

**PEMODELAN MATEMATIKA SEIR PENYEBARAN PENYAKIT
PNEUMONIA BALITA DENGAN PENGARUH VAKSINASI DI KOTA
BANDAR LAMPUNG**

Skripsi

Oleh

**LEONY PUTRI KINANTI
NPM. 2217031129**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

ABSTRACT

SEIR MATHEMATICAL MODELING OF PNEUMONIA DISEASE SPREAD AMONG TODDLERS WITH THE INFLUENCE OF VACCINATION IN BANDAR LAMPUNG CITY

By

Leony Putri Kinanti

Pneumonia in toddlers is a health problem that still needs serious attention. This study discusses mathematical modeling of the spread of pneumonia in toddlers in Bandar Lampung City using the SEIR model, incorporating the effect of vaccination. Model analysis was performed by determining the equilibrium point and the number R_0 to determine the conditions for the spread of the disease. The results of the analysis show that if $R_0 < 1$, the disease will disappear and the system will be disease-free, whereas if $R_0 > 1$, the disease will persist in the population and has the potential to become endemic. The simulation results show that an increase in the proportion of vaccinations can significantly reduce the number of infected toddlers. Therefore, vaccination is an important factor in controlling the spread of pneumonia among toddlers in Bandar Lampung City.

Keywords: Pneumonia, Toddlers, SEIR Model, R_0 , Equilibrium Point

ABSTRAK

PEMODELAN MATEMATIKA SEIR PENYEBARAN PENYAKIT PNEUMONIA BALITA DENGAN PENGARUH VAKSINASI DI KOTA BANDAR LAMPUNG

Oleh

Leony Putri Kinanti

Penyakit pneumonia pada balita merupakan masalah kesehatan yang masih perlu mendapat perhatian serius. Penelitian ini membahas pemodelan matematika penyebaran pneumonia pada balita di Kota Bandar Lampung menggunakan model SEIR dengan memasukkan pengaruh vaksinasi. Analisis model dilakukan melalui penentuan titik ekuilibrium dan bilangan R_0 untuk mengetahui kondisi penyebaran penyakit. Hasil analisis menunjukkan bahwa jika $R_0 < 1$, maka penyakit akan menghilang dan sistem berada pada kondisi bebas penyakit, sedangkan jika $R_0 > 1$, penyakit akan bertahan dalam populasi dan berpotensi menjadi endemik. Hasil simulasi menunjukkan bahwa peningkatan proporsi vaksinasi mampu menurunkan jumlah balita yang terinfeksi secara signifikan. Oleh karena itu, vaksinasi merupakan faktor penting dalam upaya pengendalian penyebaran penyakit pneumonia pada balita di Kota Bandar Lampung.

Kata-kata kunci: Pneumonia, Balita, Model SEIR, R_0 , Titik Ekuilibrium

**PEMODELAN MATEMATIKA SEIR PENYEBARAN PENYAKIT
PNEUMONIA BALITA DENGAN PENGARUH VAKSINASI DI KOTA
BANDAR LAMPUNG**

LEONY PUTRI KINANTI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

Judul Skripsi : **PEMODELAN MATEMATIKA SEIR
PENYEBARAN PENYAKIT PNEUMONIA
BALITA DENGAN PENGARUH VAKSINASI
DI KOTA BANDAR LAMPUNG**

Nama Mahasiswa : **Leony Putri Kinanti**

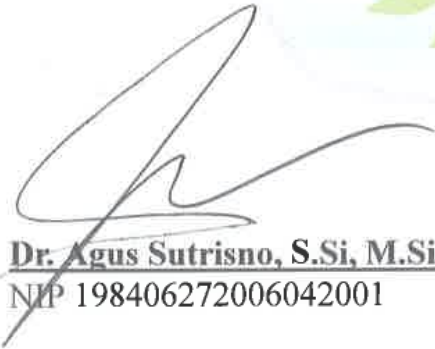
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031129**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing


Dr. Agus Sutrisno, S.Si, M.Si.
NIP 198406272006042001


Dra. Dorrah Azis, M.Si.
NIP 198002062003121003

2. Ketua Jurusan Matematika


Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Agus Sutrisno, S.Si, M.Si.**



Sekretaris : **Dra. Dorrah Azis, M.Si.**



Penguji

Bukan Pembimbing : **DR. MUSLIM ANSORI, M.Si.**



2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam




Dr. Hing Heri Satria, S.Si., M.Si.

NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **30 Januari 2026**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Leony Putri Kinanti**
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031129**
Jurusan : **Matematika**
Judul Skripsi : **Pemodelan Matematika SEIR Penyebaran Penyakit Pneumonia Balita dengan Pengaruh Vaksinasi di Kota Bandar Lampung**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 18 Januari 2026
Penulis,



Leony Putri Kinanti

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Leony Putri Kinanti yang lahir di Lampung Tengah pada tanggal 6 Mei 2004. Sebagai anak pertama dari Bapak Sulistyو dan Ibu Sukarmi.

Penulis menempuh pendidikan Sekolah Dasar (SDN) 11 Metro Pusat pada tahun 2010-2016, Sekolah Menengah Pertama (SMPN) 3 Metro pada tahun 2016-2019, Sekolah Menengah Atas (SMAN) 3 Metro 2019-2022.

