

DERIVATIF FUNGSI-FUNGSI BERNILAI BARISAN l_2

(Skripsi)

Oleh :

ADELIA ASSIVA



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2025**

ABSTRAK

DERIVATIF FUNGSI-FUNGSI BERNILAI BARISAN l_2

Oleh

ADELIA ASSIVA

Ruang l_2 merupakan himpunan semua barisan bilangan real (atau kompleks) yang kuadratnya dapat dijumlahkan hingga konvergen. Dalam konteks ini, fungsi $f: R \rightarrow l_2$ dikaji dari segi keberadaan dan sifat-sifat turunannya. Definisi turunan yang digunakan mengikuti pendekatan limit. Hasil utama menunjukkan bahwa jika setiap komponen fungsi $f_n(x)$ terdiferensialkan dan norma dari turunan komponen-komponen tersebut membentuk barisan kuadrat-terjumlah, maka fungsi-fungsi terdiferensialkan dalam l_2 . Selain itu, membahas keterhubungan antara keteraturan fungsi, kekontinuan norma, dan kelengkapan ruang l_2 . Studi ini memberikan dasar teoretis penting dalam analisis fungsional, khususnya untuk aplikasi pada persamaan diferensial dalam ruang barisan.

Kata Kunci : Derivatif, fungsi, barisan l_2 , norma.

ABSTRACT

DERIVATIVE FUNCTION ON l_2 VALUED SEQUENCE

By

ADELIA ASSSIVA

The l_2 space is the set of all sequences of real (or complex) numbers whose squares can be summed up to convergence. In this context, the function $f: R \rightarrow l_2$ is studied in terms of the existence and properties of its derivatives. The definition of the derivative follows the limit approach. The main result shows that if each component of the function $f_n(x)$ is differentiable and the norms of the derivatives of these components form a sum-square sequence, then the functions are differentiable in l_2 . In addition, the relationship between the regularity of the function, the continuity of the norm, and the completeness of the l_2 space is demonstrated. This study provides an important theoretical foundation in functional analysis, especially for applications to differential equations in sequence spaces.

Keywords : Derivative, function, l_2 sequence, norm.

DERIVATIF FUNGSI-FUNGSI BERNILAI BARISAN l_2

Oleh :

ADELIA ASSIVA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2025

Judul Skripsi

: **DERIVATIF FUNGSI-FUNGSI BERNILAI
BARISAN $\frac{1}{2}$**

Nama Mahasiswa

: **Adelia Assiva**

Nomor Pokok Mahasiswa

: **2117031026**

Program Studi

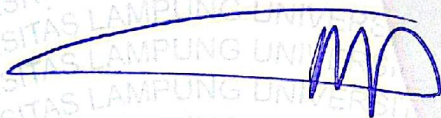
: **Matematika**

Fakultas

: **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

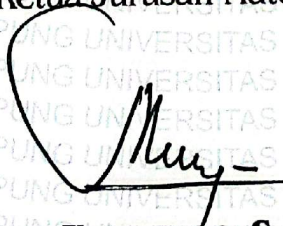


Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.
NIP 19720227 199802 1 001



Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.
NIP 19930601 201903 2 021

2. Ketua Jurusan Matematika



Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua

: **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**

Sekretaris

: **Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.**

Penguji

Bukan Pembimbing

: **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.

NIP 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : 11 November 2025

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Adelia Assiva**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2117031026**

Jurusan : **Matematika**

Judul Skripsi : **Derivatif Fungsi-Fungsi Bernilai Barisan $\frac{1}{2}$**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 11 November 2025

Penulis,



Adelia Assiva

PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Adelia Assiva, dilahirkan pada tanggal 29 Maret 2003 di Bandar Lampung, sebagai putri dari pasangan Elis Kusniawati dan Anto Susanto. Penulis menempuh pendidikan formal pertama kali di Taman Kanak-kanak Al-Zikri pada tahun 2008, kemudian melanjutkan pendidikan di SD Negeri 1 Palapa Bandar Lampung dan lulus pada tahun 2014. Pendidikan Sekolah Menengah Pertama ditempuh di SMP Negeri 25 Bandar Lampung dan diselesaikan pada tahun 2017. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 3 Bandar Lampung dan lulus pada tahun 2021.

Pada tahun 2021, penulis terdaftar sebagai mahasiswi Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN. Pada bulan Juli sampai Agustus tahun 2024, penulis melaksanakan Praktik Kerja Lapangan (PKL) di Dinas Komunikasi dan Informatika Kota Bandar Lampung. Selanjutnya, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kelurahan Tanjung Raya pada bulan Juli-Agustus tahun 2025.

KATA INSPIRASI

”Kedamaian bukanlah sesuatu yang anda inginkan; kedamaian adalah sesuatu yang anda buat, sesuatu yang anda lakukan, sesuatu yang anda miliki, dan sesuatu yang anda berikan.”

(John Lennon)

”Boleh jadi kamu membenci sesuatu, padahal ia amat baik bagimu, dan boleh jadi (pula) kamu menyukai sesuatu, padahal ia amat buruk bagimu. Allah mengetahui, sedang kamu tidak mengetahui.”

(QS Al Baqarah 216)

”Memahami diri sendiri adalah awal dari semua kebijaksanaan.”

(Aristoteles)

”Tidak ada mimpi yang gagal, yang ada hanyalah mimpi yang tertunda.”

