat divergen.

(3) Kasus $\rho = 1$.

Dalam hal ini, uji rasio tidak memberikan kesimpulan. Sebagai contoh, deret

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d} \quad \text{dan} \quad \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2}$$

keduanya memenuhi

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{p_{d+1}}{p_d} = 1,$$

namun deret pertama divergen dan deret kedua konvergen. Oleh karena itu, uji rasio tidak dapat digunakan pada kasus ini.

2.6 Ruang Bernorm dan Ruang Banach

Untuk memperluas analisis dari bilangan real ke struktur yang lebih umum, diperlukan konsep ruang bernorm dan ruang Banach. Kedua ruang ini memungkinkan pembahasan limit, kekontinuan, dan turunan dilakukan di luar $\mathbb{R}$ (Haryadi dkk., 2024). Berikut disajikan definisi dan teorema dasar terkait.

Definisi 2.6.1 Misalkan P merupakan suatu ruang vektor atas $\mathbb{R}$. Norm pada P adalah suatu fungsi $\|\cdot\| : P \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\|p\| \geq 0$ dan $\|p\| = 0$ jika dan hanya jika $p = 0$, untuk setiap $p \in P$;
2. $\|\alpha p\| = |\alpha| \|p\|$, untuk setiap $p \in P$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $\|p + q\| \leq \|p\| + \|q\|$, untuk setiap $p, q \in P$.

Pasangan $(P, \|\cdot\|)$ disebut ruang norm (Muhtar, 2010).

Definisi 2.6.2 Misalkan $(P, \|\cdot\|)$ merupakan ruang norm. Ruang P dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy (p_d) di dalam P konvergen ke suatu elemen $p \in P$. Ruang norm yang lengkap disebut ruang Banach (Kreyzig, 1989).

Definisi 2.6.3 Ruang Banach adalah suatu ruang vektor bernorm $(P, \|\cdot\|)$ yang lengkap. Sifat kelengkapan berarti bahwa setiap barisan Cauchy (p_d) di dalam P bersifat konvergen, yaitu apabila

$$\|p_d - p_c\| \rightarrow 0 \quad (d, c \rightarrow \infty), \quad p_d \in P,$$

maka terdapat $p \in P$ sehingga

$$\|p_d - p\| \rightarrow 0 \quad (d \rightarrow \infty).$$

(Rohmah dkk., 2012)

Teorema 2.6.1 Ruang ℓ_1 dengan norm

$$\|p\|_1 = \sum_{d=1}^{\infty} |p_d|$$

merupakan ruang Banach. (Kolmogorov dan Fomin, 1999)

Bukti Misalkan $(p^{(d)})$ adalah barisan Cauchy dalam ℓ_1 . Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk semua $c, d \geq N$ berlaku

$$\|p^{(c)} - p^{(d)}\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |p_j^{(c)} - p_j^{(d)}| < \varepsilon.$$

Untuk setiap $j \in \mathbb{N}$, barisan $(p_j^{(d)})$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ lengkap, maka terdapat $p_j \in \mathbb{R}$ sehingga

$$p_j^{(d)} \rightarrow p_j \quad (d \rightarrow \infty).$$

Dengan demikian diperoleh barisan $p = (p_j)$. Dapat ditunjukkan bahwa $p \in \ell_1$ dan

$$\|p^{(d)} - p\|_1 \rightarrow 0 \quad (d \rightarrow \infty).$$

Oleh karena itu, ruang ℓ_1 lengkap dan merupakan ruang Banach.

2.7 Ruang Barisan ℓ_1

Salah satu contoh ruang Banach yang penting adalah ruang barisan ℓ_1 . Ruang ini banyak digunakan dalam analisis fungsional karena memiliki sifat kelengkapan dan dapat digunakan untuk mendefinisikan fungsi bernilai barisan (Utami dkk., 2022). Berikut diberikan penjelasan mengenai definisi ruang barisan ℓ_1 .