Pada tahun 2024 penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Kantor Pelayanan Pajak Pratama Kota Metro. Pada tahun 2025 Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kelurahan Tanjung Baru, Kecamatan Kedamaian, Kota Bandar Lampung, Provinsi Lampung. Pengalaman organisasi penulis yaitu anggota Bidang Minat dan Bakat Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) 2023.

KATA INSPIRASI

”Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai kesanggupannya”

QS. Al-Baqarah: 286

PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan Alhamdulillah dan bersyukur kepada Allah SWT atas karunia dan petunjuk-Nya, sehingga tugas akhir ini dapat diselesaikan dengan baik dan sesuai waktunya. Dengan penuh rasa syukur dan kebahagiaan, saya ucapkan terimakasih kepada:

Bapak dan Mamaku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Aku menghargai semua pelajaran berharga yang telah diajarkan kepadaku mengenai arti sejati dari perjalanan kehidupan, agar suatu saat bisa menjadi individu yang berguna bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, penulis panjatkan rasa syukur kepada Allah SWT atas segala berkah dan anugerah-Nya yang memungkinkan penulis untuk menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Pemodelan Matematika SEIR Penyebaran Penyakit Pneumonia Balita dengan Pengaruh Vaksinasi di Kota Bandar Lampung" dengan baik, lancar, dan sesuai dengan tenggat waktu yang telah ditetapkan. Semoga shalawat dan salam senantiasa diberikan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dra. Dorrah Azis, M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing akademik.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Bapak dan mama, yang senantiasa tidak lelah untuk mendo'a kan penulis, selalu memberi motivasi dan selalu mengajarkan penulis untuk bersyukur tanpa do'a bapak dan mama penulis tidak mungkin berada di titik ini.
8. Untuk keluarga besarku tercinta yang tidak bisa disebutkan satu per satu, Keluarga Besar Hadi Suwarno dan Keluarga Besar Solikin.
9. Terimakasih untuk Dimas Andika yang selalu menemani serta mendukung dan memotivasi penulis.
10. Sahabat penulis diantaranya Infinity Dump, Gc Kalkulus 3, Smanthree Gank dan Diva Aura yang telah banyak memberikan tawa dan selalu meluangkan waktu untuk saling membantu.
11. Anggota Bidang Minat dan Bakat HIMATIKA Periode 2024, terimakasih banyak karena sudah saling membantu.
12. Teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika angkatan 2022.

Semoga skripsi ini dapat berguna bagi kita semua. Penulis memahami bahwa skripsi ini masih memiliki banyak kekurangan, sehingga penulis berharap mendapat masukan dan saran yang positif untuk memperbaiki skripsi ini ke depannya.

Bandar Lampung, 10 Februari 2026

Leony Putri Kinanti

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Tujuan Penelitian	2
1.3 Manfaat Penelitian	2
II TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Pneumonia	4
2.2 Vaksinasi	5
2.3 Persamaan Diferensial	5
2.4 Titik Ekuilibrium dan Kestabilannya	7
2.5 Model SEIR Penyebaran Penyakit Pneumonia	9
2.6 Bilangan Reproduksi (R_0)	11
III METODE PENELITIAN	13
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	13
3.2 Tahapan Penelitian	13
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	16
4.1 Data Penelitian	16
4.2 Asumsi Pembentukan Model	18
4.3 Model SEIR dengan Vaksinasi	19
4.4 Titik Ekuilibrium	20
4.4.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	21
4.4.2 Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit	22
4.5 Kestabilan Titik Ekuilibrium	25
4.6 Jumlah Individu yang Divaksinasi	31
4.7 Simulasi Titik Ekuilibrium	34
4.8 Simulasi Dengan Gambar	39
V PENUTUP	43
5.1 Kesimpulan	43

DAFTAR PUSTAKA	45
A Data Penelitian	47
B Surat Permohonan Pengajuan Data	48

DAFTAR GAMBAR

2.1	Diagram model SEIR penyebaran penyakit pneumonia.	10
3.1	Diagram Alir Penelitian	15
4.1	Simulasi dengan $\rho = 0,1$ dan waktu 0 – 2,9 hari	39
4.2	Simulasi dengan $\rho = 0,1$ dan waktu 0 – 15,7 hari	40
4.3	Simulasi dengan $\rho = 0,1$ dan waktu 0 – 27,4 hari	40
4.4	Simulasi dengan $\rho = 0,5$ dan waktu 0 – 2,9 hari	40
4.5	Simulasi dengan $\rho = 0,5$ dan waktu 0 – 15,7 hari	41
4.6	Simulasi dengan $\rho = 0,5$ dan waktu 0 – 27,4 hari	41
4.7	Simulasi dengan $\rho = 0,9$ dan waktu 0 – 2,9 hari	41
4.8	Simulasi dengan $\rho = 0,9$ dan waktu 0 – 15,7 hari	42
4.9	Simulasi dengan $\rho = 0,9$ dan waktu 0 – 27,4 hari	42

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam kehidupan yang dijalani semua makhluk, mereka pasti menghadapi berbagai kejadian atau masalah yang muncul dalam bentuk yang beraneka ragam dan dapat diceritakan melalui model matematika. Model matematika memiliki peranan penting dalam berbagai aspek ilmu pengetahuan, seperti biologi, geologi, ekonomi, kesehatan, dan bidang-bidang lain yang sejenis. Model matematika memiliki kontribusi yang signifikan dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan, termasuk biologi, geologi, ekonomi, kesehatan, dan bidang-bidang lain yang serupa.[Beta dkk, [2022]]. Pemodelan matematika dapat berperan untuk menjelaskan dan mempresentasikan sebuah permasalahan pada dunia nyata ke dalam bentuk pernyataan secara matematis. Model matematis diciptakan dengan landasan asumsi-asumsi tertentu. Model matematis yang telah disusun akan diujikan, agar model yang dihasilkan dapat menggambarkan permasalahan yang sedang dikaji. Dalam hal ini pemodelan matematika dapat pula menyatakan sebuah peristiwa penyebaran penyakit pneumonia.