(Windah Basudara)

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Derivatif Fungsi - Fungsi Bernilai Barisan l_2 " dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing akademik dan Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Arabella, Sifa, Caca, dan Farhan selaku teman yang selalu menemani dan mendukung penulis dalam mengerjakan skripsi.

6. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 11 November 2025



Adelia Assiva

DAFTAR ISI

	Halaman
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah.....	1
1.2 Tujuan Penelitian.....	2
1.3 Manfaat Penelitian	2
II TINJAUAN PUSTAKA	3
2.1 Fungsi dan Limit.....	3
2.2 Derivatif	8
2.3 Barisan.....	12
2.4 Ruang Barisan	15
2.5 Ruang Vektor.....	16
2.6 Ruang Bernorm	20
III METODE PENELITIAN.....	22
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian.....	22
3.2 Metode Penelitian	22
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	23
4.1 Fungsi Pada Barisan.....	23
4.2 Limit Barisan l_2	24
4.3 Barisan Fungsi l_2	25
4.4 Derivatif Fungsi-Fungsi Bernilai Barisan l_2	27
4.5 Sifat-Sifat Derivatif Barisan l_2	28
4.6 Maksimum dan Minimum Fungsi Barisan l_2	40
V KESIMPULAN DAN SARAN.....	43
5.1 Kesimpulan.....	43
5.2 Saran.....	44
DAFTAR PUSTAKA	45

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Kalkulus diferensial adalah salah satu cabang dari kalkulus yang berkaitan dengan studi tentang laju perubahan suatu kuantitas. Objek utama yang dipelajari dalam kalkulus diferensial adalah derivatif, konsep-konsep terkait seperti diferensial, dan penerapannya. Derivatif suatu fungsi pada nilai input yang dipilih menggambarkan laju perubahan fungsi di sekitar nilai input tersebut. Proses untuk menemukan turunan disebut diferensiasi. Untuk fungsi bernilai riil dari satu variabel riil, derivatif suatu fungsi pada suatu titik umumnya menentukan pendekatan linear terbaik untuk fungsi tersebut di titik itu (Atangana, 2015).

Dalam perkembangannya, Isaac Newton (1643–1727) dan Gottfried Leibniz (1646–1716) memberikan pendekatan terpadu terhadap diferensiasi dan derivatif. Untuk ide-ide mereka tentang derivatif, baik Newton maupun Leibniz membangun dari karya-karya sebelumnya oleh matematikawan seperti Isaac Barrow (1630–1677), René Descartes (1596–1650), Christian Huygens (1629–1695), dan lainnya. Isaac Barrow umumnya dianggap sebagai pengembang awal turunan. Meskipun demikian, Newton dan Leibniz tetap menjadi tokoh kunci dalam sejarah diferensiasi, karena Newton adalah yang pertama menerapkan diferensiasi dalam fisika teoretis, sementara Leibniz secara sistematis mengembangkan banyak notasi yang masih digunakan hingga saat ini (Atangana, 2015).

Derivatif adalah konsep fundamental kalkulus yang mengukur laju perubahan suatu fungsi dengan aplikasi luas seperti di bidang fisika, ekonomi, teknik, dan ilmu komputer. Menurut Strang & Herman (2016), derivatif memberikan turunan dari suatu fungsi pada setiap titik dalam domain fungsi asli yang

turunannya didefinisikan, misalkan f adalah sebuah fungsi. Turunan dari f , yang dilambangkan sebagai $f'(x)$, adalah sebuah fungsi yang didefinisikan pada semua titik x di mana limit berikut ini ada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Jika $f'(x)$ ada untuk semua x dalam interval terbuka (a, b) maka $f'(x)$ juga dapat diturunkan pada interval tertutup $[a, b]$.

Pada tahun 2012, Naimah melakukan penelitian tentang derivatif, yaitu menganalisis fungsi derivatif ruang bernilai real. Mindarsih (2018) juga menganalisis tentang derivatif norma-norma pada skripsinya. Kemudian, Asyhar (2018) melakukan penelitian tentang derivatif dalam menganalisis keuntungan maksimum. Namun, sampai saat ini belum ada peneliti yang mengkaji tentang derivatif fungsi bernilai barisan. Berdasarkan latar belakang tersebut, penulis akan melakukan penelitian tentang derivatif fungsi bernilai barisan di l_2 .

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mendefinisikan derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan l_2 .
2. Menyelidiki sifat-sifat dasar derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan l_2 .
3. Mendefinisikan nilai minimal dan maksimal fungsi bernilai barisan l_2 .

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Menambah pengetahuan tentang konsep derivatif suatu fungsi
2. Memahami konsep dan sifat-sifat derivatif dalam fungsi bernilai barisan l_2 .
3. Memberikan informasi tentang nilai maksimal dan minimal dari suatu fungsi bernilai barisan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Fungsi dan Limit

Dalam kalkulus, fungsi adalah himpunan pasangan terurut (x, y) yang nilainya bergantung pada x . Sedangkan limit adalah nilai pendekatan fungsi tertentu. Limit merupakan salah satu pokok bahasan dalam kalkulus.

Definisi 2.1.1 (Bartle & Sherbert, 2000)

Diberikan fungsi $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dan c adalah titik *cluster* dari A . Bilangan $L \in \mathbb{R}$ disebut limit fungsi f di c , jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - c| < \delta$, maka $|f(x) - L| < \varepsilon$. Limit fungsi f dengan nilai L pada definisi di atas dapat dituliskan sebagai $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.

