

BI-DERIVASI JORDAN PADA RING POLINOMIAL

Skripsi

Oleh

**GALUH ENSA PUTRI
NPM. 2217031150**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

ABSTRACT

BI-DERIVASI JORDAN PADA RING POLINOMIAL

By

Galuh Ensa Putri

Given a ring R , an additive mapping d from R to R is called a derivation on the ring R if it satisfies Leibniz's rule. As an extension of this concept, a Jordan bi-derivation on a polynomial ring is defined as a generalization of a bi-derivation and Jordan derivation by weakening Leibniz's condition to Jordan's condition. This research aims to examine the construction of Jordan bi-derivatives on polynomial rings generated by the existence of Jordan bi-derivatives on rings. The results show that Jordan bi-derivatives on polynomial rings are closely related to bi-derivatives. Furthermore, it is shown that the set of all Jordan bi-derivatives on polynomial rings forms a module over the ring of integers $\mathbb{Z}$.

Keywords: Polynomial ring, derivation, Jordan derivation, bi-derivation, Jordan bi-derivation

ABSTRAK

BI-DERIVASI JORDAN PADA RING POLINOMIAL

Oleh

Galuh Ensa Putri

Diberikan ring R , suatu pemetaan aditif d dari R ke R disebut derivasi pada ring R jika memenuhi aturan Leibniz. Sebagai pengembangan dari konsep tersebut, didefinisikan bi-derivasi Jordan pada ring polinomial sebagai bentuk generalisasi dari bi-derivasi dan derivasi Jordan dengan melemahkan syarat Leibniz menjadi syarat Jordan. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji konstruksi bi-derivasi Jordan pada ring polinomial yang dibangkitkan oleh keberadaan bi-derivasi Jordan pada ring. Hasil penelitian menunjukkan bahwa bi-derivasi Jordan pada ring polinomial memiliki hubungan erat dengan bi-derivasi. Selain itu, ditunjukkan bahwa himpunan semua bi-derivasi Jordan pada ring polinomial membentuk modul atas ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$.

Kata-kata kunci: Ring polinomial, derivasi, derivasi Jordan, bi-derivasi, bi-derivasi Jordan.

BI-DERIVASI JORDAN PADA RING POLINOMIAL

GALUH ENSA PUTRI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

Judul Skripsi : **BI-DERIVASI JORDAN PADA RING
POLINOMIAL**

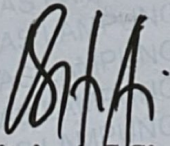
Nama Mahasiswa : **Galuh Ensa Putri**

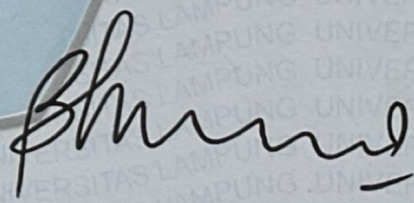
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031150**

Program Studi : **Matematika**

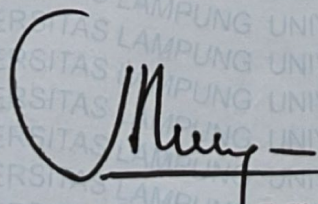
Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**




Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP. 198406272006042001


Dr. Bernadhita H. S. U., S.Si., M.Sc.
NIP. 199206302023212034

2. Ketua Jurusan Matematika

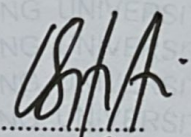

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua

: Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.



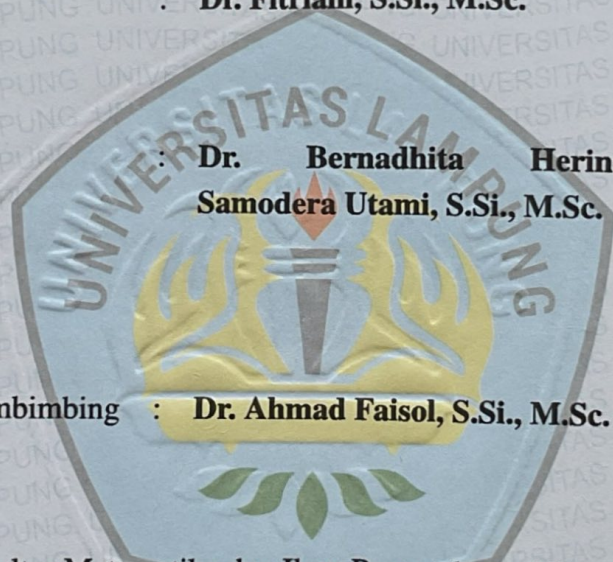
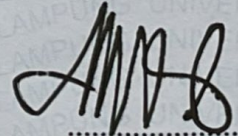
Sekretaris

: Dr. Bernadhita Herindri
Samodera Utami, S.Si., M.Sc.



Penguji

Bukan Pembimbing : Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.



2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.

NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 29 Januari 2026

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Galuh Ensa Putri**
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031150**
Jurusan : **Matematika**
Judul Skripsi : **Bi-Derivasi Jordan pada Ring Polinomial**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 29 Januari 2026



Galuh Ensa Putri

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Galuh Ensa Putri yang lahir di Lampung Timur pada tanggal 06 November 2003. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara, putri dari pasangan Samsul Bachri dan Endang Sulistyarini.

Penulis memulai pendidikan formal di TK Cendana pada tahun 2008 dan menyelesaikannya pada tahun 2010. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di SD Negeri 1 Sumberagung pada tahun 2010 sampai dengan 2016. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 1 Batanghari pada tahun 2016 sampai dengan tahun 2019, dan menyelesaikan pendidikan di SMA Negeri 1 Batanghari pada tahun 2022.

Pada tahun 2022, penulis diterima di program studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Pada akhir tahun 2024, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di PT Great Gian Pineapple selama 40 hari sampai dengan Januari 2025. Selain itu, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 30 hari di Kelurahan Kuripan, Kecamatan Teluk Betung Barat, Kota Bandar Lampung, dari Juli 2025 sampai dengan Agustus 2025.

Selama masa studi, penulis menunjukkan ketekunan dan dedikasi dalam menyelesaikan berbagai tugas akademik. Penulis berharap hasil dari penelitian ini dapat memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya di bidang Struktur Aljabar.

KATA INSPIRASI

“Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya.”

(QS. Al-Baqarah: 286)

“Boleh jadi kamu tidak menyenangi sesuatu, padahal itu baik bagimu. Dan boleh jadi kamu menyenangi sesuatu, padahal itu tidak baik bagimu. Allah mengetahui, sedangkan kamu tidak mengetahui.”

(QS. Al-Baqarah: 216)

“Maka sesungguhnya beserta kesulitan ada kemudahan, sesungguhnya beserta kesulitan itu ada kemudahan.”

(QS. Al-Insyirah: 5-6)

“Life can be heavy, especially if you try to carry it all at once. Part of growing up and moving into new chapters of your life is about catch and release.”

(Taylor Swift)

PERSEMBAHAN

Alhadulillahirobbil'alamin

Dengan mengucapkan puji dan syukur atas kehadiran Allah Subhanahu Wata'ala karena limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya.

Tak lupa shalawat beserta salam selalu tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu Alaihi Wasallam.

Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terima kasih saya kepada:

Bapak dan Ibuku Tercinta

Terima kasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terima kasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terima kasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Bi-Derivasi Jordan Pada Ring Polinomial" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sepanjang proses penyusunan skripsi ini.
2. Dr. Bernadhita Herindri Samodera Utami, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing 2 yang telah memberikan arahan, dukungan, serta doa sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan saran, kritik, serta evaluasi yang membangun sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
4. Ibu Dr. Khoirin Nisa, M.Si. selaku dosen Pembimbing Akademik.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Seluruh guru TK, SD, SMP, dan SMA yang telah mengajarkan dan memberikan ilmu hingga penulis bisa menduduki bangku perkuliahan.
8. Bapak Samsul Bachri dan Ibu Endang Sulistyarini serta saudara kandung saya, Samsi Wardany dan Clara Aprillia yang sangat saya sayangi dan cintai yang selalu mengirimkan doa, semangat, nasihat, dan juga terima kasih sudah selalu ada disisi penulis mendampingi penulis sampai dititik ini.
9. Teman-teman terdekat sejak tahun pertama kuliah, yang telah menemani dan memberi dukungan selama perkuliahan sampai pada pembuatan skripsi ini selesai.
10. Teman-teman sepembimbingan yang sudah membersamai saya dalam setiap bimbingan dan saling membantu ketika dalam kesulitan.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 29 Januari 2026

Galuh Ensa Putri

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Tujuan Penelitian	3
1.3 Manfaat Penelitian	3
II TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Grup	4
2.2 Ring	9
2.3 Ring Polinomial	20
2.4 <i>Direct Sum</i> pada Ring	27
2.5 Derivasi	28
2.6 Bi-Derivasi	31
2.7 Derivasi Jordan	36
2.8 Bi- Derivasi Jordan	37
III METODE PENELITIAN	43
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	43
3.2 Tahap Penelitian	43
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	45
4.1 Bi-Derivasi Jordan pada Ring Polinomial	45
4.2 Kaitan Bi-Derivasi Jordan dan Bi-Derivasi	73
4.3 Sifat-sifat Bi-Derivasi Jordan	75
V KESIMPULAN DAN SARAN	82
5.1 Kesimpulan	82
5.2 Saran	82
DAFTAR PUSTAKA	83

DAFTAR GAMBAR

3.1 Langkah-langkah Penelitian	44
--	----

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Konsep turunan pertama kali dikembangkan dalam kalkulus pada abad ke-17, dimulai oleh Isaac Newton pada tahun 1670-an melalui gagasan tentang fluks, dan tak lama setelah itu Gottfried Wilhelm Leibniz pada tahun 1680-an dengan konsep diferensial (Archibald dkk., 2005). Konsep ini kemudian diperluas ke dalam struktur aljabar seperti ring, sebagai pemetaan yang mempertahankan struktur ring dengan mengikuti aturan turunan dalam kalkulus. Konsep turunan pada ring dalam aljabar abstrak pertama kali dipelajari secara formal oleh Posner (1957) mengenai derivasi pada ring prima dan keterkaitannya dengan struktur ring, yang kemudian menjadi dasar penting bagi pengembangan studi derivasi dalam teori ring. Derivasi pada ring didefinisikan sebagai suatu fungsi d dari ring R yang memetakan ke dirinya sendiri, serta memenuhi sifat-sifat tertentu yaitu sifat aditif dan aturan Leibniz yaitu untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ (Ali dkk., 2024).

Setelah konsep derivasi didefinisikan oleh Posner, banyak peneliti mempelajari derivasi pada ring melalui berbagai generalisasi. Salah satu bentuk generalisasi tersebut adalah konsep derivasi Jordan yang diperkenalkan oleh Pascual Jordan pada tahun 1934 dalam konteks aljabar (Mccrimmon, 1978). Kajian mengenai derivasi Jordan terus berkembang setelah diperkenalkan oleh Pascual Jordan, di antaranya Herstein (1957) pada penelitian derivasi Jordan dari ring prima. Brešar dan Vukman (1988) menyajikan bukti singkat dari hasil yang sudah dikenal oleh Herstein yang menyatakan bahwa setiap derivasi Jordan pada ring prima dengan karakteristik bukan dua adalah sebuah derivasi. Mehdipour dkk. (2023) mempelajari jenis-jenis derivasi Jordan dari aljabar Banach A dengan identitas kanan e . Penelitian terbaru oleh Sitompul (2025) tentang derivasi Jordan pada ring polinomial $R[x]$, dengan mengkaji sifat-sifatnya, termasuk hubungan antara derivasi Jordan pada ring R dan ring polinomial $R[x]$.