Pneumonia adalah infeksi atau peradangan cepat yang terjadi di jaringan paru-paru dan diakibatkan oleh beragam mikroba, termasuk bakteri, virus, parasit, jamur, bahkan paparan zat kimia atau kerusakan fisik. Gejala dari kondisi ini meliputi pernapasan yang cepat dan kesulitan bernapas, disebabkan oleh peradangan yang tiba-tiba pada paru-paru. Saat individu mengalami pneumonia, alveoli akan terisi dengan nanah dan cairan, yang menyebabkan rasa sakit saat bernapas serta mengurangi jumlah oksigen yang dapat dihirup.[Side dkk, [2021]]. Penyakit pneumonia lebih umum terjadi pada anak-anak, terutama yang berusia balita di bawah lima tahun, yang dalam istilah bulan berarti dari usia 0 bulan hingga 59 bulan. Ada berbagai faktor risiko yang menyebabkan tingginya angka kematian akibat pneumonia pada balita di negara-negara berkembang, termasuk pneumonia yang terjadi selama periode bayi, karakteristik ibu, serta faktor-faktor lingkungan[Aprilia

dkk, [2024]]. Salah satu metode untuk menghindari penyakit ini adalah melalui imunisasi. Imunisasi dilakukan dengan menyuntikkan vaksin, yang merupakan zat antigenik yang berfungsi untuk memicu pembentukan kekebalan aktif terhadap suatu penyakit.

Beberapa ilmuwan telah melakukan penelitian mengenai model SEIR yang berkaitan dengan penyebaran penyakit dan dampak dari vaksinasi. Satu contoh di antaranya merupakan penelitian yang dilaksanakan oleh Anshar pada tahun 2018 yang berjudul "Model Matematis SIRS yang memperhitungkan dampak vaksinasi pada penyebaran malaria. " Penelitian lainnya berjudul "Model Matematis SIR dengan vaksinasi dalam kasus penyebaran hepatitis B (Studi Kasus di Provinsi Sulawesi Selatan)". Oleh karena itu, penulis merasa terdorong untuk menyelidiki isu penyebaran pneumonia melalui model SEIR, khususnya pada balita yang terpengaruh vaksinasi di Kota Bandar Lampung.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun maksud dari penelitian ini yaitu:

1. Merumuskan model penyebaran pneumonia pada balita dengan pendekatan SEIR yang memasukkan faktor vaksinasi sebagai variabel pengendali.
2. Mengkaji sifat-sifat model, khususnya keseimbangan penyakit dan nilai bilangan reproduksi dasar R_0 , untuk melihat kondisi kapan penyakit dapat bertahan atau penyakit akan hilang dari populasi.
3. Menentukan tingkat atau proporsi vaksinasi minimum yang perlu dicapai agar penyebaran pneumonia pada balita dapat ditekan secara efektif.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini yaitu:

Manfaat Teoritis

1. Memperkaya kajian matematika terapan dalam bidang kesehatan, khususnya pemodelan epidemi penyakit menular.

2. Menyediakan acuan akademik untuk penelitian lanjutan terkait penerapan model SEIR dengan intervensi vaksinasi.

Manfaat Praktis

1. Memberikan informasi yang dapat dijadikan dasar pertimbangan oleh pemerintah daerah atau instansi kesehatan dalam menyusun strategi vaksinasi pneumonia pada balita.
2. Menyediakan analisis kuantitatif yang menunjukkan hubungan antara cakupan vaksinasi dengan penurunan jumlah kasus pneumonia .
3. Meningkatkan kesadaran masyarakat akan peran penting vaksinasi dalam melindungi balita dari risiko pneumonia

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pneumonia

Pneumonia merupakan salah satu jenis infeksi yang mempengaruhi saluran pernapasan bagian bawah dan merupakan penyebab utama kematian di kalangan anak-anak. Menurut informasi dari Organisasi Kesehatan Dunia (WHO), pneumonia berada di posisi teratas sebagai penyebab kematian anak dengan persentase 15% dari seluruh kematian anak di bawah usia 5 tahun, yang mengakibatkan kematian sebanyak 740.180 balita pada tahun 2019. Diperkirakan terdapat sekitar 19.000 kematian di Indonesia akibat pneumonia pada tahun itu.

Pneumonia adalah peradangan pada jaringan paru-paru yang mengakibatkan pengisian ruang alveoli dengan cairan. Istilah infeksi saluran pernapasan bagian bawah sering digunakan untuk mencakup penyakit bronchitis, pneumonia, atau kombinasi dari ketiganya. Pneumonia dapat disebabkan oleh infeksi bakteri, virus, atau jamur yang mempengaruhi satu sisi atau kedua sisi paru-paru, mengakibatkan alveoli terisi oleh nanah atau cairan. Gejala dapat berkisar dari yang ringan hingga yang parah dan biasanya mencakup batuk dengan dahak, demam, menggigil, serta kesulitan bernapas.