Contoh 2.1.1

Misalkan $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, c adalah titik *cluster* dari A , dan $f(x) = b$ untuk semua $x \in A$. Akan ditunjukkan bahwa

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = b.$$

Jika diambil sembarang $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$, misalkan $\delta = 1$. Maka $0 < |x - c| < \delta$, diperoleh

$$|f(x) - b| = |b - b| = 0 < \varepsilon.$$

Karena $|f(x) - b| < \varepsilon$, maka dari definisi diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = b.$$

Definisi 2.1.2 (Darmawijaya, 2006)

Diketahui $\alpha \in \mathbb{R}$ dan dua fungsi: $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $D_f \cap D_g \neq \emptyset$. Fungsi αf , $f + g$, fg , dan $\frac{f}{g}$ didefinisikan berturut-turut sebagai berikut:

1. $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, untuk setiap $x \in D_f$.
2. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, untuk setiap $x \in D_f \cap D_g$.
3. $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$, untuk setiap $x \in D_f \cap D_g$.
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, untuk setiap $x \in D_f \cap D_g \setminus \{x \in D_g : g(x) = 0\}$.

Contoh 2.1.2

Diberikan fungsi $f : [0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ dengan rumus $f(x) = x^2 + 2x + 2$ dan $g : (1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan rumus $g(x) = x$, maka $f + g$ dan fg berturut-turut mempunyai rumus:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 + 2x + 2) + x = x^2 + 3x + 2$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x^2 + 2x + 2)x = x(x^2 + 2x + 2) = x^3 + 2x^2 + 2x.$$

Dengan:

$$D_{f+g} = D_{fg} = D_f \cap D_g = [0, 2) \cap (1, 3] = (1, 2).$$

Teorema 2.1.1 (Parzynski & Zipse, 1982)

Jika $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ dan $G = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, maka

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + G.$$

Bukti:

Misalkan diambil bilangan $\varepsilon > 0$. Karena $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < |x - a| < \delta_1$, maka

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Karena $G = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, terdapat $\delta_2 > 0$ sedemikian sehingga jika $0 <$

$|x - a| < \delta_2$, maka

$$|g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Misalkan $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Jika $0 < |x - a| < \delta$, maka

$$|(f(x) + g(x)) - (L + G)| = |(f(x) - L) + (g(x) - G)|$$

dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, diperoleh

$$|(f(x) - L) + (g(x) - G)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - G|.$$

Karena $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $|g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2}$, maka

$$|f(x) + g(x) - (L + G)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Sehingga, berdasarkan definisi limit

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + G.$$

Maka Teorema 2.1.1 terbukti. ■

Definisi 2.1.3 (Bartle & Sherbert, 2000)

Diberikan fungsi $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Fungsi f dikatakan mempunyai limit kanan di c , jika terdapat $L \in \mathbb{R}$, sehingga untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ dengan sifat untuk setiap $x \in [a, b)$, $c < x < c + \delta$, berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$ dan dituliskan

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

2. Fungsi f dikatakan mempunyai limit kiri di c , jika terdapat $K \in \mathbb{R}$, sehingga untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ dengan sifat untuk setiap $x \in (a, b]$, $c - \delta < x < c$, berlaku $|f(x) - K| < \varepsilon$ dan dituliskan

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = K$$

Berdasarkan Definisi 2.1.3, jika fungsi f mempunyai limit kanan untuk setiap $x \in [a, b)$, dituliskan $f(c^+) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$. Dan jika fungsi f mempunyai limit kiri untuk setiap $x \in (a, b]$, dituliskan $f(c^-) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$.

Contoh 2.1.3

1. Akan ditentukan $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

Karena limit kiri sama dengan limit kanan, maka

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

2. Akan ditentukan $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1+x}{2} = 2$$

Karena limit kiri $\neq$ limit kanan, maka

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ tidak ada.}$$

Teorema 2.1.2 (Purcell dkk., 2010)

Misalkan f adalah fungsi yang didefinisikan pada suatu interval I yang memuat titik c . Jika $f(c)$ merupakan nilai ekstrem (maksimum atau minimum), maka c harus merupakan titik kritis dari f , yang berarti bahwa c adalah salah satu dari berikut:

1. Titik ujung interval I ,
2. Titik stasioner, yaitu titik di mana turunan pertama $f'(c)$ bernilai nol, atau
3. Titik singular, yaitu titik di mana turunan $f'(c)$ tidak ada.

Bukti:

Misalkan $f(c)$ adalah nilai maksimum dari f pada interval I dan c bukan titik ujung ataupun titik singular. Kita ingin membuktikan bahwa c merupakan titik stasioner, yaitu $f'(c) = 0$.