Perkembangan kajian derivasi Jordan mendorong para peneliti untuk memperluas pembahasan ke bentuk generalisasi yang lebih kompleks, salah satunya Maksa (1980) memperluas kajian tersebut melalui penelitiannya mengenai fungsi bi-aditif simetris serta teorema representasi bi-derivasi dalam ruang Hilbert. Selanjutnya, penelitian mengenai bi-derivasi dikembangkan oleh Vukman (1989) yang mengkaji bi-derivasi simetris pada ring prima dan semi-prima serta meneliti keterkaitannya dengan pemetaan yang saling komutatif. Kemudian, Jung dan Park (2011) membuktikan stabilitas dari bi-derivasi pada aljabar Banach. Lalu, Kayis dan Ozbal (2016) menyelidiki sifat-sifat bi-derivasi simetris pada B - aljabar. Yazarlı dan Koç (2022) memperkenalkan konsep bi-derivasi simetris pada aljabar bitonik dan menyelidiki sifat-sifatnya, serta Shujat dan Fallatah (2022) membuktikan beberapa teorema tentang bi-derivasi simetris pada ring prima. Penelitian terbaru oleh Bedir (2024) meneliti konsep bi-derivasi simetris dari ideal dua sisi tidak nol suatu ring semiprima dan menganalisis beberapa sifat terkait dan Söğütçü (2025) membuktikan bahwa *trace* bi-derivasi merupakan pemetaan yang komutatif terhadap ideal dari ring semiprima pada ideal dari ring.

Salah satu jenis derivasi yang menjadi fokus utama dalam penelitian ini adalah bi-derivasi Jordan. Konsep bi-derivasi Jordan muncul sebagai generalisasi dari keduanya, yaitu pemetaan bi-aditif dan memenuhi sifat distribusi terhadap perkalian Jordan, dalam bentuk dua variabel. Kajian mengenai bi-derivasi Jordan dilakukan oleh Çeven dan Çiloğlu (2018) menunjukkan bahwa untuk sebuah ring prima bebas 2-torsi dan bebas 3-torsi, dan jika ada bi-derivasi Jordan kiri simetris tidak nol, maka R adalah komutatif. Mehdipour (2021) mengkarakterisasi bi-derivasi simetris pada aljabar grup dan membuktikan bahwa setiap bi-derivasi Jordan simetris pada adalah bi-derivasi simetris. Şahin (2022) membuktikan beberapa hasil yang berkaitan dengan bi-derivasi Jordan skew simetris, sebagai generalisasi dari bi-derivasi Jordan simetris. Kemudian, Şahin dan Kılıç (2023) menyelidiki sifat-sifat bi-derivasi Jordan skew simetris yang dibangun melalui generalisasi dari bi-derivasi Jordan simetris pada ring prima.

Penelitian terbaru yang membahas bi-derivasi Jordan yaitu, Lalitha (2024) mengidentifikasi kondisi di mana bi-derivasi Jordan (α, β) simetris berubah menjadi bi-derivasi simetris (α, β) dan Ahmed dkk. (2024) mengkarakterisasi bi-derivasi Jordan simetris (α, β) . Berdasarkan pengembangan penelitian bi-derivasi Jordan yang telah dilakukan sebelumnya, belum ada peneliti yang membahas tentang bi-derivasi Jordan pada ring polinomial. Dengan demikian, studi tentang bi-derivasi Jordan pada ring polinomial merupakan bagian dari perkembangan teori derivasi

dalam aljabar. Oleh karena itu, pentingnya penelitian lebih lanjut mengenai sifat-sifat dan peran bi-derivasi Jordan pada ring polinomial.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. menyelidiki sifat-sifat bi-derivasi Jordan pada ring polinomial;
2. menyelidiki hubungan antara bi-derivasi Jordan dengan bi-derivasi pada ring polinomial;
3. mengkonstruksi contoh-contoh bi-derivasi Jordan pada ring polinomial.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang ingin diperoleh dari penelitian ini yaitu:

1. mengetahui sifat-sifat bi-derivasi Jordan pada ring polinomial;
2. mengetahui hubungan antara bi-derivasi Jordan dengan bi-derivasi pada ring polinomial;
3. menambah referensi penelitian selanjutnya mengenai bi-derivasi Jordan pada ring polinomial.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijabarkan konsep-konsep dasar yang menjadi landasan teori untuk mendukung pembahasan pada bagian selanjutnya.

2.1 Grup

Salah satu langkah penting untuk mendalami konsep-konsep yang lebih kompleks dalam teori aljabar adalah memahami struktur dasar dalam aljabar abstrak, yaitu grup. Sebelum membahas pengertian grup, berikut diberikan definisi operasi biner.

Definisi 2.1.1 Operasi biner $*$ pada himpunan S merupakan fungsi dari $S \times S$ ke S . Untuk setiap $(a, b) \in S \times S$, $*(a, b)$ di S dinotasikan dengan $a * b$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berdasarkan Definisi 2.1.1, berikut diberikan contoh operasi biner.

Contoh 2.1.2 Diberikan $S = 2\mathbb{Z}$ yaitu himpunan semua bilangan bulat genap. Didefinisikan operasi $*$ pada S dengan $x * y = x - y$, untuk setiap $x, y \in S$. Akan dibuktikan operasi pengurangan merupakan operasi biner pada S . Diberikan sebarang $x = 2m, y = 2n \in S$ dengan $m, n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}x * y &= x - y \\&= 2m - 2n \\&= 2(m - n) \in S.\end{aligned}$$

Dengan demikian, operasi pengurangan merupakan operasi biner pada S .

Struktur aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu dinamakan grup. Berikut ini diberikan definisi grup.

Definisi 2.1.3 Suatu grup $\langle G, * \rangle$ terdiri dari himpunan tak kosong G yang dilengkapi operasi biner $*$ yang didefinisikan pada G dan memenuhi aksioma berikut:

1. operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$;
2. terdapat elemen identitas e , yaitu untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$;
3. untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen invers $a' \in G$ sehingga berlaku $a * a' = a' * a = e$

(Fitriani dan Faisol, 2022).

Berdasarkan Definisi 2.1.3, berikut diberikan contoh grup.

Contoh 2.1.4 Diberikan himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$. Operasi penjumlahan didefinisikan dengan $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+np}{nq}$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Q}$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan berdasarkan sifat-sifat bilangan bulat (Faizah, 2019).

1. Diberikan sebarang $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Berdasarkan definisi operasi penjumlahan pada bilangan rasional didapat $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+np}{nq}$. Karena operasi perkalian dan penjumlahan dalam bilangan bulat bersifat tertutup maka pembilang dan penyebutnya merupakan bilangan bulat. Karena n dan q tidak nol maka nq juga tidak nol. Jadi, $\mathbb{Q}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.
2. Diberikan sebarang $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}$ dan $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. Akan ditunjukkan operasi $+$ sifat asosiatif,

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q} \right) + \frac{r}{s} &= \frac{mq + np}{nq} + \frac{r}{s} \\
 &= \left(\frac{(mq + np)s + (nq)r}{(nq)s} \right) \\
 &= \left(\frac{(mq)s + (np)s + (nq)r}{(nq)s} \right) \\
 &= \left(\frac{m(qs) + n(ps) + n(qr)}{n(qs)} \right) \\
 &= \frac{m}{n} + \frac{ps + qr}{qs} \\
 &= \frac{m}{n} + \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s} \right).
 \end{aligned}$$

Jadi, operasi $+$ sifat asosiatif.

3. Terdapat elemen $\frac{0}{1}$, untuk setiap $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, sehingga berlaku:

$$\begin{aligned}\frac{0}{1} + \frac{m}{n} &= \frac{0 \cdot n + 1 \cdot m}{1 \cdot n} \\ &= \frac{0 + m}{n} \\ &= \frac{m}{n},\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\frac{m}{n} + \frac{0}{1} &= \frac{m \cdot 1 + n \cdot 0}{n \cdot 1} \\ &= \frac{m + 0}{n} \\ &= \frac{m}{n}.\end{aligned}$$

Jadi, $\frac{0}{1}$ merupakan elemen identitas terhadap operasi $+$.

4. Diberikan sebarang $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Terdapat $\frac{-m}{n} \in \mathbb{Q}$, sehingga berlaku:

$$\begin{aligned}\frac{m}{n} + \frac{-m}{n} &= \frac{mn + n(-m)}{nn} \\ &= \frac{(m - m)n}{nn} \\ &= \frac{0 \cdot n}{nn} \\ &= \frac{0}{n} \\ &= \frac{0}{1},\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\frac{-m}{n} + \frac{m}{n} &= \frac{(-m)n + nm}{nn} \\ &= \frac{(m - m)n}{nn} \\ &= \frac{0 \cdot n}{nn} \\ &= \frac{0}{n} \\ &= \frac{0}{1}.\end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ terdapat invers dengan bentuk $\frac{-m}{n} \in \mathbb{Q}$ terhadap operasi $+$.

Terbukti $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ merupakan grup.

Berdasarkan sifat komutatif dari operasi biner dalam suatu grup, dapat dinyatakan bahwa jika suatu grup bersifat komutatif, maka hasil operasi antara dua elemen tidak bergantung pada urutan elemen tersebut. Selanjutnya, akan disajikan definisi dari grup komutatif.

Definisi 2.1.5 Grup $\langle G, * \rangle$ disebut grup Abel atau grup komutatif jika setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$ (Hamana, 2018).

Berdasarkan Definisi 2.1.5, berikut diberikan contoh grup komutatif.

Contoh 2.1.6 Diberikan himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ dengan operasi penjumlahan. Berdasarkan Contoh 2.1.4 terbukti $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ merupakan grup. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ merupakan grup komutatif.

Diberikan sebarang $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Berlaku:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq} = \frac{np + mq}{nq} = \frac{p}{q} + \frac{m}{n}$$

Terbukti $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ merupakan grup komutatif.

Himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner bersifat asosiatif akan membentuk suatu struktur baru yang disebut semigrup. Selanjutnya, diberikan definisi semigrup sebagai berikut.

Definisi 2.1.7 Diberikan suatu himpunan tak kosong G . G disebut semigrup jika dalam G didefinisikan suatu operasi biner $*$ sedemikian sehingga

1. himpunan G tertutup terhadap operasi biner $*$, yaitu $a * b \in G$, untuk setiap $a, b \in G$;
2. operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \in G$

(Larubun dan Persulesy, 2019).

Berdasarkan Definisi 2.1.7, berikut diberikan contoh semigrup.

Contoh 2.1.8 Diberikan $S = 2\mathbb{Z}$ yaitu himpunan semua bilangan bulat genap. Didefinisikan operasi $*$ dengan aturan $x * y = x + y$, untuk setiap $x, y \in S$. Akan ditunjukkan $\langle S, * \rangle$ merupakan suatu semigrup.

1. Diberikan sebarang $x = 2m, y = 2n, z = 2p$ dengan $m, n, p \in \mathbb{Z}$. Berlaku:

$$\begin{aligned} x * y &= x + y \\ &= 2m + 2n \\ &= 2(m + n) \in S. \end{aligned}$$

Jadi, S bersifat tertutup terhadap penjumlahan.

2. Diberikan sebarang $x = 2m, y = 2n, z = 2p$ dengan $m, n, p \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan sifat asosiatif berlaku pada S .

