

**BILANGAN KROMATIK LOKASI SISI GRAF MATAHARI
DAN BARBELNYA**

Skripsi

Oleh

**VINA PANDU WINATA
NPM. 2217031059**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

ABSTRACT

EDGE LOCATING CHROMATIC NUMBER OF SUN GRAPHS AND ITS BARBELL

By

Vina Pandu Winata

Edge locating chromatic number of a graph G , denoted by $\chi'_L(G)$, is the minimum number of colors required for an edge locating coloring of G . This paper investigates edge locating chromatic number of the sun graphs $C_n \odot \overline{K_1}$ and the sun barbell graphs $B_{C_n \odot \overline{K_1}}$. The results show that $\chi'_L(C_n \odot \overline{K_1}) = 4$ for $n = 3, 4$, and $\chi'_L(C_n \odot \overline{K_1}) = 5$ for $n \geq 5$. Furthermore, it is obtained that $\chi'_L(B_{C_n \odot \overline{K_1}}) = 5$ for all $n \geq 3$.

Keywords: edge locating chromatic number, sun graph, barbell sun graph.

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI SISI GRAF MATAHARI DAN BARBELNYA

Oleh

Vina Pandu Winata

Bilangan kromatik lokasi sisi dari graf G dinotasikan dengan $\chi'_L(G)$, adalah minimum warna yang dibutuhkan untuk pewarnaan lokasi sisi dari graf G . Penelitian ini membahas tentang bilangan kromatik lokasi sisi graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$ dan graf barbel matahari $B_{C_n \odot \overline{K_1}}$. Hasil yang diperoleh adalah $\chi'_L(C_n \odot \overline{K_1}) = 4$ untuk $n = 3, 4$ dan $\chi'_L(C_n \odot \overline{K_1}) = 5$ untuk $n \geq 5$. Selanjutnya untuk $\chi'_L(B_{C_n \odot \overline{K_1}}) = 5$ untuk $n \geq 3$.

Kata-kata kunci: bilangan kromatik lokasi sisi, graf matahari, graf barbel matahari.

**BILANGAN KROMATIK LOKASI SISI GRAF MATAHARI
DAN BARBELNYA**

VINA PANDU WINATA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

Judul Skripsi : **BILANGAN KROMATIK LOKASI SISI
GRAF MATAHARI DAN BARBELNYA**

Nama Mahasiswa : **Vina Pandu Winata**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031059**

Program Studi : **Matematika**

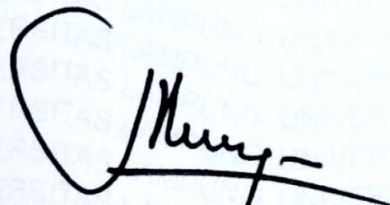
Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**




Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP 197604112000122001


Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.
NIP 199311062019032018

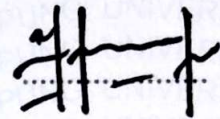
2. Ketua Jurusan Matematika


Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.



Sekretaris : Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.

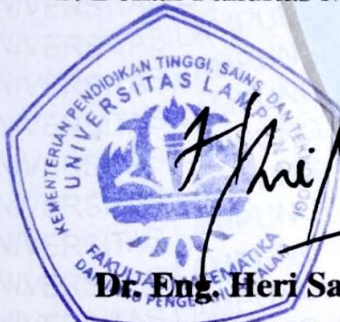


Penguji

Bukan Pembimbing : Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.



2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.

NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 02 Maret 2026

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Vina Pandu Winata**
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031059**
Jurusan : **Matematika**
Judul Skripsi : **Bilangan Kromatik Lokasi Sisi Graf Matahari
dan Barbelnya**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 02 Maret 2026

Penulis



Vina Pandu Winata

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Vina Pandu Winata yang lahir di Ratna Chaton pada tanggal 01 April 2004. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan Bapak Subroto dan Ibu Yuliani.

Penulis mengawali pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Ratna Chaton pada tahun 2009 sampai dengan 2010. Kemudian menempuh pendidikan Sekolah dasar (SD) di SD Negeri 01 Ratna Chaton pada tahun 2010 sampai dengan 2016. Kemudian melanjutkan ke Sekolah Menengah Pertama di SMP Negeri 1 Seputih Raman pada tahun 2016 sampai dengan 2019. Selanjutnya ke Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 1 Kota Gajah pada tahun 2019 sampai dengan 2022.

Pada tahun 2022, penulis melanjutkan pendidikan pada Program Studi S-1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN). Kemudian pada tahun 2023 penulis aktif mengikuti organisasi kampus yaitu HIMATIKA sebagai anggota biro kesekretariatan dan anggota dari KOPMA UNILA.