Definisi 2.7.1 Misalkan ω menyatakan himpunan semua barisan bilangan real, yaitu

$$\omega = \{p = (p_d) ; p_d \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{N}\}.$$

Ruang ℓ_1 didefinisikan sebagai subruang dari ω yang terdiri atas semua barisan bilangan real $p = (p_d)$ sedemikian sehingga

$$\sum_{d=1}^{\infty} |p_d| < \infty.$$

Secara matematis,

$$\ell_1 = \left\{ p = (p_d) \in \omega : \sum_{d=1}^{\infty} |p_d| < \infty \right\}.$$

Ruang ℓ_1 dilengkapi dengan norma satu (norma ℓ_1) yang didefinisikan oleh

$$\|p\|_1 = \sum_{d=1}^{\infty} |p_d|,$$

untuk setiap $p = (p_d) \in \ell_1$ (Darmawijaya, 2007).

Contoh 2.7.1 Diketahui barisan

$$p = \left(\frac{1}{2^d} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \right).$$

Akan ditunjukkan bahwa $p \in \ell_1$.

Menurut definisi ruang ℓ_1 , barisan $p = (p_d)$ merupakan anggota ℓ_1 jika

$$\sum_{d=1}^{\infty} |p_d| < \infty.$$

Untuk barisan yang diberikan,

$$|p_d| = \frac{1}{2^d}.$$

Sehingga

$$\sum_{d=1}^{\infty} |p_d| = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{2^d}.$$

Deret tersebut merupakan deret geometri dengan suku pertama $\frac{1}{2}$ dan rasio $\frac{1}{2}$, sehingga

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{2^d} = 1.$$

Karena jumlah deret tersebut hingga, maka

$$p \in \ell_1.$$

Definisi 2.7.2 Ruang ℓ_1 merupakan ruang linear yang terdiri atas barisan bilangan real $p = (p_d)$ yang memenuhi

$$\sum_{d=1}^{\infty} |p_d| < \infty.$$

Ruang ℓ_1 dilengkapi dengan norma satu (norma ℓ_1) yang didefinisikan oleh

$$\|p\|_1 = \sum_{d=1}^{\infty} |p_d|,$$

untuk setiap $p = (p_d) \in \ell_1$ (Handayani, 2013).

Definisi 2.7.3 Ruang ℓ_1 didefinisikan sebagai himpunan semua barisan bilangan real

$$p = (p_d) = (p_1, p_2, p_3, \dots),$$

yang memenuhi bahwa deret

$$\sum_{d=1}^{\infty} |p_d|$$

bersifat konvergen. Dengan kata lain,

$$\ell_1 = \left\{ p = (p_d) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{d=1}^{\infty} |p_d| < \infty \right\}.$$

Ruang ℓ_1 merupakan ruang norm dengan norma

$$\|\cdot\|_1 : \ell_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

yang didefinisikan oleh

$$\|p\|_1 = \sum_{d=1}^{\infty} |p_d|,$$

untuk setiap $p = (p_d) \in \ell_1$ (Alsina dkk., 2010).

2.8 Fungsi Bernilai Barisan

Setelah memahami konsep ruang ℓ_1 , pembahasan dapat dilanjutkan pada fungsi bernilai barisan. Fungsi jenis ini memetakan bilangan real ke dalam barisan yang elemen-elemennya berada di ruang ℓ_1 (Mas'ud, 2024). Berikut diberikan penjelasan mengenai definisi fungsi bernilai barisan.

Definisi 2.8.1 Misalkan $O \subseteq \mathbb{R}$. Untuk setiap $d \in \mathbb{N}$, diberikan fungsi

$$f_d : O \rightarrow \mathbb{R}.$$

Koleksi fungsi $\langle f_d \rangle$ disebut barisan fungsi yang didefinisikan pada O (Bartle dan Sherbert, 2011).

Definisi 2.8.2 Fungsi bernilai barisan adalah suatu fungsi

$$P : N \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \ell_1,$$

yang untuk setiap $t \in N$ didefinisikan oleh

$$P(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t), \dots).$$

Agar $P(t) \in \ell_1$, harus dipenuhi

$$\sum_{d=1}^{\infty} |p_d(t)| < \infty.$$

Dengan demikian, fungsi P memetakan setiap bilangan real ke suatu barisan yang konvergen secara mutlak di ruang ℓ_1 (Ubaidillah dkk., 2019).