Karena $f(c)$ adalah nilai maksimum, maka untuk setiap x dalam I berlaku

$$f(x) \leq f(c)$$

Sehingga, dapat dituliskan

$$f(x) - f(c) \leq 0.$$

Jika $x < c$, sehingga $x - c < 0$, maka

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Sebaliknya, jika $x > c$, maka

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Karena c bukan titik singular, turunan $f'(c)$ ada. Dengan mengambil limit saat $x \rightarrow c^-$ pada persamaan pertama dan $x \rightarrow c^+$ pada persamaan kedua, diperoleh

$$f'(c) \geq 0 \quad \text{dan} \quad f'(c) \leq 0.$$

Dari kedua ketidaksamaan ini, dapat disimpulkan bahwa

$$f'(c) = 0.$$

Dengan demikian, c adalah titik stasioner. ■

Definisi 2.1.4 (Purcell dkk., 2010)

Fungsi f merupakan suatu aturan korespondensi yang mengaitkan setiap elemen x dari suatu himpunan ke elemen-elemen dalam himpunan hasil berupa $f(x)$. Himpunan nilai-nilai yang dihasilkan ini disebut sebagai daerah hasil dari fungsi tersebut.

Definisi 2.1.5

Misalkan f didefinisikan pada suatu interval terbuka yang memuat titik x . Fungsi f dikatakan kontinu di titik x jika $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ atau dengan kata lain $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Definisi 2.1.6

Misalkan terdapat dua fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, maka relasi pertidaksamaan antar fungsi tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

1. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f_n(x) = g_n(x)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$;
2. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f_n(x) > g_n(x)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$;
3. $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f_n(x) \geq g_n(x)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$;
4. $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f_n(x) < g_n(x)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$;
5. $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow f_n(x) \leq g_n(x)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.1.2

Misalkan f kontinu pada interval $[m, n]$. Maka f terbatas pada $[m, n]$.

2.2 Derivatif

Derivatif atau yang biasa disebut dengan diferensial merupakan perhitungan terhadap suatu nilai fungsi karena perubahan nilai variabel. Dengan kata lain proses menentukan turunan suatu fungsi disebut diferensial. Berdasarkan definisi, turunan fungsi f adalah fungsi lain f'' yang nilainya pada sembarang bilangan x adalah

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Asalkan limit ini ada dan bukan ∞ dan $-\infty$ (Purcell dkk., 2010).

Teorema 2.2.1 (Alwi, 2021)

Diberikan interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $c \in [a, b]$, serta fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dan fungsi $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ keduanya terdiferensial di titik c .

1. Untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, fungsi αf terdiferensial di titik c , dan

$$(\alpha f)'(c) = \alpha f'(c).$$

2. Fungsi $f + g$ terdiferensial di titik c , dan

$$(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c).$$

3. Fungsi fg terdiferensial di titik c , dan

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

4. Jika $g(c) \neq 0$, maka fungsi $\frac{f}{g}$ terdiferensial di titik c , dan

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}.$$

Bukti:

Ambil sembarang interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, dan $c \in [a, b]$. Diketahui fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dan fungsi $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ keduanya terdiferensial di titik c .

1. Misalkan $h = \alpha f$, maka untuk setiap $x \in [a, b]$ dengan $x \neq c$ diperoleh

$$\frac{h(x) - h(c)}{x - c} = \frac{\alpha f(x) - \alpha f(c)}{x - c}.$$

Dengan mengambil limit,

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{h(x) - h(c)}{x - c} = \alpha \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \alpha f'(c).$$

Karena $h = \alpha f$, maka diperoleh $(\alpha f)'(c) = \alpha f'(c)$.

2. Misalkan $h = f + g$, maka definisi turunan memberikan

$$h'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{h(x) - h(c)}{x - c}$$

Karena $h(x) = f(x) + g(x)$, maka

$$\begin{aligned} h(x) - h(c) &= (f(x) + g(x)) - (f(c) + g(c)) \\ &= (f(x) - f(c)) + (g(x) - g(c)) \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\frac{h(x) - h(c)}{x - c} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

Dengan mengambil limit kedua ruas, diperoleh

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} \frac{h(x) - h(c)}{x - c} &= \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \\ &= f'(c) + g'(c)\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c).$$

3. Misalkan $h = fg$, maka untuk setiap $x \in [a, b]$ dengan $x \neq c$ diperoleh

$$\frac{h(x) - h(c)}{x - c} = \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c}.$$

Dengan manipulasi aljabar,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x) - f(c)g(x) + f(c)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} \\ = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}g(x) + f(c)\frac{g(x) - g(c)}{x - c}.\end{aligned}$$

Mengambil limit,

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{h(x) - h(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}g(x) + f(c)\frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right).$$

Dengan sifat limit,

$$h'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

Karena $h = fg$, maka diperoleh $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$.

Definisi 2.2.1 (Bartle & Sherbert, 2000)

Diberikan fungsi $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dan titik $c \in (a, b)$. Bilangan $L \in \mathbb{R}$ disebut derivatif fungsi f di titik c jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in [a, b]$ dengan $0 < |x - c| < \delta$, berlaku

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \varepsilon$$

Bilangan L disebut turunan fungsi f di titik c dan ditulis dengan $f'(c) = L$. Derivatif fungsi f di titik c diberikan dengan

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Fungsi f dikatakan diferensiabel pada $[a, b]$ jika f mempunyai turunan di setiap titik $c \in [a, b]$. Selanjutnya, fungsi f dikatakan diferensiabel kontinu pada $[a, b]$ jika f mempunyai turunan di setiap titik $c \in (a, b)$ dan f' kontinu pada $[a, b]$. Himpunan fungsi-fungsi yang diferensiabel kontinu pada $[a, b]$ ditulis $C^1[a, b]$.