Pada akhir tahun 2024, penulis mulai melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Pendapatan Daerah (BAPENDA) Provinsi Lampung selama 40 hari mulai tanggal 23 Desember 2024 sampai dengan 31 Januari 2025. Selain itu, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 30 hari di desa Sukarame II Kecamatan Teluk Betung Barat mulai tanggal 16 Juni 2025 sampai dengan 16 Juli 2025.

KATA INSPIRASI

“Sesungguhnya Allah tidak mengubah keadaan suatu kaum sampai mereka mengubah keadaan mereka sendiri”

(Q.S Ar-Ra'd : 11)

“Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya”

(Q.S Al Baqarah: 286)

”Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan”

(Q.S Al-Insyirah: 6)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada bapakku tercinta, Bapak Subroto dan mamaku tersayang, Mama Yuliani atas segala pengorbanan, motivasi, doa, dan dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Bilangan Kromatik Lokasi Sisi Graf Matahari dan Barbelnya" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Drs. Nusyirwan, M.Si. selaku dosen pembimbing akademik.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Kedua orang tua penulis, Bapak Subroto dan Ibu Yuliani serta adikku Muhamad Egi Ramadhan. Terimakasih untuk segala doa, usaha, dan dukungan yang selalu mengiringi setiap langkah. Terimakasih telah menjadi sumber penyemangat dan sandaran terbesar dalam hidup penulis sehingga penulis dapat terus bertahan dan berjuang.
8. Sahabat penulis sejak SMA hingga sampai di bangku perkuliahan yang senantiasa memberikan doa dan dukungan serta menjadi tempat terbaik untuk melepas segala keluh kesah.
9. Teman-teman seperbimbingan skripsi yang saling memberi semangat, mendukung, menemani, dan membantu penulis dalam penyelesaian skripsi.
10. Semua pihak yang membantu dalam penyelesaian skripsi ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 02 Maret 2026

Vina Pandu Winata

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Tujuan Penelitian	5
1.3 Manfaat Penelitian	5
II TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Konsep Dasar Graf	7
2.2 Bilangan Kromatik Lokasi Sisi	13
III METODE PENELITIAN	17
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	17
3.2 Langkah-Langkah Penelitian	17
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	20
4.1 Bilangan Kromatik Lokasi Sisi Graf Matahari	20
4.2 Bilangan Kromatik Lokasi Sisi Graf Barbel Matahari	38
V KESIMPULAN DAN SARAN	56
5.1 Kesimpulan	56
5.2 Saran	56
DAFTAR PUSTAKA	57

DAFTAR GAMBAR

1.1	Permasalahan jembatan Königsberg	2
1.2	Representasi permasalahan jembatan Königsberg	2
2.1	Contoh graf dengan orde 8 ukuran 7	8
2.2	Contoh graf dengan 6 simpul dan 10 sisi	8
2.3	Graf siklus C_3	10
2.4	Contoh graf lengkap K_n untuk beberapa n	10
2.5	(a) Graf K_3 , (b) Graf $\overline{K_3}$	11
2.6	Graf hasil operasi korona $C_4 \odot \overline{K_1}$	11
2.7	Graf matahari $C_4 \odot \overline{K_1}$	12
2.8	Graf barbel matahari $B_{C_4 \odot \overline{K_1}}$	13
2.9	Contoh pewarnaan lokasi sisi minimum pada graf siklus C_4 .	16
4.1	Graf matahari $C_3 \odot \overline{K_1}$	21
4.2	Pewarnaan lokasi sisi minimum graf matahari $C_3 \odot \overline{K_1}$. . .	21
4.3	Graf matahari $C_4 \odot \overline{K_1}$	22
4.4	Pewarnaan lokasi sisi minimum graf matahari $C_4 \odot \overline{K_1}$. . .	23
4.5	Graf matahari $C_5 \odot \overline{K_1}$	24
4.6	Pewarnaan lokasi sisi minimum graf matahari $C_5 \odot \overline{K_1}$. . .	25
4.7	Graf matahari $C_6 \odot \overline{K_1}$	26
4.8	Pewarnaan lokasi sisi minimum graf matahari $C_6 \odot \overline{K_1}$. . .	28
4.9	Graf barbel matahari $B_{C_3 \odot \overline{K_1}}$	38
4.10	Pewarnaan lokasi sisi minimum graf barbel matahari $B_{C_3 \odot \overline{K_1}}$	39
4.11	Graf barbel matahari $B_{C_4 \odot \overline{K_1}}$	40
4.12	Pewarnaan lokasi sisi minimum graf barbel matahari $B_{C_4 \odot \overline{K_1}}$	41
4.13	Graf barbel matahari $B_{C_5 \odot \overline{K_1}}$	42
4.14	Pewarnaan lokasi sisi minimum graf barbel matahari $B_{C_5 \odot \overline{K_1}}$	42
4.15	Graf barbel matahari $B_{C_6 \odot \overline{K_1}}$	44
4.16	Pewarnaan lokasi sisi minimum graf barbel matahari $B_{C_6 \odot \overline{K_1}}$	44