2.9 Teorema Rolle

Sebelum mengkaji teorema Nilai Rata-Rata, perlu terlebih dahulu dipahami Teorema Rolle karena teorema ini merupakan dasar pembentukannya.

Teorema 2.9.1 (Teorema Rolle) Misalkan $f : [k, l] \rightarrow \mathbb{R}$ memenuhi:

1. f kontinu pada interval tertutup $[k, l]$,
2. f terdiferensialkan pada interval terbuka (k, l) ,
3. $f(k) = f(l)$.

Maka terdapat paling sedikit satu $m \in (k, l)$ sedemikian sehingga

$$f'(m) = 0.$$

(Chaudhary dkk., 2023)

Contoh 2.9.1 Akan ditunjukkan bahwa Teorema Rolle berlaku untuk fungsi

$$f(p) = p^2 - 2p - 8$$

pada interval $[-1, 3]$.

1. $f(p)$ kontinu terhadap $[k, l]$:
 $f(p) = p^2 - 2p - 8$ merupakan fungsi polinomial, sehingga kontinu di semua $p \in \mathbb{R}$. Dengan demikian $f(p)$ kontinu pada $[-1, 3]$.

Hitung:

$$f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 8 = -5, \quad f(3) = 3^2 - 2(3) - 8 = -5$$

Karena $f(-1) = f(3)$, maka f kontinu pada $[-1, 3]$.

2. f terdiferensialkan dalam interval terbuka (k, l) :
 Karena $f(p)$ adalah fungsi polinomial, maka berdasarkan teorema dasar diferensial,

$$\frac{d}{dp}(p^d) = dp^{d-1}, \quad \forall d \in \mathbb{N},$$

setiap fungsi polinomial terdiferensialkan di seluruh $\mathbb{R}$. Turunan dari $f(p)$ adalah:

$$f'(p) = 2p - 2.$$

Turunan ini terdefinisi untuk semua $p \in \mathbb{R}$, sehingga $f(p)$ terdiferensialkan pada $(-1, 3)$.

3. $f(k) = f(l)$:

$$f(-1) = f(3) = -5$$

Maka $f(k) = f(l)$ (terbukti).

4. Cari m sehingga $f'(m) = 0$:

Dari hasil turunan:

$$f'(p) = 2p - 2.$$

Agar $f'(m) = 0$, maka:

$$2m - 2 = 0 \Rightarrow m = 1.$$

Karena $1 \in (-1, 3)$, maka terdapat $m = 1$ yang memenuhi $f'(m) = 0$.

Dengan demikian, teorema Rolle terbukti benar untuk fungsi $f(p) = p^2 - 2p - 8$ pada interval $[-1, 3]$.

2.10 Teorema Nilai Rata-rata (TNR)

Teorema Nilai Rata-Rata (TNR) merupakan generalisasi dari Teorema Rolle yang menjelaskan keterkaitan antara nilai fungsi dan turunannya pada interval tertentu.

Definisi 2.10.1 Misalkan $V \subseteq \mathbb{R}$ dan $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan memiliki maksimum relatif di titik $m \in V$ apabila terdapat $\delta > 0$ sehingga

$$f(p) \leq f(m), \quad \forall p \in V \cap V_\delta(m),$$

dengan $V_\delta(m)$ menyatakan lingkungan terbuka berjari-jari δ di sekitar titik m .

Sebaliknya, fungsi f dikatakan memiliki minimum relatif di titik $m \in V$ apabila

terdapat $\delta > 0$ sehingga

$$f(p) \geq f(m), \quad \forall p \in V \cap V_\delta(m).$$

Apabila fungsi f memiliki maksimum relatif atau minimum relatif di titik $m \in V$, maka f dikatakan memiliki nilai ekstrem relatif di titik tersebut (Bartle dan Sherbert, 2000).