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x + y) + z \\ &= (2m + 2n) + 2p \\ &= 2m + 2n + 2p \\ &= 2m + (2n + 2p) \\ &= x + (y + z) \\ &= x * (y * z). \end{aligned}$$

Jadi, operasi penjumlahan bersifat asosiatif.

Terbukti bahwa $\langle S, * \rangle$ merupakan semigrup.

Seperti halnya himpunan yang memiliki himpunan bagian atau subset, pada grup juga demikian. Konsep ini penting untuk mengidentifikasi struktur-struktur kecil dalam grup yang lebih besar. Berikut diberikan definisi subgrup.

Definisi 2.1.9 Diberikan himpunan bagian H dari grup G yang tertutup terhadap operasi biner G . Himpunan H disebut subgrup G jika terhadap operasi biner yang sama pada G , H merupakan grup. Selanjutnya H subgrup G dinotasikan dengan $H \leq G$ atau $H < G$ yang berarti H subgrup G , tetapi $H \neq G$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berdasarkan Definisi 2.1.9, berikut diberikan contoh subgrup.

Contoh 2.1.10 Himpunan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan subgrup $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$, karena $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ dan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup.

2.2 Ring

Ring adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua buah operasi biner, yaitu penjumlahan $+$ dan perkalian $\cdot$ serta memenuhi aksioma tertentu. Struktur ini mengharuskan himpunan tersebut menjadi grup abelian di bawah operasi penjumlahan, yang berarti setiap elemen memiliki invers aditif dan memenuhi sifat komutatif. Selain itu, operasi perkalian harus bersifat asosiatif serta terhubung dengan penjumlahan melalui hukum distributif kiri dan kanan. Berikut diberikan definisi ring.

Definisi 2.2.1 Ring R adalah triple terurut $\langle R, +, \cdot \rangle$ dari himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner penjumlahan dan perkalian, yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $\langle R, + \rangle$ adalah grup Abel atau grup komutatif;
2. $\langle R, \cdot \rangle$ adalah semigrup (perkalian bersifat asosiatif);
3. perkalian bersifat distributif, yaitu $a(b + c) = ab + ac$ dan $(a + b)c = ac + bc$ untuk semua $a, b, c \in R$

(Grillet, 2007).

Berdasarkan Definisi 2.2.1, berikut diberikan contoh ring.

Contoh 2.2.2 Diberikan himpunan $R = \{m + n\sqrt{2} | m, n \in \mathbb{Z}\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa. Akan ditunjukkan bahwa $\langle R, +, \cdot \rangle$ merupakan suatu ring.

1. Akan ditunjukkan $\langle R, + \rangle$ merupakan grup Abel.

(a) Diberikan sebarang $x = m + n\sqrt{2}, y = p + q\sqrt{2} \in R$. Akan ditunjukkan R tertutup terhadap penjumlahan,

$$\begin{aligned} x + y &= (m + n\sqrt{2}) + (p + q\sqrt{2}) \\ &= m + n\sqrt{2} + p + q\sqrt{2} \\ &= m + p + n\sqrt{2} + q\sqrt{2} \\ &= (m + p) + (n + q)\sqrt{2} \in R. \end{aligned}$$

Jadi, R bersifat tertutup terhadap operasi $+$.

(b) Diberikan sebarang $x = m + n\sqrt{2}, y = p + q\sqrt{2}, z = r + s\sqrt{2} \in R$. Akan ditunjukkan operasi $+$ bersifat asosiatif, berlaku:

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= (m + n\sqrt{2} + p + q\sqrt{2}) + r + s\sqrt{2} \\ &= (m + p) + (n + q)\sqrt{2} + r + s\sqrt{2} \\ &= (m + p + r) + (n + q + s)\sqrt{2} \\ &= m + n\sqrt{2} + (p + r) + (q + s)\sqrt{2} \\ &= m + n\sqrt{2} + (p + q\sqrt{2} + r + s\sqrt{2}) \\ &= x + (y + z). \end{aligned}$$

Jadi, operasi $+$ bersifat asosiatif.

(c) Terdapat elemen $0 + 0\sqrt{2} \in R$, sehingga untuk setiap $x = m + n\sqrt{2} \in R$, sehingga berlaku:

$$\begin{aligned} (0 + 0\sqrt{2}) + (m + n\sqrt{2}) &= (0 + m) + (0 + n)\sqrt{2} \\ &= m + n\sqrt{2}, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} (m + n\sqrt{2}) + (0 + 0\sqrt{2}) &= (m + 0) + (n + 0)\sqrt{2} \\ &= m + n\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Jadi, $0 + 0\sqrt{2}$ merupakan elemen identitas terhadap operasi $+$.

- (d) Diberikan sebarang $x = m + n\sqrt{2} \in R$. Terdapat $-m - n\sqrt{2} \in R$, sehingga berlaku:

$$\begin{aligned}(m + n\sqrt{2}) + (-m - n\sqrt{2}) &= (m - m) + (n - n)\sqrt{2} \\ &= 0 + 0\sqrt{2},\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}(-m - n\sqrt{2}) + (m + n\sqrt{2}) &= (-m + m) + (-n + n)\sqrt{2} \\ &= 0 + 0\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Jadi, setiap elemen di R memiliki invers.

- (e) Diberikan sebarang $x = m + n\sqrt{2}, y = p + q\sqrt{2} \in R$. Akan ditunjukkan operasi $+$ bersifat komutatif,

$$\begin{aligned}x + y &= (m + n\sqrt{2}) + (p + q\sqrt{2}) \\ &= m + p + n\sqrt{2} + q\sqrt{2} \\ &= (m + p) + (n + q)\sqrt{2} \\ &= (p + m) + (q + n)\sqrt{2} \\ &= p + m + q\sqrt{2} + n\sqrt{2} \\ &= (p + q\sqrt{2}) + (m + n\sqrt{2}) \\ &= y + x.\end{aligned}$$

Jadi, operasi $+$ bersifat komutatif.

2. Akan ditunjukkan $\langle R, \cdot \rangle$ merupakan semigrup.

- (a) Diberikan sebarang $x = m + n\sqrt{2}, y = p + q\sqrt{2} \in R$. Akan ditunjukkan R tertutup terhadap perkalian,

$$\begin{aligned}x \cdot y &= (m + n\sqrt{2}) \cdot (p + q\sqrt{2}) \\ &= mp + mq\sqrt{2} + np\sqrt{2} + 2nq \\ &= mp + 2nq + mq\sqrt{2} + np\sqrt{2} \\ &= (mp + 2nq) + (mq + np)\sqrt{2} \in R.\end{aligned}$$

Jadi, R bersifat tertutup operasi perkalian.

- (b) Diberikan sebarang $x = m + n\sqrt{2}, y = p + q\sqrt{2} \in R$. Akan ditunjukkan operasi perkalian bersifat asosiatif,

$$\begin{aligned}
 (x \cdot y) \cdot z &= \left((m + n\sqrt{2}) \cdot (p + q\sqrt{2}) \right) \cdot (r + s\sqrt{2}) \\
 &= (m + n\sqrt{2}) \cdot (p + q\sqrt{2}) \cdot (r + s\sqrt{2}) \\
 &= (m + n\sqrt{2}) \cdot \left((p + q\sqrt{2}) \cdot (r + s\sqrt{2}) \right) \\
 &= x \cdot (y \cdot z).
 \end{aligned}$$

Jadi, operasi perkalian bersifat asosiatif.

3. Diberikan sebarang $x = m + n\sqrt{2}, y = p + q\sqrt{2}, z = r + s\sqrt{2} \in R$. Akan ditunjukkan perkalian bersifat distributif,

$$\begin{aligned}
 x(y + z) &= (m + n\sqrt{2}) \left((p + q\sqrt{2}) + (r + s\sqrt{2}) \right) \\
 &= (m + n\sqrt{2})(p + q\sqrt{2}) + (m + n\sqrt{2})(r + s\sqrt{2}) \\
 &= xy + xz,
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 (x + y)z &= \left((m + n\sqrt{2}) + (p + q\sqrt{2}) \right) (r + s\sqrt{2}) \\
 &= (m + n\sqrt{2})(r + s\sqrt{2}) + (p + q\sqrt{2})(r + s\sqrt{2}) \\
 &= xz + yz.
 \end{aligned}$$

Jadi, operasi perkalian bersifat distributif.

Terbukti $\langle R, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

Selanjutnya diberikan contoh lain sebagai berikut.

Contoh 2.2.3 Diberikan himpunan A merupakan subset dari matriks berukuran 2×2 yang entri-entrinya bilangan bulat, $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid a, c \in \mathbb{Z} \right\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian. Akan ditunjukkan bahwa $\langle A, +, \cdot \rangle$ merupakan suatu ring.

Diberikan sebarang $X = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \in A$.

1. Akan ditunjukkan $\langle A, + \rangle$ merupakan grup Abel.

(a) Akan ditunjukkan A tertutup terhadap penjumlahan,

$$\begin{aligned} X + Y &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ c_1 + c_2 & 0 \end{bmatrix} \in A. \end{aligned}$$

Jadi, A bersifat tertutup terhadap operasi $+$.

(b) Akan ditunjukkan operasi $+$ bersifat asosiatif, berlaku:

$$\begin{aligned} (X + Y) + Z &= \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ c_1 + c_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 + a_3 & 0 \\ c_2 + c_3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= X + (Y + Z). \end{aligned}$$

Jadi, operasi $+$ bersifat asosiatif.

(c) Terdapat elemen $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A$, untuk setiap $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \in A$, berlaku:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 0 & 0 \\ c + 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + a & 0 \\ 0 + c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}.$$

Jadi, A memiliki elemen identitas terhadap operasi $+$.

(d) Terdapat $\begin{bmatrix} -a & 0 \\ -c & 0 \end{bmatrix} \in A$, untuk setiap $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \in A$, berlaku:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & 0 \\ -c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - a & 0 \\ c - c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a + a & 0 \\ -c + c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jadi, setiap elemen di A memiliki invers.

(e) Akan ditunjukkan operasi $+$ bersifat komutatif,

$$\begin{aligned} X + Y &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ c_1 + c_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_2 + a_1 & 0 \\ c_2 + c_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= Y + X. \end{aligned}$$

Jadi, operasi $+$ bersifat komutatif.

2. Akan ditunjukkan $\langle A, \cdot \rangle$ merupakan semigrup.

(a) Akan ditunjukkan A tertutup terhadap perkalian,

$$X \cdot Y = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ c_1 a_2 & 0 \end{bmatrix} \in A.$$

Jadi, A bersifat tertutup operasi perkalian.

(b) Akan ditunjukkan operasi perkalian bersifat asosiatif,

$$\begin{aligned}
 (X \cdot Y) \cdot Z &= \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ c_1 a_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_3 & 0 \\ c_1 a_2 a_3 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
 X \cdot (Y \cdot Z) &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 a_3 & 0 \\ c_2 a_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_3 & 0 \\ c_1 a_2 a_3 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Jadi, operasi perkalian bersifat asosiatif.