Manajemen Terpadu Balita Sakit (MTBS), yang lebih dikenal dengan istilah Integrated Management of Childhood Illness (IMCI), mengklasifikasikan pneumonia menjadi tiga jenis: pneumonia berat, pneumonia sedang, dan kondisi non-pneumonia (batuk). Berdasarkan penilaian klinis, pneumonia dibagi menjadi:

1. Pneumonia berat (rawat inap)

Gejala pada pneumonia berat terlihat pada frekuensi pernapasan yang cepat, yang disertai dengan perasaan sesak atau kesulitan bernafas, yakni tarikan kulit dada bagian bawah ke dalam saat anak menghirup napas.

Tanda-tanda bahaya pneumonia meliputi kepala yang terangguk-angguk, tampak pernapasan yang menggunakan cuping hidung, tarikan dinding dada bagian bawah ke arah dalam, dan hasil foto toraks yang menunjukkan adanya pneumonia

(infiltrat yang luas dan konsolidasi). Di samping itu, suara merintih (grunting) bisa juga ditemukan pada bayi baru lahir. Saat melakukan auskultasi, terdengar suara ronki (crackles) atau pernapasan yang terdengar lemah, atau pernapasan bronkial yang tidak normal. Dalam kondisi yang sangat parah, anak mungkin tidak mampu menyusu atau makan, terus menerus muntah, mengalami kejang, menjadi letargis atau kehilangan kesadaran, serta mengalami sianosis dan kesulitan bernapas yang serius.

2. Pneumonia ringan (rawat jalan)

Gejala pneumonia ringan menunjukkan hanya nafas cepat tanpa tanda-tanda sesak atau kesulitan bernafas. Dalam kasus pneumonia ringan yang tidak memerlukan rawat inap, antibiotik lini pertama dapat diberikan.

2.2 Vaksinasi

Vaksinasi adalah proses menyuntikkan mikroba yang telah dibunuh atau dilemahkan, bertujuan untuk merangsang respons sistem kekebalan tubuh terhadap mikroba tersebut, sehingga tubuh mampu memproduksi antibodi untuk menghindari penyakit. Vaksinasi berfungsi memanfaatkan mekanisme alami tubuh. Sistem imun yang baik dapat mengenali dan menyerang bakteri serta virus, serta memproduksi zat bernama antibodi untuk menghancurkan atau menetralkan mereka.

2.3 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah salah satu tipe persamaan yang memiliki peranan sangat krusial dalam matematika, karena sejumlah hubungan fisika dan hukum diungkapkan secara matematis dalam bentuk persamaan differensial. Secara luas, persamaan diferensial bisa dijelaskan.

Definisi 2.3.1 Boyce & DiPrima (2009)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan sebuah fungsi tak dikenal dan satu atau lebih turunan dari fungsi tersebut terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Definisi 2.3.2 Dennis G. Zill (2001)

Persamaan diferensial adalah suatu jenis persamaan yang mengaitkan sebuah fungsi dengan turunan-turunannya. Apabila hanya terdapat satu variabel yang bebas, maka itu dinamakan persamaan diferensial biasa (ODE), sedangkan jika melibatkan lebih

dari satu variabel bebas, dinamakan persamaan diferensial parsial (PDE).

Definisi 2.3.3 Purcell & Varberg (1992)

Persamaan diferensial merupakan hubungan matematis yang melibatkan fungsi serta turunan pertama atau lebih tinggi dari fungsi tersebut terhadap variabel bebas.

Persamaan diferensial adalah suatu hubungan matematis yang mencakup fungsi serta satu atau lebih turunan fungsi tersebut terhadap variabel yang bebas. Persamaan diferensial dapat diartikan sebagai sebuah rumus yang mengandung tanda turunan (*derivative*) $\frac{dy}{dx}$, di mana dalam rumus tersebut terdapat setidaknya satu turunan dari sebuah fungsi yang belum diketahui. Persamaan diferensial biasa adalah sebuah turunan di mana fungsinya bergantung pada satu variabel bebas, contohnya adalah $\frac{dy}{dx}$. [Apriani dkk, [2022]]

Contoh 2.3.4 Contoh dari persamaan diferensial biasa disajikan pada persamaan berikut

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad (2.3.1)$$

2.3.5 Persamaan Diferensial Biasa *Linear* dan *Non Linear*

Persamaan diferensial linier sering disebut sebagai persamaan diferensial dengan tingkat satu dan derajat satu. Sementara itu, persamaan diferensial nonlinear merujuk pada persamaan diferensial biasa yang tidak bersifat linier. Sebuah persamaan diferensial dianggap sebagai nonlinear jika tidak memenuhi kriteria serta format umum dari persamaan diferensial linier, yaitu ketika derajatnya melebihi satu dan ada interaksi antara variabel. (Purnomo, 2012).

2.3.6 Persamaan Diferensial Linear

Suatu persamaan diferensial dikatakan linear jika : (i) Setiap variabel tak-bebas dan turunan-turunannya berderajat (berpangkat) satu. (ii) Tidak ada perkalian antar variabel tak-bebas dan atau antar turunan-turunannya. Contoh dari persamaan diferensial linear adalah sebagai berikut :

$$x \frac{dy}{dx} + y = 7 \quad (2.3.2)$$

$$dy = (x + \cos x) dx \quad (2.3.3)$$

2.3.7 Persamaan Diferensial Non Linear

$$\frac{d^4x}{dt^4} + \frac{d^3x}{dt^3} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^5 = \sin x \quad (2.3.4)$$

$$(1.4) \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 - 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^6 + xy = 7 \quad (2.3.5)$$

2.4 Titik Ekuilibrium dan Kestabilannya

Pertimbangkan sebuah persamaan diferensial yang dinyatakan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4.1)$$

Titik x^* disebut sebagai titik tetap jika $f(x^*) = 0$ terpenuhi. Titik tetap adalah solusi yang tak bergantung pada t (konstan seiring waktu). Titik tetap juga dikenal sebagai titik kritis ataupun titik keseimbangan. Istilah titik tetap akan digunakan selanjutnya (Grimshaw, 1990).