Contoh 2.2.1

Akan ditentukan derivatif $f(x) = x^2$ untuk $x \in \mathbb{R}$. Misalkan $c \in \mathbb{R}$, maka

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{(x - c)(x + c)}{x - c}$$

Karena $x \neq c$, maka $x - c$ dapat disederhanakan menjadi

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} (x + c) = 2c$$

Jadi, dalam hal ini, fungsi $f'(x)$ didefinisikan di semua $\mathbb{R}$ dan $f'(x) = 2x$ untuk $x \in \mathbb{R}$.

Misalkan diambil nilai $c = 3$, didapat turunan fungsi f di titik $c = 3$ adalah

$$f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

Definisi 2.2.2 (Stewart, 2002)

Turunan fungsi f adalah f' (dibaca “ f aksen”) yang nilainya sebarang pada bilangan c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}.$$

Asalkan limit ini ada.

Contoh 2.2.2

Misalkan $a, c \in \mathbb{R}$ adalah konstanta. Hitung turunan dari fungsi konstan $f(x) = c$ pada $x = a$.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Jadi, turunan dari fungsi konstan adalah 0.

Teorema 2.2.1 (Stewart, 2002)

Jika $f'(c)$ ada, maka f kontinu di c .

Bukti:

Untuk menunjukkan bahwa $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$, diperhatikan bahwa

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c), \quad x \neq c.$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} \left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow c} f(c) + \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\ &= f(c). \end{aligned}$$

■

2.3 Barisan

Barisan merupakan suatu runtutan angka atau bilangan dari kiri ke kanan dengan pola serta aturan tertentu. Berikut akan dijelaskan definisi, teorema, dan contoh-contoh barisan.

Definisi 2.3.1 (Bartle & Sherbert, 2000)

Jika $X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ adalah barisan bilangan real, maka nilai fungsi X di $n \in \mathbb{N}$ dinotasikan sebagai (x_n) .

Contoh 2.3.1

Diberikan barisan $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dengan $n = 1, 2, 3, \dots$ Sehingga $\left(\frac{1}{n}\right) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ merupakan barisan bilangan real.

Definisi 2.3.2 (Bartle & Sherbert, 2000)

Barisan bilangan real $(x_n, n \in \mathbb{N})$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, atau limit dari $(x_n, n \in \mathbb{N})$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga untuk semua $n \geq N$, berlaku

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Pernyataan bahwa barisan bilangan real X konvergen atau menuju x dapat ditulis sebagai

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{atau} \quad x_n \rightarrow x.$$

Titik x disebut titik limit dari barisan (x_n) .

Definisi 2.3.3 (Darmawijaya, 2006)

Jika barisan bilangan real $\{a_n\}$ konvergen untuk $n \rightarrow \infty$, maka limitnya tunggal.

Bukti:

Misalkan barisan $\{a_n\}$ memiliki limit k dan a . Maka, untuk sebarang bilangan real $\epsilon > 0$, terdapat bilangan asli n' dan n'' sehingga

1. Untuk setiap bilangan asli $n \geq n'$, berlaku $|a_n - k| < \epsilon$.
2. Untuk setiap bilangan asli $n \geq n''$, berlaku $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$.

Selanjutnya diambil bilangan asli $n_0 = \max\{n', n''\}$. Untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$, berlaku

$$|k - a| \leq |k - a_n + a_n - a| \leq |a_n - k| + |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

atau terbukti bahwa $k = a$. (limit barisan tunggal). ■

Teorema 2.3.1 (Martono, 1984)

Setiap barisan bilangan real yang konvergen adalah terbatas.

Bukti:

Misalkan barisan bilangan real (x_n) terbatas, yaitu $|x_n| \leq M$ untuk setiap n . Karena barisan (x_n) konvergen ke α , ada n_0 sehingga untuk $n > n_0$, berlaku $|x_n - \alpha| < 1$. Dengan demikian, kita dapatkan

$$|x_n| \leq |x_n - \alpha| + |\alpha| < 1 + |\alpha|$$

untuk setiap $n > n_0$. Dengan memilih $M = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0}|, |\alpha| + 1)$, maka untuk setiap n berlaku $|x_n| \leq M$, yang menunjukkan bahwa barisan (x_n) terbatas. ■

Definisi 2.3.4 (Darmawijaya, 2006)

Diketahui fungsi $f_k : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Definisi berikut berlaku:

1. Barisan fungsi $\{f_k\}$ dikatakan konvergen di titik $t \in D$ jika barisan bilangan real $\{f_k(t)\}$ konvergen.
2. Barisan fungsi $\{f_k\}$ dikatakan konvergen pada $A \subseteq D$ jika barisan bilangan real $\{f_k(t)\}$ konvergen untuk setiap $t \in A$.