3. Akan ditunjukkan perkalian bersifat distributif,

$$\begin{aligned}
 X(Y + Z) &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 + a_3 & 0 \\ c_2 + c_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1(a_2 + a_3) & 0 \\ c_1(a_2 + a_3) & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 a_2 + a_1 a_3 & 0 \\ c_1 a_2 + c_1 a_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ c_1 a_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 a_3 & 0 \\ c_1 a_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= XY + XZ,
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 (X + Y)Z &= \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ c_1 + c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (a_1 + a_2)a_3 & 0 \\ (c_1 + c_2)a_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1a_3 + a_2a_3 & 0 \\ c_1a_3 + c_2a_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1a_3 & 0 \\ c_1a_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2a_3 & 0 \\ c_2a_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= XZ + YZ.
 \end{aligned}$$

Jadi, operasi perkalian bersifat distributif.

Terbukti $\langle A, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

Selanjutnya ring yang dilengkapi sifat komutatif terhadap perkalian disebut ring komutatif, yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.4 Ring R disebut ring komutatif jika R komutatif terhadap perkalian, yaitu untuk setiap $r, s \in R$ berlaku $rs = sr$ (Wahyuni dkk., 2021).

Berdasarkan Definisi 2.2.4, berikut diberikan contoh ring komutatif.

Contoh 2.2.5 Diberikan himpunan $R = 2\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian. Akan ditunjukkan bahwa $\langle R, +, \cdot \rangle$ merupakan suatu ring komutatif.

1. Akan ditunjukkan $\langle R, + \rangle$ merupakan grup Abel.

(a) Diberikan sebarang $x = 2a, y = 2b \in R$. Akan ditunjukkan R tertutup terhadap penjumlahan,

$$x + y = 2a + 2b = 2(a + b) \in R.$$

Jadi, R bersifat tertutup terhadap operasi $+$.

- (b) Diberikan sebarang $x = 2a, y = 2b, z = 2c \in R$. Akan ditunjukkan operasi $+$ bersifat asosiatif, berlaku:

$$\begin{aligned}
 (x + y) + z &= (2a + 2b) + 2c \\
 &= 2(a + b) + 2c \\
 &= 2(a + b + c) \\
 &= 2a + 2(b + c) \\
 &= 2a + (2b + 2c) \\
 &= x + (y + z).
 \end{aligned}$$

Jadi, operasi $+$ bersifat asosiatif.

- (c) Terdapat elemen $0 \in R$, sehingga untuk setiap $x = 2a \in R$, sehingga berlaku:

$$0 + 2a = 2a,$$

dan

$$2a + 0 = 2a.$$

Jadi, 0 merupakan elemen identitas terhadap operasi $+$.

- (d) Diberikan sebarang $x = 2a \in R$. Terdapat $-2a \in R$, sehingga berlaku:

$$2a + (-2a) = 2a - 2a = 2(a - a) = 0,$$

dan

$$(-2a) + (2a) = -2a + 2a = 2(-a + a) = 0.$$

Jadi, setiap elemen di R memiliki invers.

- (e) Diberikan sebarang $x = 2a, y = 2b \in R$. Akan ditunjukkan operasi $+$ bersifat komutatif,

$$\begin{aligned}
 x + y &= 2a + 2b \\
 &= 2(a + b) \\
 &= 2(b + a) \\
 &= 2b + 2a \\
 &= y + x.
 \end{aligned}$$

Jadi, operasi $+$ bersifat komutatif.

2. Akan ditunjukkan $\langle R, \cdot \rangle$ merupakan semigrup.

(a) Diberikan sebarang $x = 2a, y = 2b \in R$. Akan ditunjukkan R tertutup terhadap perkalian,

$$x \cdot y = 2a \cdot 2b = 4ab = 2(2ab) \in R.$$

Jadi, R bersifat tertutup operasi perkalian.

(b) Diberikan sebarang $x = 2a, y = 2b, z = 2c \in R$. Akan ditunjukkan operasi perkalian bersifat asosiatif,

$$\begin{aligned} (x \cdot y) \cdot z &= (2a \cdot 2b) \cdot 2c \\ &= 4ab \cdot 2c \\ &= 8abc \\ &= 2a \cdot 4ab \\ &= 2a \cdot (2b \cdot 2c) \\ &= x \cdot (y \cdot z). \end{aligned}$$

Jadi, operasi perkalian bersifat asosiatif.

3. Diberikan sebarang $x = 2a, y = 2b, z = 2c \in R$. Akan ditunjukkan perkalian bersifat distributif,

$$\begin{aligned} x(y + z) &= 2a(2b + 2c) \\ &= 4ab + 4ac \\ &= 2a \cdot 2b + 2a \cdot 2c \\ &= xy + xz, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} (x + y)z &= (2a + 2b)2c \\ &= 4ac + 4bc \\ &= 2a \cdot 2c + 2b \cdot 2c \\ &= xz + yz. \end{aligned}$$

Jadi, operasi perkalian bersifat distributif.

4. Diberikan sebarang $x = 2a, y = 2b \in R$. Akan ditunjukkan perkalian bersifat komutatif,

$$\begin{aligned}
 x \cdot y &= 2a \cdot 2b \\
 &= 4ab \\
 &= 4ba \\
 &= 2b \cdot 2a \\
 &= y \cdot x.
 \end{aligned}$$

Jadi, operasi perkalian bersifat komutatif.

Terbukti $\langle R, +, \cdot \rangle$ merupakan ring komutatif.

Selanjutnya suatu ring R memiliki identitas terhadap perkalian yang tidak sama dengan 0 dan memiliki invers terhadap perkalian, maka disebut lapangan. Berikut definisi lapangan.

Definisi 2.2.6 Ring R dengan elemen identitas terhadap operasi perkalian 1, dengan $1 \neq 0$, disebut ring divisi (*skew field*) jika setiap elemen tak nol $a \in R$ memiliki invers perkalian, yaitu terdapat $b \in R$ sehingga $ab = ba = 1$. Ring divisi komutatif disebut lapangan (Dummit dan Foote, 2004).

Berdasarkan Definisi 2.2.6, berikut diberikan contoh lapangan.

Contoh 2.2.7 Diberikan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian bilangan. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ adalah lapangan.

1. Akan dibuktikan $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ merupakan grup Abel.

- (a) Untuk setiap $p, q \in \mathbb{R}$, berlaku $p + q \in \mathbb{R}$.
- (b) Untuk setiap $p, q, r \in \mathbb{R}$, berlaku $(p + q) + r = p + (q + r)$.
- (c) Untuk setiap $p \in \mathbb{R}$ dan $0 \in \mathbb{R}$ sehingga $p + 0 = p$.
- (d) Untuk setiap $p \in \mathbb{R}$ terdapat $-p \in \mathbb{R}$ sehingga $p + (-p) = 0$.
- (e) Untuk setiap $p, q \in \mathbb{R}$ berlaku $p + q = q + p$.

Jadi, $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ adalah grup Abel.

2. Akan dibuktikan $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ merupakan grup Abel.

- (a) Untuk setiap $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, diperoleh $pq \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (b) Untuk setiap $p, q, r \in \mathbb{R}$ berlaku $(pq)r = p(qr)$.
- (c) Untuk setiap $p \in \mathbb{R}$ dan $1 \in \mathbb{R}$ sehingga $p1 = p$.
- (d) Untuk setiap $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ terdapat $p^{-1} = \frac{1}{p}$ sehingga $pp^{-1} = 1$.
- (e) Untuk setiap $p, q \in \mathbb{R}$ berlaku $pq = qp$.

Jadi, $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ adalah grup Abel.

3. Untuk setiap $p, q, r \in \mathbb{R}$ berlaku $p(q + r) = pq + pr$ dan $(p + q)r = pr + qr$
Jadi, operasi perkalian pada $\mathbb{R}$ distributif terhadap penjumlahan.

Terbukti $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ adalah lapangan.

Selanjutnya, jika terdapat bilangan bulat positif terkecil yang mengalikan setiap elemen ring menghasilkan nol maka disebut karakteristik ring. Berikut diberikan definisi karakteristik ring.

Definisi 2.2.8 Diberikan ring R . Jika terdapat bilangan bulat positif n sedemikian sehingga:

$$n \cdot a = 0$$

untuk setiap $a \in R$, maka bilangan bulat positif terkecil dengan sifat tersebut disebut $\text{Char}(R)$ (Saha, 2021).

Berdasarkan Definisi 2.2.8, berikut diberikan contoh karakteristik ring.

Contoh 2.2.9 Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, 3, \dots, n - 1\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian modulo n . Karakteristik dari ring ini adalah $\text{Char}(\mathbb{Z}_n) = n$. Hal ini karena penjumlahan suatu elemen $a \in \mathbb{Z}_n$ sebanyak n kali akan menghasilkan nol.

2.3 Ring Polinomial

Ring polinomial dibentuk dari perluasan suatu ring. Ring polinomial merupakan suatu himpunan yang berisi polinomial-polinomial yang dilengkapi dua operasi biner dan memenuhi aksioma ring. Berikut diberikan teorema terkait ring polinomial.

Teorema 2.3.1 Diberikan ring R dan $R[x]$ merupakan himpunan semua barisan elemen $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ dari R sedemikian sehingga $a_i = 0$ untuk semua indeks i kecuali sejumlah indeks i yang terbatas.

- (i) $R[x]$ adalah ring dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan sebagai:

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$$

dan

$$(a_0, a_1, a_2, \dots)(b_0, b_1, b_2, \dots) = (c_0, c_1, c_2, \dots)$$

$$\text{dengan } c_n = \sum_{i=0}^n a_{n-i}b_i = a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + \dots + a_1b_{n-1} + a_0b_n$$

- (ii) Jika R komutatif, maka $R[x]$ juga demikian.
 (iii) Pemetaan $R \rightarrow R[x]$ oleh $r \mapsto (r, 0, 0, \dots)$ merupakan monomorfisma ring.

Ring $R[x]$ disebut ring polinomial atas R (Hungerford, 1974).

Untuk setiap $r \in R$ dan $(a_0, a_1, \dots) \in R[x]$, berlaku $r(a_0, a_1, \dots) = (ra_0, ra_1, \dots)$. Dengan dasar ini, diperoleh teorema berikut yang menjelaskan sifat-sifat lebih lanjut dari ring polinomial atas R .

Teorema 2.3.2 Diberikan R sebagai ring dengan identitas, dan misalkan x menyatakan elemen $(0, 1_R, 0, 0, \dots)$ dari $R[x]$.

- (i) $x^n = (0, 0, \dots, 0, 1_R, 0, \dots)$, dengan 1_R berada pada koordinat ke- $(n+1)$.
 (ii) Jika $r \in R$, maka untuk setiap $n \geq 0$ berlaku $rx^n = x^n r = (0, \dots, 0, r, 0, \dots)$, dengan r berada pada koordinat ke- $(n+1)$.
 (iii) Untuk setiap polinomial tak nol $f \in R[x]$, terdapat bilangan bulat $n \in \mathbb{N}$ dan $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ sehingga $f = a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$. Bilangan bulat n dan elemen a_i tersebut bersifat unik, jika $f = b_0x^0 + b_1x^1 + \dots + b_mx^m$ ($b_i \in R$), maka $m \geq n$, $a_i = b_i$ untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$, dan $b_i = 0$ untuk $n < i \leq m$.

(Hungerford, 1974).

Berdasarkan Teorema 2.3.1 dan Teorema 2.3.2 berikut definisi ring polinomial.