Pada segmen ini, beragam konsep matematika dijelaskan untuk menganalisis stabilitas titik tetap dalam model SEIR yang berhubungan dengan penyebaran infeksi pneumonia. Amati sistem dinamik berikut ini:

$$\frac{dz}{dt} = h(z), \quad (2.4.2)$$

dengan $z : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dan $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sebagai contoh, sistem (2.4.2) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dz}{dt} = Bz, \quad (2.4.3)$$

dengan $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, apabila h bersifat linier. Sebuah titik $z_e \in \mathbb{R}^n$ dikatakan sebagai titik stabil dari sistem (2.2.1) jika $h(z_e) = 0$.

Definisi 2.4.1 (1) Suatu titik tetap z_e dari sistem (2.4.1) dikatakan *stabil pada $t = t_0$* jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat δ sedemikian sehingga:

$$\|z(t_0) - z_e\| < \delta \Rightarrow \|z(t) - z_e\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

(2) Suatu titik tetap z_e dari sistem (2.4.1) dikatakan *stabil asimtotik pada $t = t_0$* jika

ia stabil dan terdapat δ_1 sedemikian sehingga:

$$\|z(t_0) - z_e\| < \delta_1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t) - z_e\| = 0.$$

Kestabilan titik tetap dapat diketahui dengan cara melinearkan sistem nonlinier (2.2.1) di sekitar titik tetap z_e menggunakan metode deret Taylor. Dengan teknik pelinearan ini, perilaku sistem (2.2.1) di sekitar titik ekuilibrium z_e dapat diestimasi dengan menggunakan sistem linier berikut ini:

$$\frac{dy}{dt} = J_{z_e} y, \quad (2.4.6)$$

dengan $y \in \mathbb{R}^n$ dan J_{z_e} adalah matriks Jacobian sistem (2.1) di sekitar titik tetap z_e . Tipe kestabilan titik ekuilibrium tanpa penyakit E_0 ditentukan dengan melakukan pelinieran pada sistem persamaan (5) di sekitar E_0 , yang menghasilkan matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} -(\mu + \rho) & 0 & -\beta s & 0 \\ 0 & -(\gamma + \mu) & \beta s & 0 \\ 0 & \gamma & -(\mu + \varepsilon) & 0 \\ \rho & 0 & \varepsilon & -\mu \end{bmatrix}$$

Untuk menganalisis kestabilan E_0 , perlu dicari nilai eigen dari matriks $J(E_0)$ dengan cara menentukan

$$\det(J(E_0) - \lambda I) = 0,$$

di mana λ mewakili nilai eigen dan I adalah matriks identitas.

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -(\mu + \rho) & 0 & -\beta s & 0 \\ 0 & -(\gamma + \mu) & \beta s & 0 \\ 0 & \gamma & -(\mu + \varepsilon) & 0 \\ \rho & 0 & \varepsilon & -\mu \end{bmatrix} \right) = 0$$

atau dapat dituliskan sebagai:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + \mu + \rho & 0 & \beta s & 0 \\ 0 & \lambda + \gamma + \mu & -\beta s & 0 \\ 0 & -\gamma & \lambda + \mu + \varepsilon & 0 \\ -\rho & 0 & -\varepsilon & \lambda + \mu \end{bmatrix} = 0$$

Teorema 2.4.2 Misalkan z_e adalah titik tetap hiperbolik dari sistem nonlinier (2.2.1) dan J_{z_e} adalah Jacobian h di sekitar titik z_e . Titik tetap z_e adalah stabil asimtotik jika bagian riil dari semua nilai eigen matriks J_{z_e} adalah negatif.

Penentuan nilai eigen dari matriks J_{z_e} memerlukan penghitungan akar dari polinomial karakteristiknya. Untuk menentukan apakah persamaan karakteristik memiliki akar dengan bagian riil negatif atau tidak, kriteria Routh-Hurwitz berikut ini dapat digunakan.

Teorema 2.4.3 Kriteria Routh-Hurwitz

Misalkan $a_1, a_2, \dots, a_n$ merupakan bilangan riil dengan $a_j = 0$ untuk $j > n$. Semua solusi dari polinomial tersebut

$$\gamma^n + a_1\gamma^{n-1} + a_2\gamma^{n-2} + \dots + a_{n-2}\gamma^2 + a_{n-1}\gamma + a_n = 0$$

memiliki komponen riil yang negatif jika dan hanya jika determinan dari matriks tersebut

$$H_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k \end{bmatrix}$$

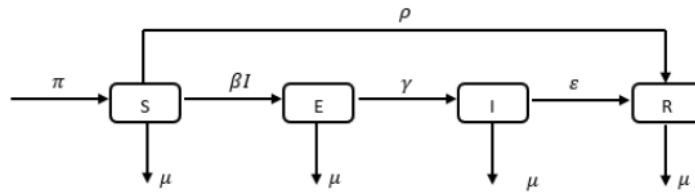
adalah positif untuk setiap $k = 1, 2, \dots, n$.