Contoh 2.3.4

1. Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ diketahui $f_k(x) = \frac{a^2}{a^2 + k^2 x^2}$ dengan $a \neq 0$. $\{f_k(x)\}$ merupakan barisan fungsi dan $\{f_k(x)\}$ merupakan barisan bilangan untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \frac{a^2}{a^2 + k^2 x^2} = 0,$$

untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Jadi barisan fungsi $\{f_k\}$ konvergen ke 0 di setiap $x \in \mathbb{R}$. Dengan kata lain barisan fungsi $\{f_k\}$ konvergen ke fungsi f pada $\mathbb{R}$ dengan $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

2. Diketahui $f_n(x) = nx$ untuk $0 \leq x < \frac{1}{n}$ dan $f_n(x) = 1$ untuk $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$. Fungsi $\{f_n\}$ konvergen ke fungsi f pada $[0, 1]$ dengan $f(x) = 0$ dan $f(x) = 1$ untuk $x \in (0, 1]$. Diketahui $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Barisan fungsi $\{f_k\}$ konvergen pada $A \subset D$ jika terdapat fungsi $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t) = f(t),$$

Untuk setiap $t \in A$. Artinya untuk setiap $t \in A$ barisan bilangan nyata $\{f_k(t)\}$ konvergen ke bilangan nyata $f(t)$. Dalam hal ini dikatakan barisan fungsi $\{f_k\}$ konvergen ke fungsi f pada A atau barisan fungsi $\{f_k\}$ konvergen ke f di A (titik demi titik di A).

2.4 Ruang Barisan

Definisi 2.4.1 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan ω , yaitu koleksi semua barisan bilangan real, sehingga

$$\omega = \{\bar{x} = \{x_k\} | x_k \in \mathbb{R}\}.$$

1. Untuk setiap bilangan real p dengan $1 \leq p \leq \infty$, didefinisikan

$$l_p = \left\{ x = \{x_j\} \in \omega \mid \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\},$$

dan norm pada l_p adalah

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

2. Untuk $p = 1$, didefinisikan

$$l_1 = \left\{ x = \{x_j\} \in \omega \mid \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty \right\},$$

dan norm pada l_1 adalah

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|.$$

3. Untuk $p = \infty$, didefinisikan

$$l_{\infty} = \left\{ x = \{x_j\} \in \omega \mid \sup_{j \geq 1} |x_j| < \infty \right\},$$

dan norm pada l_∞ adalah

$$\|x\|_\infty = \sup_{j \geq 1} |x_j|.$$

Definisi 2.4.2 (Kizmaz, 1981)

Himpunan dari barisan bilangan disebut ruang barisan ℓ_p apabila memenuhi syarat berikut

$$\ell_p = \{\tilde{x} = (x_n) \subset \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

ℓ_p koleksi barisan bilangan yang $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$.

$$\ell_p(\Delta) = \{\tilde{x} = (x_n) \mid \Delta x \in \ell_p\}$$

$\ell_p(\Delta)$ koleksi barisan bilangan yang $\Delta x \in \ell_p$.

$$\ell_p(\Delta^2) = \{\tilde{x} = (x_n) \mid \Delta^2 x \in \ell_p\}$$

$\ell_p(\Delta^2)$ koleksi barisan bilangan yang $\Delta^2 x \in \ell_p$.

2.5 Ruang Vektor

Definisi 2.5.1 (Maddox, 1970)

Ruang vektor adalah himpunan tak kosong X yang dilengkapi dengan fungsi penjumlahan $(+) : X \rightarrow X$ dan fungsi perkalian skalar $(\cdot) : \mathbb{F} \rightarrow X$ sehingga untuk setiap skalar λ, μ dan elemen $x, y, z \in X$ berlaku

1. $x + y = y + x$ (komutatif)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asosiatif)
3. Terdapat $0 \in X$ sehingga $\forall x \in X, \quad x + 0 = x$ (elemen identitas)
4. $\forall x \in X$, terdapat $-x \in X$ sehingga $x + (-x) = 0$ (elemen invers)
5. $1 \cdot x = x$
6. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (distributif)
7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (distributif)
8. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

Definisi 2.5.2 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $(V, +)$ grup komutatif dan $(F, \oplus, \cdot)$ lapangan dengan elemen identitas 1. V disebut ruang vektor (*vector space*) atas F jika ada operasi luar $*$ antara keduanya sehingga untuk setiap $\mathbf{x} \in V$ dan $\alpha \in F$ memenuhi sifat-sifat:

1. $\alpha * (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha * \mathbf{x} + \alpha * \mathbf{y}$
2. $(\alpha \oplus \beta) * \mathbf{x} = \alpha * \mathbf{x} + \beta * \mathbf{x}$
3. $(\alpha \cdot \beta) * \mathbf{x} = \alpha * (\beta * \mathbf{x})$
4. $1 * \mathbf{x} = \mathbf{x}$, untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ dan $\alpha, \beta \in F$.

Contoh 2.5.1

1. Diberikan $V = C[a, b]$, yaitu koleksi semua fungsi kontinu dari $[a, b]$ ke $\mathbb{R}$. Operasi penjumlahan $(+)$ pada $C[a, b]$ didefinisikan sebagai berikut: Untuk setiap $f, g \in C[a, b]$, fungsi $f + g$ didefinisikan sebagai:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in [a, b].$$

Maka V merupakan grup komutatif, dengan $(-f)(x) = -f(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Jika untuk setiap $f \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ didefinisikan fungsi αf dengan rumus:

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad x \in [a, b],$$

maka dapat dilihat bahwa $\alpha f \in V$.

2. Diberikan bilangan asli n (tetap) dan dibentuk:

$$\mathbb{R}^n = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Operasi penjumlahan dan operasi perkalian skalar didefinisikan sebagai berikut:

- a. Operasi Penjumlahan

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

untuk setiap $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

b. Operasi Perkalian Skalar

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Dapat diperlihatkan bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang vektor real.