Teorema 2.10.1 Jika suatu fungsi kontinu riil f berada pada suatu daerah $[k, l]$, dan terdiferensialkan pada (k, l) , maka terdapat suatu titik $m \in (k, l)$ sehingga

$$f'(m) = \frac{f(l) - f(k)}{l - k}.$$

(Wu, 2023).

Bukti : Misalkan fungsi garis lurus yang melalui dua titik $(k, f(k))$ dan $(l, f(l))$ didefinisikan oleh

$$g(p) = f(k) + \frac{f(l) - f(k)}{l - k}(p - k).$$

Fungsi $g(p)$ merupakan persamaan garis yang menghubungkan kedua titik ujung grafik fungsi $f(p)$ pada interval $[k, l]$.

Selanjutnya, definisikan fungsi baru $u(p)$ sebagai

$$u(p) = f(p) - g(p).$$

Karena $f(p)$ dan $g(p)$ keduanya kontinu pada $[k, l]$ dan terdiferensialkan pada (k, l) , maka $h(p)$ juga kontinu pada $[k, l]$ dan terdiferensialkan pada (k, l) .

Hitung nilai $h(p)$ di titik ujung interval:

$$h(k) = f(k) - g(k).$$

Dengan mensubstitusikan $p = k$ ke dalam $g(p)$, diperoleh:

$$g(k) = f(k) + \frac{f(l) - f(k)}{l - k}(k - k) = f(k) + 0 = f(k).$$

Sehingga:

$$h(k) = f(k) - g(k) = f(k) - f(k) = 0.$$

Dengan cara yang sama,

$$h(l) = f(l) - g(l),$$

dan karena

$$g(l) = f(k) + \frac{f(l) - f(k)}{l - k}(l - k) = f(k) + (f(l) - f(k)) = f(l),$$

maka diperoleh:

$$h(l) = f(l) - g(l) = f(l) - f(l) = 0.$$

Jadi, $h(k) = h(l) = 0$.

Karena $h(p)$ memenuhi ketiga syarat Teorema Rolle, maka berdasarkan Teorema Rolle terdapat setidaknya satu bilangan $m \in (k, l)$ sehingga $h'(m) = 0$.

Turunkan fungsi $h(p)$:

$$h'(p) = f'(p) - g'(p).$$

Turunan dari fungsi $g(p)$ adalah konstanta:

$$g'(p) = \frac{f(l) - f(k)}{l - k}.$$

Substitusikan ke dalam persamaan sebelumnya, maka:

$$0 = h'(m) = f'(m) - \frac{f(l) - f(k)}{l - k}.$$

Sehingga diperoleh:

$$f'(m) = \frac{f(l) - f(k)}{l - k}.$$

Jadi, terdapat sekurang-kurangnya satu titik $m \in (l, k)$ yang memenuhi hubungan tersebut. Dengan demikian, Teorema Nilai Rata-rata terbukti benar.

Contoh 2.10.1 Buktikan menggunakan TNR untuk menentukan nilai p sehingga fungsi $f(p) = 2\sqrt{2p}$ pada interval $[2, 8]$.

Diketahui:

$$f'(p) = \frac{f(l) - f(k)}{l - k}.$$

Sehingga turunan bentuk pertama dari $f(p)$:

$$f'(p) = 2 \cdot \frac{1}{2}(2p)^{-1/2} \cdot 2 = 2p^{-1/2}.$$

Substitusikan ke dalam persamaan:

$$2p^{-1/2} = \frac{f(8) - f(2)}{8 - 2}.$$

Hitung nilai fungsi:

$$f(8) = 2\sqrt{16} = 8, \quad f(2) = 2\sqrt{4} = 4.$$

Maka:

$$2p^{-1/2} = \frac{8 - 4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Sehingga:

$$\frac{2}{\sqrt{2p}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{2p} = 3 \Rightarrow 2p = 9 \Rightarrow p = \frac{9}{2}.$$