2.5 Model SEIR Penyebaran Penyakit Pneumonia

Model SEIR tentang penyebaran pneumonia pada anak di bawah lima tahun dengan dampak vaksinasi terdiri dari beberapa kategori yang termasuk sub populasi yaitu *Susceptible* (S) adalah kelompok orang yang berisiko (sehat tetapi mampu terinfeksi penyakit), *Exposed* (E) adalah kelompok orang yang telah terpapar, *Infected* (I) adalah kelompok orang yang menderita infeksi dan bisa pulih dari penyakit tersebut, dan *Recovered* (R) adalah kelompok orang yang telah sembuh dan memiliki

kekebalan terhadap penyakit. Keempat kelompok ini dapat didefinisikan dalam bentuk matematis seperti pada persamaan dan ilustrasi berikutnya.

$$S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N$$



Gambar 2.1 Diagram model SEIR penyebaran penyakit pneumonia.

Parameter α menunjukkan laju penyebaran penyakit dari individu (*susceptible*) kepada individu yang rentan (*exposed*). Parameter γ adalah laju peralihan dari kondisi (*Exposed*) ke dalam kondisi (*Infected*). Sedangkan λ menjelaskan tentang penularan antara (*Infected*) dan (*Recovered*) [Side dkk, [2021]].

Adapun penjelasan dari Gambar 1 dapat dilihat dibawah ini

Penjelasan Variabel/Parameter

Variabel/Parameter	Keterangan
$S(t)$	Total individu yang rentan (sehat tetapi bisa terinfeksi)
$E(t)$	Total individu yang terdeteksi tetapi belum terinfeksi
$I(t)$	Total individu yang terinfeksi (sudah menjadi pneumonia)
$R(t)$	Total individu yang telah sembuh atau pulih lewat vaksinasi
π	Tingkat kelahiran
μ	Tingkat kematian
βi	Tingkat penularan dari individu rentan menjadi individu laten
γ	Tingkat individu yang terinfeksi
ε	Tingkat kesembuhan dari setiap orang yang terinfeksi
ρ	Proporsi banyaknya divaksinasi
N	Total seluruh populasi

Berdasarkan asumsi dan hubungan antara variabel dan parameter pada Gambar 1 dapat dijelaskan pada sistem persamaan (4).

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \pi(1 - \rho)N - \left(\frac{\beta I}{N} + \mu + \rho \right) S, \\
\frac{dE}{dt} &= \frac{\beta IS}{N} - (\mu + \gamma)E, \\
\frac{dI}{dt} &= \gamma E - (\mu + \varepsilon)I, \\
\frac{dR}{dt} &= \varepsilon I + \rho S - \mu R.
\end{aligned} \tag{4}$$

dengan $N = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ adalah total populasi.

Untuk menyederhanakan sistem persamaan (4), dapat digunakan penskalaan dengan menyederhanakan notasi, dimisalkan

$$s = \frac{S}{N}, \quad e = \frac{E}{N}, \quad i = \frac{I}{N}, \quad r = \frac{R}{N}.$$

Sehingga sistem persamaan (4) dapat disederhanakan seperti sistem persamaan (5).

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= \pi(1 - \rho) - (\beta i + \mu + \rho)s, \\
\frac{de}{dt} &= \beta is - (\gamma + \mu)e, \\
\frac{di}{dt} &= \gamma e - (\mu + \varepsilon)i, \\
\frac{dr}{dt} &= \varepsilon i + \rho s - \mu r.
\end{aligned} \tag{5}$$

2.6 Bilangan Reproduksi (R_0)

Bilangan reproduksi model matematika SEIR untuk penyakit pneumonia dengan vaksinasi diperoleh menggunakan metode *next generation matrix* seperti dibawah ini

$$K = FV^{-1}$$

$$\begin{aligned}
F &= \begin{pmatrix} 0 & \beta S^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma + \mu & 0 \\ -\gamma & \mu + \varepsilon \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \beta S^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mu + \varepsilon}{(\gamma + \mu)(\mu + \varepsilon)} & 0 \\ \frac{\gamma}{(\gamma + \mu)(\mu + \varepsilon)} & \frac{1}{\mu + \varepsilon} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\pi(1-\rho)\beta\gamma}{(\mu+\rho)(\gamma+\mu)(\mu+\varepsilon)} & \frac{\pi(1-\rho)\beta}{(\mu+\rho)(\rho+\varepsilon)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bilangan reproduksi (R_0) adalah angka rata-rata untuk infeksi yang ditularkan oleh satu individu terinfeksi selama periode infeksi ke seluruh populasi yang rentan (Diekmann & Heesterbeek, 2000).

Jika nilai $R_0 < 1$, ini menunjukkan bahwa infeksi penyakit akan menyerang di bawah satu orang yang rentan, sehingga ada kemungkinan bahwa penyakit tersebut akan hilang dari populasi. Jika $R_0 > 1$, orang yang terinfeksi akan menularkan kepada lebih dari satu orang yang rentan. Sementara itu, jika $R_0 = 1$, individu yang terinfeksi hanya akan menularkan kepada satu orang saja.