3. $B[a, b]$, yaitu koleksi semua fungsi bernilai real yang terbatas pada $[a, b]$, merupakan ruang vektor real terhadap operasi-operasi:

a. Operasi Penjumlahan

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad f, g \in B[a, b], \quad x \in [a, b].$$

b. Operasi Perkalian Skalar

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad f \in B[a, b].$$

4. Jika S menyatakan koleksi semua barisan bilangan kompleks dan operasi jumlah dan perkalian skalar didefinisikan sebagai berikut:

a. Operasi Penjumlahan

$$\{z_n\} + \{w_n\} = \{z_n + w_n\}, \quad \{z_n\}, \{w_n\} \in S.$$

b. Operasi Perkalian Skalar

$$\alpha \{z_n\} = \{\alpha z_n\}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \{z_n\} \in S.$$

Maka dapat ditunjukkan bahwa S merupakan ruang vektor kompleks.

Teorema 2.5.1 (Darmawijaya, 2007)

Jika V suatu ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$, maka berlaku pernyataan-pernyataan berikut:

1. Untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ terdapat tepat satu $\mathbf{z} \in V$ sehingga $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{y}$
2. Jika $\mathbf{z} \in V$ dan $\mathbf{z} + \mathbf{z} = \mathbf{z}$, maka $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.
3. $\alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$ untuk setiap skalar α .
4. $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ untuk setiap $x \in V$.
5. $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ untuk setiap $\mathbf{x} \in V$.
6. Jika α suatu skalar dan $\mathbf{x} \in V$ sehingga $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$, maka $\alpha = 0$ atau $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Bukti:

1. Diberikan sembarang $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Karena V merupakan grup, maka terdapat

$$-\mathbf{z} \in V \quad \text{sehingga} \quad \mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{y} + (-\mathbf{z}) \in V.$$

Selanjutnya, jika diambil $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, maka diperoleh

$$\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{y}.$$

2. Diketahui $\mathbf{z} \in V$ sehingga $\mathbf{z} + \mathbf{z} = \mathbf{z}$. Karena V merupakan grup dan $\mathbf{z} \in V$, maka terdapat $-\mathbf{z} \in V$ sehingga $-\mathbf{z} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$. Akibatnya,

$$\begin{aligned} \mathbf{z} + \mathbf{z} &= \mathbf{z} \\ \iff -\mathbf{z} + (\mathbf{z} + \mathbf{z}) &= -\mathbf{z} + \mathbf{z} \\ \iff (-\mathbf{z} + \mathbf{z}) + \mathbf{z} &= \mathbf{0} + \mathbf{z} \\ \iff \mathbf{0} + \mathbf{z} &= \mathbf{z} \\ \iff \mathbf{z} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

3. Untuk sembarang skalar α , diperoleh

$$\alpha \mathbf{0} = \alpha(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha \mathbf{0} + \alpha \mathbf{0}.$$

Jadi menurut (2) diperoleh $\alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

4. Untuk sembarang $\mathbf{x} \in V$, diperoleh

$$0\mathbf{x} = (0 + 0)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} + 0\mathbf{x}.$$

Menurut (2) diperoleh $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

5. Untuk sembarang $\mathbf{x} \in V$ diperoleh

$$(-1)\mathbf{x} + \mathbf{x} = (-1 + 1)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

artinya $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

6. Diketahui $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Apabila $\alpha \neq 0$, maka terdapat $\alpha^{-1} \in \mathbb{F}$ sehingga $\alpha^{-1}\alpha = 1$. Akibatnya, diperoleh

$$\alpha^{-1}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha^{-1}\mathbf{0} \iff (\alpha^{-1}\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff 1\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

2.6 Ruang Bernorm

Definisi 2.6.1 (Darmawijaya, 2007)

Ruang linear dikatakan bernorma jika terdapat fungsi $\| \cdot \| : U \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $\|u\| \geq 0$ untuk setiap $u \in U$;
 $\|u\| = 0$ jika dan hanya jika $u = 0$.
2. $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $u \in U$.
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ untuk setiap $u, v \in U$.

Sehingga, bilangan non-negatif $\|x\|$ disebut norm vektor x , dengan notasi $(X, \| \cdot \|)$.

Teorema 2.6.1 (Darmawijaya, 2007)

Ruang bernorm terhadap norm $\| \cdot \|_p$ merupakan ruang barisan ℓ_p dengan $1 \leq p < \infty$

Bukti:

Diberikan sebarang $\tilde{x} = (x_n), \tilde{y} = (y_n) \in \ell_p$ dengan $1 \leq p < \infty$ dan skalar α , sehingga diperoleh

1. $\|\tilde{x}\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p} \geq 0$ karena $|x_n| \geq 0$ untuk setiap n .
 $\|\tilde{x}\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p} = 0 \iff |x_n| = 0 \forall n \iff \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$.
2. $\|\alpha \tilde{x}\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p)^{1/p} = |\alpha| (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p} = |\alpha| \|\tilde{x}\|_p$.
 Jelas bahwa $\|\alpha \tilde{x}\|_p < \infty$.
3. $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p)^{1/p} \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p} + (\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p)^{1/p} = \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p$.
 Karena $\|\tilde{x}\|_p$ dan $\|\tilde{y}\|_p$ keduanya terhingga, maka $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p < \infty$.