Definisi 2.3.3 Diberikan ring R himpunan semua polinomial dengan x atas R dinotasikan dengan $R[x]$. Jika $f(x) \in R[x]$, maka ditulis $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, n \geq 0$ untuk setiap $a_i \in R, i = 0, 1, 2, \dots, n$. Misalkan $\sum_{i=0}^n a_ix^i, q(x) = \sum_{i=0}^m b_ix^i \in R[x]$, maka operasi penjumlahan dan perkalian pada $R[x]$ didefinisikan sebagai berikut:

$$+ : f(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{\max(m,n)} c_ix^i, \text{ dengan } c_i = a_i + b_i.$$

$$\cdot : f(x) \cdot q(x) = \sum_{i=0}^{m+n} c_ix^i, \text{ dengan } c_i = a_ib_0 + a_{i-1}b_1 + \dots + a_1b_{i-1} + a_0b_i.$$

untuk setiap i (Romsery dkk., 2015).

Berdasarkan Definisi 2.3.3, berikut diberikan contoh ring polinomial.

Contoh 2.3.4 Diberikan $\mathbb{R}[x]$ merupakan himpunan semua polinomial dengan koefisien dari bilangan real dan variabel x . Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{R}[x], +, \cdot \rangle$ adalah ring polinomial.

Diberikan sebarang $s(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$:

$$s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m,$$

$$r(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_px^p.$$

1. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{R}[x], + \rangle$ merupakan grup Abel.

(a) Akan ditunjukkan $\mathbb{R}[x]$ tertutup terhadap penjumlahan,

$$\begin{aligned} s(x) + q(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \\ &\quad + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots \in \mathbb{R}[x]. \end{aligned}$$

Jadi, $\mathbb{R}[x]$ bersifat tertutup terhadap operasi $+$.

(b) Akan ditunjukkan operasi $+$ bersifat asosiatif,

$$\begin{aligned}
 (s(x) + q(x)) + r(x) &= ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots) + (c_0 + c_1x + \dots) \\
 &= ((a_0 + b_0) + c_0) + ((a_1 + b_1) + c_1)x + \dots \\
 &= (a_0 + (b_0 + c_0)) + (a_1 + (b_1 + c_1))x + \dots \\
 &= (a_0 + a_1x + \dots) + ((b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + \dots) \\
 &= s(x) + (q(x) + r(x)).
 \end{aligned}$$

Jadi, operasi $+$ bersifat asosiatif.

(c) Terdapat elemen $\theta(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \dots \in \mathbb{R}[x]$, sehingga untuk setiap $s(x) \in \mathbb{R}[x]$ berlaku:

$$\begin{aligned}
 s(x) + \theta(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(0 + 0x + 0x^2 + \dots) \\
 &= (a_0 + 0) + (a_1 + 0)x + (a_2 + 0)x^2 + \dots \\
 &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \\
 &= s(x),
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 \theta(x) + s(x) &= (0 + 0x + 0x^2 + \dots) + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) \\
 &= (0 + a_0) + (0 + a_1)x + (0 + a_2)x^2 + \dots \\
 &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \\
 &= s(x).
 \end{aligned}$$

Jadi, $\theta(x)$ merupakan elemen identitas terhadap $+$.

(d) Diberikan sebarang $s(x) \in \mathbb{R}[x]$. Terdapat $-s(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots \in \mathbb{R}[x]$, sehingga berlaku:

$$\begin{aligned}
 s(x) + (-s(x)) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) + (-a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots) \\
 &= (a_0 - a_0) + (a_1 - a_1)x + (a_2 - a_2)x^2 + \dots \\
 &= 0 + 0x + 0x^2 + \dots \\
 &= \theta(x),
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 (-s(x)) + s(x) &= (-a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots) + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) \\
 &= (-a_0 + a_0) + (-a_1 + a_1)x + (-a_2 + a_2)x^2 + \dots \\
 &= 0 + 0x + 0x^2 + \dots \\
 &= \theta(x).
 \end{aligned}$$

jadi, untuk setiap $s(x) \in \mathbb{R}[x]$ memiliki invers terhadap $+$ di $\mathbb{R}[x]$.

(e) Akan ditunjukkan operasi $+$ bersifat komutatif,

$$\begin{aligned}
 s(x) + q(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \\
 &\quad + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m) \\
 &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots \\
 &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + (b_2 + a_2)x^2 + \dots \\
 &= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m) \\
 &\quad + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \\
 &= q(x) + s(x)
 \end{aligned}$$

Jadi, operasi $+$ bersifat komutatif.

2. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{R}[x], \cdot \rangle$ merupakan semigrup.

(a) Akan ditunjukkan $\mathbb{R}[x]$ tertutup terhadap perkalian,

$$\begin{aligned}
 s(x) \cdot q(x) &= (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) \cdot (b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) \\
 &= a_0(b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) + a_1x(b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) \\
 &\quad + \dots + a_nx^n(b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) \\
 &= (a_0b_0 + a_0b_1x + \dots + a_0b_mx^m) \\
 &\quad + (a_1b_0x + a_1b_1x^2 + \dots + a_1b_mx^{m+1}) + \dots \\
 &\quad + (a_nb_0x^n + a_nb_1x^{n+1} + \dots + a_nb_mx^{n+m}) \\
 &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + a_nb_mx^{n+m} \in \mathbb{R}[x].
 \end{aligned}$$

Jadi, R bersifat tertutup operasi perkalian.

(b) Akan ditunjukkan operasi perkalian bersifat asosiatif,

$$\begin{aligned}
(s(x) \cdot q(x)) \cdot r(x) &= (a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots) \\
&\quad \cdot (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_px^p) \\
&= a_0b_0(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_px^p) + \\
&\quad (a_0b_1 + a_1b_0)x(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_px^p) + \dots \\
&= (a_0b_0c_0 + a_0b_0c_1x + a_0b_0c_2x^2 + \dots) \\
&\quad + ((a_0b_1 + a_1b_0)c_0x + (a_0b_1 + a_1b_0)c_1x^2 \\
&\quad + (a_0b_1 + a_1b_0)c_2x^3 + \dots) \\
&= (a_0b_0c_0 + a_0b_0c_1x + a_0b_0c_2x^2 + \dots) \\
&\quad + ((a_0b_1c_0 + a_1b_0c_0)x + (a_0b_1c_1 + a_1b_0c_1)x^2 \\
&\quad + (a_0b_1c_2 + a_1b_0c_2)x^3 + \dots) \\
&= a_0b_0c_0 + (a_0b_0c_1 + a_0b_1c_0 + a_1b_0c_0)x + \dots
\end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
s(x) \cdot (q(x) \cdot r(x)) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \\
&\quad \cdot (b_0c_0 + (b_0c_1 + b_1c_0)x + \dots) \\
&= a_0(b_0c_0 + (b_0c_1 + b_1c_0)x + \dots) \\
&\quad + a_1x(b_0c_0 + (b_0c_1 + b_1c_0)x + \dots) \\
&\quad + a_2x^2(b_0c_0 + (b_0c_1 + b_1c_0)x + \dots) \\
&\quad + \dots + a_nx^n(b_0c_0 + (b_0c_1 + b_1c_0)x + \dots) \\
&= (a_0b_0c_0 + (a_0b_0c_1 + a_0b_1c_0)x + \dots) \\
&\quad + (a_1b_0c_0x + (a_1b_0c_1 + a_1b_1c_0)x^2 + \dots) + \dots \\
&= a_0b_0c_0 + (a_0b_0c_1 + a_0b_1c_0 + a_1b_0c_0)x + \dots
\end{aligned}$$

Jadi, operasi perkalian bersifat asosiatif.

3. Akan ditunjukkan perkalian bersifat distributif.

$$\begin{aligned}
s(x) \cdot (q(x) + r(x)) &= (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) \\
&\quad \cdot ((b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + \dots) \\
&= a_0((b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + \dots) \\
&\quad + a_1x((b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + \dots) + \dots \\
&= ((a_0b_0 + a_0c_0) + (a_0b_1 + a_0c_1)x + \dots) \\
&\quad + ((a_1b_0 + a_1c_0)x + (a_1b_1 + a_1c_1)x^2 + \dots) + \dots \\
&= (a_0b_0 + a_0c_0) + (a_0b_1 + a_0c_1 + a_1b_0 + a_1c_0)x + \dots \\
&= (a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots) \\
&\quad + (a_0c_0 + (a_0c_1 + a_1c_0)x + \dots) \\
&= s(x) \cdot q(x) + s(x) \cdot r(x),
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
(s(x) + q(x)) \cdot r(x) &= ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n) \\
&\quad \cdot (c_0 + c_1x + \dots) \\
&= (a_0 + b_0)(c_0 + c_1x + \dots) \\
&\quad + (a_1 + b_1)(c_0 + c_1x + \dots)x + \dots \\
&= ((a_0 + b_0)c_0 + (a_0 + b_0)c_1x + \dots) \\
&\quad + ((a_1 + b_1)c_0 + (a_1 + b_1)c_1x + \dots)x + \dots \\
&= (a_0c_0 + b_0c_0 + (a_0c_1 + b_0c_1)x + \dots) \\
&\quad + ((a_1c_0 + b_1c_0) + (a_1c_1 + b_1c_1)x + \dots)x + \dots \\
&= (a_0c_0 + b_0c_0) + (a_0c_1 + b_0c_1 + a_1c_0 + b_1c_0)x + \dots \\
&= (a_0c_0 + (a_0c_1 + a_1c_0)x + \dots) \\
&\quad + (b_0c_0 + (b_0c_1 + b_1c_0)x + \dots) \\
&= s(x) \cdot r(x) + q(x) \cdot r(x).
\end{aligned}$$

Jadi, operasi perkalian bersifat distributif.

Terbukti bahwa $\langle \mathbb{R}[x], +, \cdot \rangle$ merupakan ring polinomial.

2.4 Direct Sum pada Ring

Setelah membahas ring, pembahasan selanjutnya pada konsep *direct sum* (jumlahan langsung) yang memungkinkan konstruksi ring baru melalui penggabungan struktur-struktur aljabar yang lebih sederhana secara sistematis. Konsep ini terletak pada kemampuannya untuk mendekomposisi ring yang kompleks ke dalam komponen-komponen penyusunnya, sehingga sering diimplementasikan dalam analisis mendalam mengenai struktur ring dan modul. Oleh karena itu, bagian ini akan menguraikan definisi *direct sum* sebagai berikut.

Definisi 2.4.1 Diberikan R_i , untuk setiap $i = 1, \dots, n$ merupakan kumpulan ring R adalah hasil kali kartesian pada himpunan R_i , dan didefinisikan operasi pada R , yaitu:

1. $(r_1, \dots, r_n) + (s_1, \dots, s_n) = (r_1 + s_1, \dots, r_n + s_n)$;
2. $-(r_1, \dots, r_n) = (-r_1, \dots, -r_n)$;
3. $(r_1, \dots, r_n)(s_1, \dots, s_n) = (r_1 s_1, \dots, r_n s_n)$.

Dengan $(0, 0, \dots, 0)$ sebagai elemen identitas. R disebut jumlahan langsung eksternal dari $R_1, \dots, R_n$ dan dinotasikan sebagai $R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n$ (Side dkk., 2021).

Contoh 2.4.2 Diberikan dua ring, yaitu $R_1 = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ dan $R_2 = \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. Akan ditunjukkan jumlahan langsung eksternal $R = R_1 \oplus R_2$ adalah himpunan hasil kali kartesian yang berisi pasangan terurut (r_1, r_2) .

Himpunan elemenn $R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$

1. Ambil dua elemen, misalnya $(1, 1)$ dan $(1, 2)$, sehingga

$$(1, 1) + (1, 2) = (1 + 1 \pmod{2}, 1 + 2 \pmod{3}) = (0, 0).$$

Hasilnya adalah elemen identitas $(0, 0)$.