Angka reproduksi dapat dihitung dengan cara mencari nilai eigen dari matriks Jacobian pada sistem persamaan (Model) yang telah ditentukan di titik ekuilibrium saat penyakit tidak ada.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Tahapan Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kuantitatif dengan metode studi literatur. Pendekatan ini bertujuan untuk menganalisis dinamika penyebaran penyakit pneumonia menggunakan model matematika SEIR (Susceptible–Exposed–Infected–Recovered) dengan mempertimbangkan pengaruh vaksinasi.

Tahapan penelitian ini dilakukan melalui beberapa tahapan sebagai berikut:

1. Identifikasi Masalah

Pada tahap ini dilakukan pengumpulan informasi dan data terkait penyebaran penyakit pneumonia di Indonesia, baik dari Kementerian Kesehatan Republik Indonesia (Kemenkes RI), World Health Organization (WHO), maupun literatur ilmiah lain yang relevan. Selanjutnya dilakukan identifikasi terhadap variabel-variabel yang berpengaruh terhadap penyebaran penyakit, yaitu:

- $S(t)$: individu sehat tetapi rentan terhadap pneumonia (susceptible),
- $E(t)$: individu yang terpapar namun belum menular (exposed),
- $I(t)$: individu yang terinfeksi dan dapat menularkan (infected),
- $R(t)$: individu yang telah sembuh (recovered).

Tujuan tahap ini adalah untuk memahami bagaimana pengaruh vaksinasi dan pengobatan terhadap tingkat penyebaran pneumonia di masyarakat.

2. Pembentukan Asumsi Model

Model dibangun berdasarkan beberapa asumsi sebagai berikut:

- (a) Populasi memiliki sifat tertutup, perubahan jumlah individu hanya disebabkan oleh kelahiran dan kematian yang alami.
- (b) Penyakit pneumonia dapat menyebar melalui interaksi langsung antara orang yang rentan dan mereka yang terinfeksi.
- (c) Individu laten (E) dapat sembuh secara alami atau berkembang menjadi terinfeksi (I).
- (d) Individu terinfeksi (I) dapat melakukan vaksinasi dan berpotensi sembuh (R).
- (e) Vaksinasi mampu menurunkan jumlah individu rentan terhadap infeksi.

3. Pembentukan Model Matematika

Berdasarkan asumsi di atas, model SEIR direpresentasikan dengan sistem persamaan diferensial nonlinier:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \pi(1 - \rho)N - \left(\frac{\beta I}{N} + \mu + \rho \right) S, \\
 \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta IS}{N} - (\mu + \gamma)E, \\
 \frac{dI}{dt} &= \gamma E - (\mu + \varepsilon)I, \\
 \frac{dR}{dt} &= \varepsilon I + \rho S - \mu R.
 \end{aligned} \tag{4}$$

dengan $N = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ adalah total populasi.

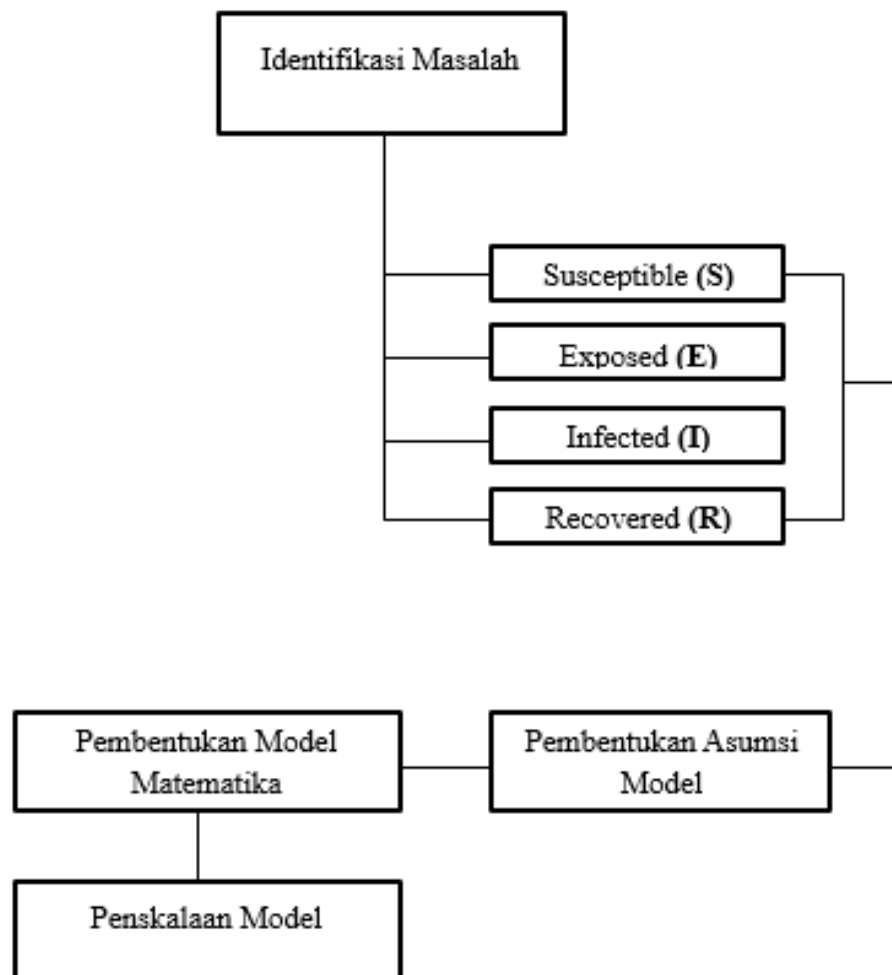
4. Penskalaan Model

Untuk mempermudah analisis, digunakan bentuk proporsi dengan:

$$s = \frac{S}{N}, \quad e = \frac{E}{N}, \quad i = \frac{I}{N}, \quad r = \frac{R}{N}.$$