Berdasarkan poin 1, 2, dan 3, terbukti bahwa ℓ_p merupakan ruang linear dan norm $\| \cdot \|_p$ pada norm ℓ_p . Jadi, $(\ell_p, \| \cdot \|_p)$ adalah ruang bernorm. ■

Teorema 2.6.2 (Bartle & Sherbert, 2000)

Barisan Cauchy merupakan barisan yang konvergen di dalam ruang bernorm $(X, \| \cdot \|)$.

Bukti:

Diberikan barisan $(x_n) \in X$ dengan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ dan $\epsilon > 0$, maka terdapat suatu $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku

$$d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{untuk setiap } n \geq N.$$

Akibatnya, untuk $m, n \geq N$, berlaku

$$d(x_m, x_n) \leq d(x, x_m) + d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dengan demikian, (x_n) adalah barisan Cauchy yang konvergen di dalam ruang bernorm $(X, \|\cdot\|)$, karena $d(x_m, x_n) < \epsilon$ untuk setiap $m, n \geq N$, yang menunjukkan bahwa barisan (x_n) terkonvergen terhadap x . ■

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2024/2025 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka, yaitu dengan mengkaji buku-buku dan jurnal-jurnal yang berkaitan dengan penelitian ini. Adapun langkah – langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Melakukan *literature review* tentang derivatif, ruang vektor, dan ruang barisan l_2 dari buku, jurnal, dan lain-lain.
2. Menentukan fungsi-fungsi yang akan diderivatifkan.
3. Menganalisis derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan l_2 .

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya, maka dapat dibuat kesimpulan sebagai berikut:

1. Diberikan fungsi-fungsi $\bar{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^\infty$. Turunan fungsi $\bar{f}$ ditulis $\frac{d\bar{f}}{dx} \in l_2$

$$\bar{f}'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{f}(c+h) - \bar{f}(c)}{h}$$

asalkan limit ada, bukan ∞ atau $-\infty$, dan

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{d\bar{f}}{dx} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

2. Jika $\bar{f}$ dan $\bar{g}$ adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka

- a. $(\bar{f} + \bar{g})'(x) = \bar{f}'(x) + \bar{g}'(x)$
- b. $(\bar{f} - \bar{g})'(x) = \bar{f}'(x) - \bar{g}'(x)$
- c. $(\bar{f} \cdot \bar{g})'(x) = \bar{f}(x)\bar{g}'(x) + \bar{g}(x)\bar{f}'(x)$

3. Jika $\bar{f}$ dan $\bar{g}$ adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan dengan $\bar{g}(x) \neq 0$, maka

$$\left(\frac{\bar{f}}{\bar{g}} \right)'(x) = \frac{\bar{g}(x)\bar{f}'(x) - \bar{f}(x)\bar{g}'(x)}{\bar{g}^2(x)}$$

4. $\bar{f}(x)$ mempunyai maksimal dan minimal pada $[a, b]$ jika $\frac{d\bar{f}}{dx} = 0$ pada $x \in [a, b]$ dan x sebagai titik kritis.
5. Misalkan $\bar{f}''$ dan $\bar{f}'''$ ada pada setiap titik interval terbuka (a, b) yang memuat c , dan misalkan $\bar{f}'(c) = 0$.

1. Jika $\bar{f}'' < 0$, maka $\bar{f}(c)$ adalah nilai maksimum lokal $\bar{f}$.

2. Jika $\bar{f}'' > 0$, maka $\bar{f}(c)$ adalah nilai minimum lokal $\bar{f}$.

5.2 Saran

Disarankan kepada para peneliti yang akan datang untuk mengembangkan penelitian terhadap derivatif parsial fungsi-fungsi bernilai barisan lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Asyhar, B. 2018. Aplikasi Turunan (Derivatif) dalam Permasalahan Analisis Keuntungan Maksimum. *Al-Khwarizmi: Jurnal Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*. 2(1).
- Atangana, A. 2015. *Derivative with a New Parameter: Theory, Methods and Applications*. Academic Press, South Africa.
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. 2000. *Introduction to Real Analysis : Third Edition*. John Willey & Sons, New York.
- Darmawijaya, S. 2006. *Pengantar Analisis Real*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.
- Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.
- Hernadi, J. 2015. *Analisis Real Elementer dengan Ilustrasi Grafis dan Numeris*. Erlangga, Jakarta.
- Kizmaz, H. (1981). On certain sequence spaces. *Canadian Mathematical Bulletin*, 24(2), 169–176.
- Maddox, I. J. 1970. *Elements of Functional Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Martono, K. 1984. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik 2*. Angkasa, Bandung.
- Mindarsih, A. 2015. *Derivatif-Derivatif Norma*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.
- Mizrahi, A., Sullivan, M. 1982. *Calculus and Analytic Geometry*. Wadsworth Publishing Company, California.
- Naimah, I. D. 2012. *Derivatif Ruang Linier Bernorma Real*. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang.

Parzynski, W., & Zypse, P. W. 1982. *Introduction To Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, New York.

Stewart, J. 2002. *Calculus : Fifth Edition*. Brooks Cole, United of States.

Purcell, S. E. Rigdon, Varberg, D., E. J. 2010. *Kalkulus Edisi Kesembilan*. Terjemahan I Nyoman Susila. Erlangga, Jakarta.