Dengan demikian, nilai p yang memenuhi teorema nilai rata-rata adalah $p = \frac{9}{2}$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Tahapan penelitian dalam penelitian adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari konsep dasar limit dan kekontinuan pada fungsi real dan barisan.
2. Memahami konsep fungsi bernilai barisan dalam ruang ℓ_1 .
3. Menelaah literatur mengenai teorema Rolle dan teorema Nilai Rata-rata pada fungsi bernilai barisan di ruang Banach ℓ_1 .
4. Mengonstruksi definisi dan membuktikan teorema Rolle dan teorema Nilai Rata-rata pada fungsi bernilai barisan di ruang ℓ_1 .
5. Menganalisis sifat-sifat dasar hasil pembuktian kedua teorema tersebut dalam norma $\|\cdot\|_1$.
6. Membuat kesimpulan dan menyusun implikasi hasil penelitian terhadap pengembangan analisis fungsional dan ruang ℓ_p dengan $p > 1$.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dan pembuktian yang telah dilakukan pada bab sebelumnya mengenai Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-Rata pada fungsi bernilai barisan di ruang ℓ_1 , maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Fungsi bernilai barisan pada ruang Banach ℓ_1 didefinisikan sebagai fungsi

$$f : N \subset \mathbb{R} \rightarrow \ell_1, \quad f(u) = (p_1(u), p_2(u), p_3(u), \dots),$$

dengan syarat

$$\sum_{d=1}^{\infty} |p_d(u)| < \infty \quad \text{untuk setiap } u \in N.$$

Dengan norma

$$\|f(u)\|_1 = \sum_{d=1}^{\infty} |p_d(u)|,$$

konsep limit dan kekontinuan fungsi bernilai barisan dapat dirumuskan secara konsisten dalam ruang ℓ_1 .

2. Fungsi bernilai barisan $f : N \rightarrow \ell_1$ dikatakan kontinu di suatu titik $u_0 \in N$ apabila

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \|f(u) - f(u_0)\|_1 = 0.$$

Kekontinuan fungsi bernilai barisan berkaitan erat dengan kekontinuan fungsi-fungsi komponennya serta konvergensi deret yang dibentuk oleh selisih nilai komponen fungsi tersebut.

3. Fungsi bernilai barisan $f : N \rightarrow \ell_1$ dikatakan terdiferensialkan di $u_0 \in N$ apabila limit

$$f'(u_0) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + w) - f(u_0)}{w}$$

ada dalam norma $\|\cdot\|_1$, dengan

$$f'(u_0) = (p'_1(u_0), p'_2(u_0), p'_3(u_0), \dots)$$

dan memenuhi

$$\sum_{d=1}^{\infty} |p'_d(u_0)| < \infty.$$

Selain itu, keterdiferensialan fungsi bernilai barisan di suatu titik, yang didefinisikan secara komponen demi komponen dan konvergen dalam norma $\|\cdot\|_1$, menjamin bahwa fungsi tersebut kontinu di titik yang sama.

4. Teorema Rolle dapat diterapkan pada fungsi bernilai barisan di ruang ℓ_1 melalui pendekatan komponen demi komponen. Jika fungsi

$$f : [k, l] \rightarrow \ell_1$$

kontinu pada interval tertutup $[k, l]$, terdiferensialkan pada interval terbuka (k, l) , dan memenuhi

$$f(k) = f(l),$$

maka untuk setiap komponen $p_d(u)$ terdapat suatu titik $m_d \in (k, l)$ sehingga

$$p'_d(m_d) = 0.$$

Dengan demikian, Teorema Rolle berlaku pada fungsi bernilai barisan dalam pengertian komponen demi komponen di ruang ℓ_1 , di mana titik $m_d \in (k, l)$ pada masing-masing komponen tidak harus sama untuk setiap indeks d .