2. Invers dari elemen $(1, 2)$ yaitu:

$$-(1, 2) = (-1 \pmod{2}, -2 \pmod{3}) = (1, 1).$$

Karena $(1, 2) + (1, 1) = (0, 0)$.

3. Ambil elemen yang sama untuk dikalikan, sehingga

$$(1, 1) \cdot (1, 2) = (1 \cdot 1 \pmod{2}, 1 \cdot 2 \pmod{3}) = (1, 2).$$

Operasi dilakukan pada masing-masing komponen ring penyusunnya.

Terbukti $R = R_1 \oplus R_2$ adalah himpunan hasil kali kartesian yang berisi pasangan terurut (r_1, r_2) .

2.5 Derivasi

Ide derivasi bukanlah hal yang baru, derivasi telah terbukti memiliki banyak aplikasi karena sangat berkaitan dengan struktur ring dan mengungkap banyak sifat-sifat dari berbagai struktur lain baik itu aljabar, aljabar Lie, dan ideal (Ali dkk., 2024). Berikut definisi derivasi pada ring.

Definisi 2.5.1 Diberikan ring R . Pemetaan d dari R ke R yang memenuhi

1. $d(a + b) = d(a) + d(b)$, untuk setiap $a, b \in R$,
2. $d(ab) = d(a)b + ad(b)$, untuk setiap $a, b \in R$

disebut derivasi pada R (Ali dkk., 2024).

Berdasarkan Definisi 2.5.1, berikut diberikan contoh derivasi pada suatu ring matriks.

Contoh 2.5.2 Diberikan ring A merupakan subset dari matriks berukuran 2×2 yang entri-entrinya bilangan bulat, dengan $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid a, c \in \mathbb{Z} \right\}$. Didefinisikan $d : A \rightarrow A$ dengan $d\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$. Akan ditunjukkan d merupakan derivasi.

Diberikan sebarang $N = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \in A$.

1. Akan ditunjukkan $d(N + P) = d(N) + d(P)$.

$$\begin{aligned}
 d(N + P) &= d \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= d \left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ c_1 + c_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_1 + c_2 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= d \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \right) + d \left(\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= d(N) + d(P).
 \end{aligned}$$

Jadi, $d(N + P) = d(N) + d(P)$.

2. Akan ditunjukkan $d(NP) = d(N)P + Nd(P)$.

$$\begin{aligned}
 d(NP) &= d \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= d \left(\begin{bmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ c_1 a_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_1 a_2 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
 d(N)P + Nd(P) &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_1 a_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_1 a_2 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Jadi, $d(NP) = d(N)P + Nd(P)$.

Terbukti d merupakan derivasi pada ring A .

Selanjutnya, diberikan contoh lain sebagai berikut.

Contoh 2.5.3 Diberikan ring $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan matriks berukuran 2×2 yang entri-entrinya bilangan bulat. Didefinisikan $d : M_2(\mathbb{Z}) \rightarrow M_2(\mathbb{Z})$ dengan $d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}$. Akan ditunjukkan $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan derivasi.

Diberikan sebarang $N = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.

1. Akan ditunjukkan $d(N + P) = d(N) + d(P)$.

$$\begin{aligned}
 d(N + P) &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \\
 &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}\right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -(b_1 + b_2) \\ c_1 + c_2 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -b_1 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b_2 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) + d\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \\
 &= d(N) + d(P).
 \end{aligned}$$

Jadi, $d(N + P) = d(N) + d(P)$.

2. Akan ditunjukkan $d(NP) = d(N)P + Nd(P)$.

$$\begin{aligned} d(NP) &= d \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= d \left(\begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(a_1b_2 + b_1d_2) \\ c_1a_2 + d_1c_2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} d(N)P + Nd(P) &= d \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} d \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -b_1 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -b_2 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -b_1c_2 & -b_1d_2 \\ c_1a_2 & c_1b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1c_2 & -a_1b_2 \\ d_1c_2 & -c_1b_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -b_1d_2 - a_1b_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(a_1b_2 + b_1d_2) \\ c_1a_2 + d_1c_2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jadi, $d(NP) = d(N)P + Nd(P)$.

Terbukti bahwa d merupakan derivasi pada ring $M_2(\mathbb{Z})$.

2.6 Bi-Derivasi

Setelah konsep derivasi didefinisikan oleh Posner, banyak peneliti mempelajari derivasi dalam teori ring. Pada tahun 1980, Maksa memperkenalkan konsep bi-derivasi dengan memberikan teorema representasi dari bi-derivasi dalam ruang Hilbert (Ali dkk., 2024). Berikut diberikan terminologi-terminologi yang berhubungan dengan bi-derivasi.

Definisi 2.6.1 Diberikan ring R . Suatu fungsi $d : R \times R \rightarrow R$ disebut bi-aditif jika fungsi tersebut aditif, yaitu $d(a + b, c) = d(a, c) + d(b, c)$ dan $d(a, b + c) = d(a, b) + d(a, c)$ untuk setiap $a, b, c \in R$ (Ali dkk., 2024).

Berdasarkan Definisi 2.6.1, berikut diberikan contoh bi-aditif pada ring polinomial.

Contoh 2.6.2 Diberikan ring polinomial $\mathbb{R}[x]$. Didefinisikan $d : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ dengan $d(p(x), q(x)) = p'(x)q'(x)$, untuk setiap $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, q(x) = \sum_{i=0}^s b_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ dengan $p'(x) = \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1}$ dan $q'(x) = \sum_{i=0}^s i b_i x^{i-1}$. Akan ditunjukkan d merupakan pemetaan bi-aditif.

Diberikan sebarang $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, q(x) = \sum_{i=0}^s b_i x^i, r(x) = \sum_{i=0}^m c_i x^i \in \mathbb{R}[x]$. Berlaku:

$$\begin{aligned}
 d(p(x) + q(x), r(x)) &= (p(x) + q(x))' r'(x) \\
 &= \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{i=0}^s b_i x^i \right)' \left(\sum_{i=0}^m c_i x^i \right)' \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{\max(n,s)} (a_i + b_i) x^i \right)' \sum_{i=0}^m i c_i x^{i-1} \\
 &= \sum_{i=0}^{\max(n,s)} i(a_i + b_i) x^{i-1} \sum_{i=0}^m i c_i x^{i-1} \\
 &= \left(\sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} + \sum_{i=0}^s i b_i x^{i-1} \right) \sum_{i=0}^m i c_i x^{i-1} \\
 &= \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} \sum_{i=0}^m i c_i x^{i-1} + \sum_{i=0}^s i b_i x^{i-1} \sum_{i=0}^m i c_i x^{i-1} \\
 &= p'(x) r'(x) + q'(x) r'(x) \\
 &= d(p(x), r(x)) + d(q(x), r(x)),
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
d(p(x), q(x) + r(x)) &= p'(x)(q(x) + r(x))' \\
&= \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right)' \left(\sum_{i=0}^s b_i x^i + \sum_{i=0}^m c_i x^i \right)' \\
&= \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} \left(\sum_{i=0}^{\max(s,m)} (b_i + c_i) x^i \right)' \\
&= \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} \sum_{i=0}^{\max(s,m)} i (b_i + c_i) x^{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} \left(\sum_{i=0}^s i b_i x^{i-1} + \sum_{i=0}^m i c_i x^{i-1} \right) \\
&= \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} \sum_{i=0}^s i b_i x^{i-1} + \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} \sum_{i=0}^m i c_i x^{i-1} \\
&= p'(x)q'(x) + p'(x)r'(x) \\
&= d(p(x), q(x)) + d(p(x), r(x)).
\end{aligned}$$

Terbukti d merupakan bi-aditif.

Selanjutnya definisi bi-derivasi sebagai berikut.

Definisi 2.6.3 Diberikan ring R . Pemetaan bi-aditif $d : R \times R \rightarrow R$ dikatakan sebagai bi-derivasi jika berlaku:

1. $d(ab, c) = d(a, c)b + ad(b, c);$
2. $d(a, bc) = d(a, b)c + bd(a, c)$

untuk setiap $a, b, c \in R$ (Reddy dan Reddy, 2017).

Berdasarkan Definisi 2.6.3, berikut diberikan contoh bi-derivasi pada ring polinomial.

Contoh 2.6.4 Diberikan ring polinomial $\mathbb{R}[x]$. Didefinisikan $d : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ dengan $d(p(x), q(x)) = p'(x)q'(x)$, untuk setiap $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, q(x) = \sum_{i=0}^s b_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ dengan $p'(x) = \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1}$ dan $q'(x) = \sum_{i=0}^s i b_i x^{i-1}$. Akan ditunjukkan d merupakan bi-derivasi.

1. Berdasarkan Contoh [2.6.2](#), d bersifat bi-aditif.

2. Diberikan sebarang $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, q(x) = \sum_{i=0}^s b_i x^i, r(x) = \sum_{i=0}^m c_i x^i \in \mathbb{R}[x]$. Akan ditunjukkan $d(p(x)q(x), r(x)) = d(p(x), r(x))q(x) + p(x)d(q(x), r(x))$ dan $d(p(x), q(x)r(x)) = d(p(x), q(x))r(x) + q(x)d(p(x), r(x))$.

$$\begin{aligned}
 d(p(x)q(x), r(x)) &= (p(x)q(x))' r'(x) \\
 &= \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \sum_{i=0}^s b_i x^i \right)' \left(\sum_{i=0}^m c_i x^i \right)' \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{n+s} \left(\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) x^i \right)' \sum_{i=0}^m i c_i x^{i-1} \\
 &= \sum_{i=0}^{n+s} i \left(\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) x^{i-1} \sum_{i=0}^m i c_i x^{i-1}.
 \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
 &d(p(x), r(x))q(x) + p(x)d(q(x), r(x)) \\
 &= p'(x)r'(x)q(x) + p(x)q'(x)r'(x) \\
 &= \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right)' \left(\sum_{i=0}^m c_i x^i \right)' \sum_{i=0}^s b_i x^i + \sum_{i=0}^n a_i x^i \left(\sum_{i=0}^s b_i x^i \right)' \left(\sum_{i=0}^m c_i x^i \right)' \\
 &= \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} \sum_{i=0}^m i c_i x^{i-1} \sum_{i=0}^s b_i x^i + \sum_{i=0}^n a_i x^i \sum_{i=0}^s i b_i x^{i-1} \sum_{i=0}^m i c_i x^{i-1} \\
 &= \left(\sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} \sum_{i=0}^s b_i x^i + \sum_{i=0}^n a_i x^i \sum_{i=0}^s i b_i x^{i-1} \right) \sum_{i=0}^m i c_i x^{i-1} \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{n+s} \left(\sum_{j=0}^i j a_j b_{i-j} \right) x^{i-1} + \sum_{i=0}^{n+s} \left(\sum_{j=0}^i j a_{i-j} b_j \right) x^{i-1} \right) \sum_{i=0}^m i c_i x^{i-1} \\
 &= \sum_{i=0}^{n+s} \left(\sum_{j=0}^i j (a_j b_{i-j} + a_{i-j} b_j) \right) x^{i-1} \sum_{i=0}^m i c_i x^{i-1} \\
 &= \sum_{i=0}^{n+s} i \left(\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) x^{i-1} \sum_{i=0}^m i c_i x^{i-1},
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 d(p(x), q(x)r(x)) &= p'(x)(q(x)r(x))' \\
 &= \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right)' \left(\sum_{i=0}^s b_i x^i \sum_{i=0}^m c_i x^i \right)' \\
 &= \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} \left(\sum_{i=0}^{s+m} \left(\sum_{j=0}^i b_j c_{i-j} \right) x^i \right)' \\
 &= \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} \sum_{i=0}^{s+m} i \left(\sum_{j=0}^i b_j c_{i-j} \right) x^{i-1}.
 \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
 &d(p(x), q(x))r(x) + q(x)d(p(x), r(x)) \\
 &= p'(x)q'(x)r(x) + q(x)p'(x)r'(x) \\
 &= \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right)' \left(\sum_{i=0}^s b_i x^i \right)' \sum_{i=0}^m c_i x^i + \sum_{i=0}^s b_i x^i \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right)' \left(\sum_{i=0}^m c_i x^i \right)' \\
 &= \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} \sum_{i=0}^s i b_i x^{i-1} \sum_{i=0}^m c_i x^i + \sum_{i=0}^s b_i x^i \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} \sum_{i=0}^m i c_i x^{i-1} \\
 &= \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} \left(\sum_{i=0}^s i b_i x^{i-1} \sum_{i=0}^m c_i x^i + \sum_{i=0}^s b_i x^i \sum_{i=0}^m i c_i x^{i-1} \right) \\
 &= \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} \left(\sum_{i=0}^{s+m} \left(\sum_{j=0}^i j b_j c_{i-j} \right) x^{i-1} + \sum_{i=0}^{s+m} \left(\sum_{j=0}^i j b_{i-j} c_j \right) x^{i-1} \right) \\
 &= \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} \sum_{i=0}^{s+m} \left(\sum_{j=0}^i j (b_j c_{i-j} + b_{i-j} c_j) \right) x^{i-1} \\
 &= \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} \sum_{i=0}^{s+m} i \left(\sum_{j=0}^i b_j c_{i-j} \right) x^{i-1},
 \end{aligned}$$