Sehingga model menjadi:

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{dt} &= \pi(1 - \rho) - (\beta i + \mu + \rho)s, \\
 \frac{de}{dt} &= \beta is - (\gamma + \mu)e, \\
 \frac{di}{dt} &= \gamma e - (\mu + \varepsilon)i, \\
 \frac{dr}{dt} &= \varepsilon i + \rho s - \mu r.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$



Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan penjelasan di bab IV mengenai model SEIR untuk penyakit pneumonia dengan penerapan vaksinasi, dapat disimpulkan hal-hal berikut:

1. Model penyebaran infeksi pneumonia menggunakan pendekatan SEIR dengan vaksinasi dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = \pi(1 - \rho) - (\beta I + \mu + \rho)S$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - (\gamma + \mu)E,$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma E - (\mu + \epsilon)I,$$

$$\frac{dR}{dt} = \epsilon I + \rho S - \mu R.$$

2. Titik keseimbangan terbagi menjadi dua jenis, yaitu titik keseimbangan yang tanpa penyakit dan titik keseimbangan yang berhubungan dengan penyakit endemik. Titik keseimbangan tanpa penyakit $(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}) = \left(\frac{\pi(1-\rho)}{(\mu+\rho)}, 0, 0 \right)$. Sedangkan titik ekuilibrium endemik penyakit adalah $(S^*, E^*, I^*) = \left(\frac{(\gamma+\mu)(\mu+\epsilon)}{\gamma\beta}, \frac{\pi(1-\rho)}{\gamma+\mu} - \frac{(\mu+\epsilon)(\mu+\rho)}{\gamma\beta}, \frac{\pi(1-\rho) - \frac{(\mu+\rho)(\gamma+\mu)(\mu+\epsilon)}{\gamma\beta}}{\frac{(\gamma+\mu)(\mu+\epsilon)}{\gamma}} \right)$.
3. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) Pada kondisi $\epsilon = 0,008$, diperoleh nilai $R_0 > 1$ untuk $\rho = 0,1$ dan $\rho = 0,5$, yang mengindikasikan bahwa penyakit masih berpotensi menyebar dan dapat menjadi endemik di dalam populasi. Namun, ketika $\rho = 0,9$, nilai $R_0 < 1$, sehingga penyakit cenderung menghilang dari populasi. Selanjutnya, pada nilai $\epsilon = 0,03$ dan $\epsilon = 0,075$, pola yang sama juga terlihat, yaitu semakin besar nilai ρ , maka nilai R_0 semakin kecil. Bahkan, untuk $\rho = 0,9$, diperoleh nilai $R_0 < 1$ pada seluruh

nilai ε yang ditinjau. Hal ini menunjukkan bahwa peningkatan parameter ρ sangat efektif dalam mengendalikan penyebaran penyakit.

4. Proporsi Vaksinasi Minimum pada nilai $\varepsilon = 0,043$ dan $\varepsilon = 0,075$, yaitu semakin besar nilai ρ , maka nilai R_0 semakin kecil. Pada nilai ρ yang rendah, diperlukan proporsi vaksinasi minimum untuk mengendalikan penyebaran penyakit. Namun, ketika nilai ρ meningkat hingga $\rho = 0,9$, diperoleh nilai $R_0 < 1$ untuk seluruh nilai ε yang ditinjau, sehingga vaksinasi tambahan tidak lagi diperlukan.

DAFTAR PUSTAKA

- Apriani, D., Wasono., & Huda, M.N. (2022). Penerapan metode Adams-Bashforth-Moulton pada persamaan logistik dalam memprediksi pertumbuhan penduduk di Provinsi Kalimantan Timur. *Jurnal Eksponensial*, 13(2), 95–102.
- Aprilia, R., Faisal, F., Irwandi, I., Suharni, S., & Efriza, E. (2024). Tinjauan literatur: Faktor risiko dan epidemiologi pneumonia pada balita. *Research in the Mathematical and Natural Sciences*, 3(3), 166-173
- Beta, M.A., Mokoginta K., & Nadiyyah A. (2022). Model Matematika SEIPRS penyebaran penyakit pneumonia pada balita. *Jurnal Inovasi Sains Teknologi dan Bisnis*, 1(1), 27-38
- Bohari, N.A., dan Siduppa, M.N. (2024). Kontrol optimal model matematika penyebaran penyakit pneumonia pada balita. *Jurnal Inovasi Sains Teknologi dan Bisnis*, 1(1), 1-4
- Muhafzan, Khairunnisa, Baqi, A. I. (2024). Kestabilan titik tetap model SEIR penyebaran penyakit tuberkulosis. *Jurnal Matematika UNAND*, 13(3), 149–156.
- Side S., Sanusi W., & Bohari, N.A. (2021). Pemodelan Matematika SEIR penyebaran penyakit pneumonia pada balita dengan pengaruh vaksinasi di Kota Makassar. *JMathCoS*, 4(1), 1-12
- Zhafran, A. M., Arnellis. (2022). Model Matematika SEIRS penyebaran penyakit pneumonia pada balita dengan pengaruh vaksinasi. *Journal of Mathematics UNP*, 7(3), 121–127.