5. Teorema Nilai Rata-rata dapat diperluas pada fungsi bernilai barisan di ruang ℓ_1 dalam pengertian komponen demi komponen. Jika

$$f : [k, l] \rightarrow \ell_1$$

kontinu pada $[k, l]$ dan terdiferensialkan pada (k, l) , maka untuk setiap

komponen $p_d(u)$ terdapat suatu titik $m_d \in (k, l)$ sedemikian sehingga

$$p'_d(m_d) = \frac{p_d(l) - p_d(k)}{l - k}.$$

Hasil ini menunjukkan bahwa Teorema Nilai Rata-rata berlaku pada fungsi bernilai barisan di ruang ℓ_1 secara komponen demi komponen, dengan titik $m_d \in (k, l)$ yang bergantung pada masing-masing komponen fungsi.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian dan kesimpulan yang telah diperoleh, penulis menyampaikan beberapa saran sebagai berikut:

1. Penelitian ini terbatas pada fungsi bernilai barisan dengan kodomain ruang Banach ℓ_1 serta menggunakan pendekatan komponen demi komponen dalam pembuktian teorema. Pada penelitian selanjutnya disarankan untuk dapat membahas fungsi bernilai barisan pada ruang ℓ_p , $p \geq 1$, dengan tetap memperhatikan karakteristik masing-masing ruang dan tanpa langsung menggeneralisasi hasil yang diperoleh pada ruang ℓ_1 .
2. Dalam penelitian ini, Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-Rata dibuktikan berdasarkan keberlakuannya pada setiap komponen fungsi. Penelitian lanjutan dapat mengkaji pendekatan lain, seperti penggunaan konsep turunan Fréchet atau Gateaux pada ruang Banach, dengan tetap memperhatikan syarat-syarat yang diperlukan agar hasil yang diperoleh tetap sah secara matematis.
3. Penelitian selanjutnya juga dapat diarahkan pada pengkajian kondisi-kondisi yang diperlukan agar suatu fungsi bernilai barisan memenuhi sifat kekontinuan dan keterdiferensialan, khususnya dengan meninjau kemungkinan pelemahan syarat yang digunakan dalam penelitian ini tanpa menghilangkan keberlakuan hasil utama.
4. Penulis menyadari bahwa hasil penelitian ini masih memiliki keterbatasan pada kerangka teoretis tertentu. Dengan demikian, penelitian ini diharapkan dapat dimanfaatkan sebagai referensi awal bagi pengembangan kajian analisis fungsional selanjutnya, khususnya terkait perluasan teorema-teorema diferensial klasik pada fungsi bernilai barisan.

DAFTAR PUSTAKA

- Alsina, C., Sikorska, J., & Tomas, M.S. (2010). *Norm Derivatives and Characterizations Of Inner Product Space*. World Scientific, Singapore.
- Amir, M.F., & Prasajo, B.H. (2017). *Buku Ajar Matematika Dasar*. UMSIDA Press, Jawa Timur.
- Bartle, G.R., & Sherbert, R.D. (2000). *The Elements of Real Analysis* (2nd ed.). Wiley International Edition.
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to Real Analysis* (4th ed.). John Wiley & Sons.
- Chaudhary, P.R., Panthi, D., & Bhatta, C.R. (2023). Rolle's Theorem and its application in Tharu's traditional house. *International Journal of Physics and Mathematics*, 5(2), 13–17.
- Daners, D. (2012). *A short elementary proof of $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$* . The University of Sydney.
- Darmawijaya, S. (2007). *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.
- Derwantoro., Dinata, K.B., & Junaidi. (2020). *Teori Himpunan*. Universitas Muhammadiyah Kotabumi, Lampung Utara.
- Fiorenza, A., & Fiorenza, M. (2024). On Generalizations of Classical Mean Value Theorems in Banach Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 529(1), 127456. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127456>.
- Fitriani, & Faisol, A. (2022). *Grup* (1st ed.). CV. Graha Ilmu.
- Gunawan, H. (2011). *Analisis Real*. Bandung: FMIPA-ITB.
- Handayani, F. A. (2013). *Barisan pada Ruang Norm-2*. Universitas Negeri Maulana Malik Ibrahim.