Jadi, d memenuhi $d(p(x)q(x), r(x)) = d(p(x), r(x))q(x) + p(x)d(q(x), r(x))$
dan $d(p(x), q(x)r(x)) = d(p(x), q(x))r(x) + q(x)d(p(x), r(x))$.

Terbukti d merupakan bi-derivasi pada ring polinomial $\mathbb{R}[x]$.

2.7 Derivasi Jordan

Herstein menunjukkan ketertarikan pada hubungan antara ring asosiatif dan struktur Jordan. Dalam penelitiannya Herstein mendefinisikan derivasi Jordan dengan membangun ring Jordan yaitu $a \circ b = ab + ba$, untuk setiap $a, b \in R$, dengan ab merupakan hasil kali dari a dan b dalam ring asosiatif R (Ali dkk., 2024). Selanjutnya, diberikan definisi derivasi Jordan sebagai berikut.

Definisi 2.7.1 Diberikan ring R . Pemetaan $d : R \rightarrow R$ disebut derivasi Jordan jika memenuhi:

1. $d(a + b) = d(a) + d(b)$,
2. $d(a^2) = ad(a) + d(a)a$

untuk setiap $a, b \in R$ (Herstein, 1957).

Berdasarkan Definisi 2.7.1, berikut diberikan contoh derivasi Jordan pada ring polinomial.

Contoh 2.7.2 Diberikan ring polinomial $\mathbb{R}[x]$. Didefinisikan $d : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ dengan $d(p(x)) = p'(x)$, untuk setiap $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ dengan $p'(x) = \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1}$. Akan ditunjukkan d merupakan derivasi Jordan.

1. Diberikan sebarang $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, q(x) = \sum_{i=0}^s b_i x^i \in \mathbb{R}[x]$. Akan ditunjukkan $d(p(x) + q(x)) = d(p(x)) + d(q(x))$,

$$\begin{aligned}
 d(p(x) + q(x)) &= (p(x) + q(x))' \\
 &= \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{i=0}^s b_i x^i \right)' \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{\max(n,s)} (a_i + b_i) x^i \right)' \\
 &= \sum_{i=0}^{\max(n,s)} i(a_i + b_i) x^{i-1} \\
 &= \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} + \sum_{i=0}^s i b_i x^{i-1} \\
 &= d(p(x)) + d(q(x)).
 \end{aligned}$$

Jadi, d memenuhi sifat aditif.

2. Diberikan sebarang $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. Akan ditunjukkan $d(p(x)^2) = p(x)d(p(x)) + d(p(x))p(x)$,

$$\begin{aligned}
 d(p(x)^2) &= (p(x)^2)' \\
 &= \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \sum_{i=0}^n a_i x^i \right)' \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{2n} \left(\sum_{j=0}^i a_j a_{i-j} \right) x^i \right)' \\
 &= \sum_{i=0}^{2n} i \left(\sum_{j=0}^i a_j a_{i-j} \right) x^{i-1}.
 \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
 p(x)d(p(x)) + d(p(x))p(x) &= p(x)p'(x) + p'(x)p(x) \\
 &= \sum_{i=0}^n a_i x^i \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right)' + \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right)' \sum_{i=0}^n a_i x^i \\
 &= \sum_{i=0}^n a_i x^i \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} + \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} \sum_{i=0}^n a_i x^i \\
 &= \sum_{i=0}^{2n} \left(\sum_{j=0}^i j a_j a_{i-j} \right) x^{i-1} + \sum_{i=0}^{2n} \left(\sum_{j=0}^i j a_{i-j} a_j \right) x^{i-1} \\
 &= \sum_{i=0}^{2n} \left(\sum_{j=0}^i j (a_j a_{i-j} + a_{i-j} a_j) \right) x^{i-1} \\
 &= \sum_{i=0}^{2n} i \left(\sum_{j=0}^i a_j a_{i-j} \right) x^{i-1}.
 \end{aligned}$$

Jadi $d(p(x)^2) = p(x)d(p(x)) + d(p(x))p(x)$.

Terbukti d merupakan derivasi Jordan pada ring polinomial $\mathbb{R}[x]$.

2.8 Bi- Derivasi Jordan

Konsep bi-derivasi Jordan merupakan pengembangan dari bi-derivasi dan derivasi Jordan. Jika dalam derivasi Jordan hanya melibatkan satu variabel, maka dalam bi-derivasi Jordan diperkenalkan pemetaan dua variabel yang bersifat bi-aditif berdasarkan Definisi [2.6.1](#) dan memenuhi distribusi terhadap perkalian Jordan. Berikut definisi dari bi-derivasi Jordan.

Definisi 2.8.1 Diberikan ring R . Pemetaan bi-aditif $d : R \times R \rightarrow R$ disebut bi-derivasi Jordan jika berlaku:

1. $d(a^2, c) = ad(a, c) + d(a, c)a$,
2. $d(a, c^2) = d(a, c)c + cd(a, c)$

untuk setiap $a, c \in R$ (Sahin dan Kılıc, 2023).

Selanjutnya diberikan teorema terkait bi-derivasi Jordan.

Teorema 2.8.2 Diberikan ring R . Jika terdapat pemetaan bi-aditif $d : R \times R \rightarrow R$ yang merupakan bi-derivasi Jordan, maka berlaku:

$$d(a^2, b^2) = ad(a, c^2) + d(a, c^2)a = cd(a^2, c) + d(a^2, c)c$$

untuk setiap $a, c \in R$.

Bukti. Menggunakan Definisi 2.8.1 pada argumen pertama (dengan c^2 tetap):

$$\begin{aligned} d(a^2, c^2) &= ad(a, c^2) + d(a, c^2)a \\ &= a(d(a, c)c + cd(a, c)) + (d(a, c)c + cd(a, c))a \\ &= ad(a, c)c + acd(a, c) + d(a, c)ca + cd(a, c)a, \end{aligned}$$

Menggunakan Definisi 2.8.1 pada argumen kedua (dengan a^2 tetap):

$$\begin{aligned} d(a^2, c^2) &= cd(a^2, c) + d(a^2, c)c \\ &= c(ad(a, c) + d(a, c)a) + (ad(a, c) + d(a, c)a)c \\ &= cad(a, c) + cd(a, c)a + ad(a, c)c + d(a, c)ac \end{aligned}$$

Kedua ekspansi menunjukkan bahwa $d(a^2, c^2)$ terdefinisi pada ring R . ■

Berdasarkan Definisi 2.8.1, berikut diberikan contoh bi-derivasi Jordan pada ring.

Contoh 2.8.3 Diberikan ring $M_n(\mathbb{Z})$ merupakan matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entrinya bilangan bulat. Didefinisikan $d : M_n(\mathbb{Z}) \times M_n(\mathbb{Z}) \rightarrow M_n(\mathbb{Z})$ dengan $d(N, P) = NP - PN$, untuk setiap $N, P \in M_n(\mathbb{Z})$. Akan ditunjukkan d merupakan bi-derivasi Jordan.

1. Diberikan sebarang $N, P, S \in M_n(\mathbb{Z})$. Akan ditunjukkan $d(N + P, S) = d(N, S) + d(P, S)$ dan $d(N, P + S) = d(N, P) + d(N, S)$.

$$\begin{aligned}
 d(N + P, S) &= (N + P)S - S(N + P) \\
 &= (NS + PS) - (SN + SP) \\
 &= NS + PS - SN - SP \\
 &= (NS - SN) + (PS - SP) \\
 &= d(N, S) + d(P, S),
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 d(N, P + S) &= N(P + S) - (P + S)N \\
 &= (NP + NS) - (PN + SN) \\
 &= NP + NS - PN - SN \\
 &= (NP - PN) + (NS - SN) \\
 &= d(N, P) + d(N, S).
 \end{aligned}$$

Jadi, d bersifat bi-aditif.

2. Diberikan sebarang $N, S \in M_n(\mathbb{Z})$. Akan ditunjukkan $d(N^2, S) = Nd(N, S) + d(N, S)N$ dan $d(N, S^2) = d(N, S)S + Sd(N, S)$.

$$d(N^2, S) = N^2S - SN^2 = NNS - SNN.$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
 Nd(N, S) + d(N, S)N &= N(NS - SN) + (NS - SN)N \\
 &= NNS - NSN + NSN - SNN \\
 &= NNS - SNN,
 \end{aligned}$$

dan

$$d(N, S^2) = NS^2 - S^2N = NSS - SSN.$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
 d(N, S)S + Sd(N, S) &= (NS - SN)S + S(NS - SN) \\
 &= NSS - SNS + SNS - SSN \\
 &= NSS - SSN.
 \end{aligned}$$

Jadi, d memenuhi $d(N^2, S) = Nd(N, S) + d(N, S)N$ dan $d(N, S^2) = d(N, S)S + Sd(N, S)$.

Terbukti d merupakan bi-derivasi Jordan pada ring $M_n(\mathbb{Z})$.

Selanjutnya, diberikan contoh lain sebagai berikut.

Contoh 2.8.4 Diberikan ring A merupakan subset dari matriks berukuran 2×2 yang entri-entrinya bilangan bulat, dengan $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid a, c \in \mathbb{Z} \right\}$. Didefinisikan

$d : A \rightarrow A$ dengan $d\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 b_2 & 0 \end{bmatrix}$. Akan ditunjukkan d merupakan bi-derivasi Jordan pada ring A .

Diberikan sebarang $N = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix} \in R$.

1. Akan ditunjukkan d bi-aditif.

$$\begin{aligned}
 d(N + P, S) &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
 &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (b_1 + b_2)b_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 b_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2 b_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}\right) + d\left(\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
 &= d(N, S) + d(P, S),
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 d(N, P + S) &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
 &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 + a_3 & 0 \\ b_2 + b_3 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1(b_2 + b_3) & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 b_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 b_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}\right) + d\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
 &= d(N, P) + d(N, S).
 \end{aligned}$$

Jadi, d bersifat bi-aditif.