- Haryadi, H., Aziz, A., & Agustina, D. (2024). Beberapa sifat ruang barisan yang terdefinisi oleh fungsi Orlicz komplementer. *PRISMA: Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 7, 276–285. Universitas Negeri Semarang. <https://proceeding.unnes.ac.id/prisma/article/view/2954>.
- Hidayat, A., & Sari, P. D. (2023). Penerapan konsep turunan dalam analisis fungsi dan optimasi. *Jurnal Analisis Matematika*, 7(1), 55–67.
- Kreyzig, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classic Library, New York.
- Koceic-Bilan, N., & Mirosvic, I. (2023). The Mean Value Theorem in the Context of Generalized Approach to Differentiability. *Mathematics*, 11, 4249. <https://doi.org/10.3390/math11204294>.
- Kolmogorov, A. N., & Fomin, S. V. (1999). *Introductory Real Analysis*. Dover Publications.
- Malik, R., & Bakhri, S. (2023). *Kalkulus 1*. Yayasan Pendidikan Cendekia Muslim, Sumatera Barat.
- Martínez-Legaz, J. E. (2023). A mean value theorem for tangentially convex functions. *Set-Valued and Variational Analysis*, 31, 867–884. <https://doi.org/10.1007/s11228-023-00674-3>.
- Mas'ud, S. (2024). Catatan terhadap turunan fungsi bernilai real pada ruang metrik diskrit. *Jurnal Derivat*, 11(1), 27–34.
- Mizrahi, A., & Sullivan, M. (1982). *Calculus and Analytic Geometry*. Wadsworth Publishing Company, Belmont, California.
- Muhtar, G.S. (2010). *Pengantar Analisis Fungsional*. Bandung: UPI.
- Parzynski, W.R., & Philip, W.Z. (1982). *Introduction to Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, Tokyo.
- Purcell, E.J., Verberg, D., & Rigdon, S. E. (2007). *Kalkulus Jilid 1 Edisi Kesembilan*. Erlangga, Jakarta.
- Purcell, E.J., & Varberg, D. (1987). *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2 Edisi Kelima*. Erlangga, Jakarta.

- Rafiqi, R., & Prasetyo, A. (2023). Pengantar analisis real dan penerapannya dalam kalkulus lanjut. *Jurnal Matematika dan Pembelajaran (JMP)*, 12(1), 15–27.
- Rohmah, N., Ansori, M., & Amanto. (2012). Transformasi Matriks pada Ruang Barisan ℓ^p . *Prosiding Seminar Hasil Penelitian Sains*, 48–53. Universitas Lampung.
- Rumlawang, F.Y. (2020). Fixed Point Theorem in 2-Normed Spaces. *Pure and Applied Mathematics Journal*, 41–46.
- Susanti, D., & Ramadhan, F. (2022). Konsep limit dan kekontinuan pada fungsi real dalam perspektif analisis modern. *Jurnal Pendidikan dan Matematika*, 9(3), 201–210
- Suzila., Zulfah., Astuti., & Ediputra, K. (2024). Menentukan Nilai Rata-rata Menggunakan Teorema Rolle. *Cendekia: Jurnal Ilmiah Multidisiplin*, 1(1), 1–4.
- Toheri. (2016). *Kalkulus Turunan*. Eduvision, Jawa Barat.
- Ubaidillah, M., Fitria, N., & Ramadhan, R. (2019). Analisis fungsi bernilai vektor dalam ruang normed. *Jurnal Kajian Matematika*, 5(1), 45–54.
- Utami, H., Rahman, H., & Ismiarti, D. (2022). Ruang ℓ^p pada norm-2 lengkap. *Jurnal Riset Matematika dan Matematika Terapan*, 1(2), 33–42
- Wahyuningsih, S., Susiswo, Soemartojo, M. Sasy, & Soemartojo, N. *Kalkulus 2 : 1-9 / PEMA4218 / 3 SKS*. Tangerang Selatan: Universitas Terbuka.
- Wu, S. (2023). Proof and Application of the Mean Value Theorem. *Highlights in Science, Engineering and Technology*, 72, 565–571.