2. Akan ditunjukkan $d(N^2, S) = Nd(N, S) + d(N, S)N$ dan $d(N, S^2) = d(N, S)S + Sd(N, S)$.

$$d(N^2, S) = d\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}^2, \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}\right) = d\left(\begin{bmatrix} a_1^2 & 0 \\ b_1 a_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 a_1 b_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
 &Nd(N, S) + d(N, S)N \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}\right) + d\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 b_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 b_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 b_3 a_1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 b_3 a_1 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

dan

$$d(N, S^2) = d\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}^2\right) = d\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3^2 & 0 \\ b_3 a_3 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 b_3 a_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} & d(N, S)S + Sd(N, S) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 b_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 b_3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 b_3 a_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 b_3 a_3 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jadi, d memenuhi $d(N^2, S) = Nd(N, S) + d(N, S)N$ dan $d(N, S^2) = d(N, S)S + Sd(N, S)$.

Terbukti d merupakan bi-derivasi Jordan pada ring A .

BAB III

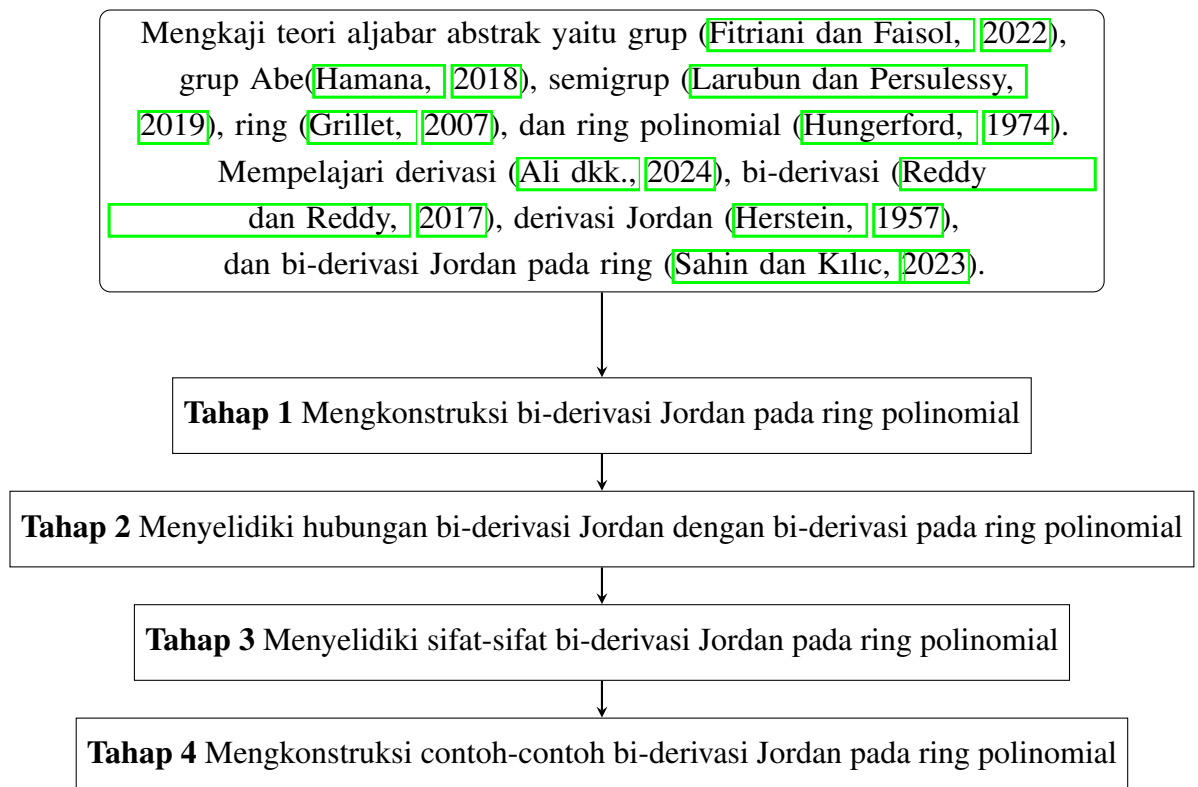
METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 di Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Tahap Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur dan analisis teoritis, dengan mengumpulkan referensi seperti jurnal, artikel ilmiah, buku, dan sumber lainnya yang terkait dengan penelitian ini. Secara umum langkah-langkah penelitian ini sebagai berikut.



Gambar 3.1 Langkah-langkah Penelitian

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa bi-derivasi Jordan pada ring polinomial $R[x]$ sebagai bentuk generalisasi dari bi-derivasi dan derivasi Jordan dengan melemahkan syarat Leibniz menjadi perkalian Jordan. Melalui definisi, contoh, serta pembuktian yang diberikan, ditunjukkan bahwa bi-derivasi Jordan memenuhi sifat bi-aditif dan memenuhi distribusi terhadap perkalian Jordan, sehingga konsep ini merupakan perluasan dari konsep bi-derivasi dalam kajian aljabar.

Selain itu, hasil penelitian menunjukkan penjumlahan dari bi-derivasi Jordan menghasilkan bi-derivasi Jordan. Perkalian skalar selalu menghasilkan bi-derivasi Jordan. Setiap bi-derivasi Jordan merupakan bi-derivasi pada ring polinomial. Kajian terhadap struktur aljabar yang dibentuk oleh himpunan bi-derivasi Jordan menunjukkan bahwa himpunan tersebut membentuk $\mathbb{Z}$ -modul. Lebih lanjut, himpunan elemen-elemen konstan dari bi-derivasi Jordan juga membentuk $\mathbb{Z}$ -modul.

5.2 Saran

Penelitian ini masih terbatas pada kajian bi-derivasi Jordan pada ring polinomial. Oleh karena itu, penelitian selanjutnya dapat diarahkan untuk mengkaji konsep bi-derivasi Jordan pada struktur ring tertentu untuk memperoleh hasil yang lebih umum dan komprehensif. Selain itu, penelitian lanjutan dapat difokuskan pada pengembangan hubungan antara bi-derivasi Jordan dengan struktur aljabar lainnya, seperti modul sehingga diharapkan dapat memperkaya kajian dalam bidang aljabar abstrak.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmed, W., Alali, A. S., dan Mozumder, M. R. (2024). Characterization of (α, β) Jordan bi-derivations in prime rings. *Aims Mathematics*, 9(6), 14549-14557.
- Ali, S., Rafiquee, N. N., dan Varshney, V. (2024). Certain Types of Derivations in Ring: A Survey. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, 30(2), 256-306.
- Archibald, T., Fraser, C., dan Grattan-Guinness, I. (2005). The History of Differential Equations, 1670–1950. *Oberwolfach reports*, 1(4), 2729-2794.
- Bedir, Z. (2024). Some Certain Differential Identities in Semiprime Rings With Bi-Derivation. *Int. J. Open Problems Compt. Math*, 17(4).
- Bresar, M., dan Vukman, J. (1988). Jordan derivations on prime rings. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 37(3), 321-322.
- Ceven, Y., dan Ciloglu, Z. (2018). On symmetric Jordan and Jordan left bi-derivations of prime rings. *Afrika Matematika*, 29, 689-698.
- Dummit, D. S., dan Foote, R. M. (2004). *Abstract algebra* (Vol. 3). Hoboken: Wiley.
- Faizah, H. (2019). Pemahaman mahasiswa tentang konsep grup pada mata kuliah struktur aljabar. *Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, 4(1), 23-34.
- Fitriani, dan Faisol, A. (2022). *Grup*. Matematika, Yogyakarta.
- Grillet, P. A. (2007). *Abstract algebra* (Vol. 242). Springer Science dan Business Media.
- Hamana, R. D. (2018). Sifat-Sifat Kompleks Dan Sub Grup Serta Hubungan Keduanya. *Jurnal Matematika UNAND*, 7(3), 144-148.
- Herstein, I. N. (1957). Jordan derivations of prime rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 8(6), 1104-1110.
- Hungerford, T. W. (1974). *Algebra* (Vol. 73). Springer-Verlag New York, Inc.

- Jung, Y. S., dan Park, K. H. (2011). On the stability of bi-derivations in Banach algebras. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 48(5), 959-967.
- Kayis, S. A., dan Ozbal, S. A. (2016). On symmetric bi-derivations of B-algebras. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 31(2), 209-216.
- Lalitha, S. (2024). A Study of Jordan bi-derivations in Prime rings with parameters (α, β) . *Utilitas Mathematica* 121, 0315-3681 .
- Larubun, N. T., dan Persuleusy, E. R. (2019). Struktur Dasar Ring Refleksif Quasi $\hat{\pm}$. In *Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika Universitas Pattimura*, 69-72.
- Maksa, G. (1980). A Remark on Symmetric Bi-additive Functions Having Non-negative Diagonalization. *Glasnik Math*, 15(35), 279-282.
- Mccrimmon, K. (1978). Jordan algebras and their applications. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 84(4).
- Mehdipour, M. J. (2021). Symmetric bi-derivations and their generalizations on group algebras. *Filomat*, 35(4), 1233–1240.
- Mehdipour, M. J., Moghimi, G. H., dan Salkhordeh, N. (2023). Jordan derivations on certain Banach algebras. *arXiv preprint arXiv:2306.12529*.
- Posner, E. C. (1957). Derivations in Prime Rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 8(6), 1093-1100.
- Reddy, C. J. S., & Reddy, B. R. (2017). Orthogonal Generalized Symmetric Bi-Derivations of Semiprime Rings. *Contemporary Mathematics*, 4(1), 21-27.
- Romsery, M. M., Patty, H. W., dan Talakua, M. W. (2015). Identifikasi Basis Gra-bner dalam Ideal Ring Polinomial. *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 9(1), 11-20.
- Saha, L. (2021). A Study on Characteristic of Rings. *International Journal of Mathematics Trends and Technology-IJMTT*, 67.
- Sahin, Z. C. (2022). Some Results on Prime Rings with Skew Symmetric Bi-Jordan Derivations. *Authorea Preprints*.
- Sahin, Z. C., dan Kılıc, A. (2023). Some Results on Prime Rings with Skew Symmetric Jordan Bi-Derivations. *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 5(2), 32-38.

- Side, S., Abdy, M., & Uniarti, A. (2021). Jumlahan Langsung pada Ring. *Journal of Mathematics, Computations and Statistics*, 4(1), 39-46.
- Sitompul, D. E., Chasanah, S. L., dan Faisol, A. (2025). Jordan Derivation on the Polynomial Ring $R[x]$. *Integra: Journal of Integrated Mathematics and Computer Science*, 2(2), 41-47.
- Sogutcu, E. K., dan Golbasi, O. (2025). Semiprime Ideal of Rings with Symmetric Bi-Derivations. *Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences*, 6(2), 182-195.
- Shujat, F., dan Fallatah, A. (2022). On the Iterations of Generalized Bi-derivation on Prime Ring. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática* (3s.), 40, 1–5.
- Vukman, J. (1989). Symmetric bi-derivations on prime and semi-prime rings. *aequationes mathematicae*, 38(2), 245-254.
- Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. (2021). *Teori ring dan modul*. UGM PRESS.
- Yazarlı, H., dan Koc, H. (2022). Symmetric bi-derivation on bitonic algebras. *Proyecciones (Antofagasta)*, 41(4), 825-833.