BAB I

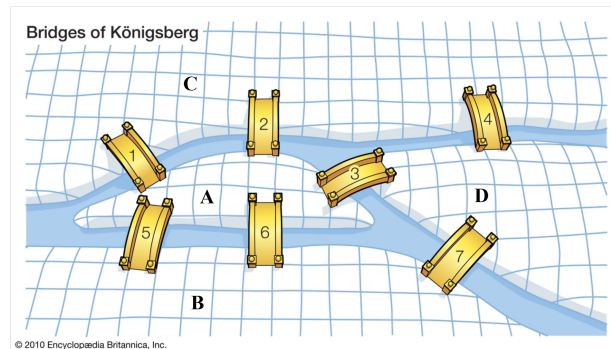
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf adalah salah satu cabang dari matematika diskrit yang mempelajari tentang hubungan antar objek, dengan objek tersebut direpresentasikan sebagai simpul (*vertex*) dan hubungan antara objek direpresentasikan sebagai sisi (*edge*) (Munir, 2010). Teori graf sering diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari untuk memecahkan beragam persoalan. Beberapa contoh penerapan teori graf antara lain terdapat pada bidang kelistrikan, kimia, ilmu komputer, pertandingan olahraga, dan lain-lain (Munir, 2010).

Sejarah teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 ketika matematikawan asal Swiss yaitu Leonhard Euler, mencoba untuk mencari solusi dari permasalahan Jembatan Königsberg di Prusia, yang kini dikenal sebagai Kaliningrad, Rusia. Permasalahan tersebut melibatkan empat daratan yang saling terhubung oleh tujuh jembatan, dan pertanyaannya adalah apakah memungkinkan untuk melewati semua jembatan dalam satu perjalanan tanpa mengulang melewati jembatan yang sama lebih dari satu kali dan kembali lagi ke tempat awal keberangkatan (Munir, 2010).

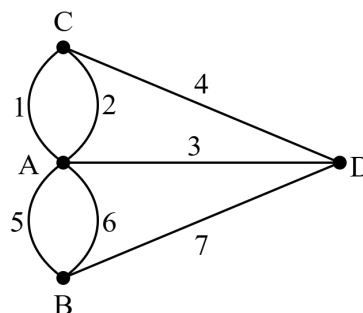
Berikut merupakan gambar dari permasalahan Jembatan Königsberg di Prusia (sekarang Kaliningrad, Rusia) dengan daratan A, B, C, D dan jembatan 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan 7.



Gambar 1.1 Permasalahan jembatan Königsberg

(Sumber: <https://www.britannica.com/science/Konigsberg-bridge-problem#/media/1/321794/68671>)

Representasi permasalahan Jembatan Königsberg pada Gambar 1.1 menjadi graf berikut ini.



Gambar 1.2 Representasi permasalahan jembatan Königsberg

Euler merepresentasikan daratan sebagai simpul (*vertex*) dan jembatan direpresentasikan sebagai sisi (*edge*), sehingga permasalahan tersebut dapat dianalisis secara matematis (Munir, 2010). Euler menyatakan bahwa solusi hanya dapat dicapai jika derajat (jumlah sisi yang terhubung) dari setiap simpul adalah genap. Namun, pada kasus jembatan Königsberg, derajat dari beberapa simpul tidak semuanya genap, sehingga mustahil untuk melewati semua jembatan tepat satu kali dalam satu lintasan yang dimulai dan berakhir di daratan yang sama, atau bahkan dalam lintasan yang hanya melewati setiap simpul sekali. Temuan ini membangun dasar teori graf, yang sangat

bermanfaat dalam memahami dan mengatasi berbagai hubungan antara objek dalam kehidupan sehari-hari (Munir, 2010).

Teori graf terus berkembang pesat, terutama pada topik bilangan kromatik. Konsep bilangan kromatik berasal dari pewarnaan graf khususnya pada pewarnaan simpul. Konsep tentang pewarnaan graf muncul ketika menyelesaikan masalah pewarnaan peta. Pada tahun 1831-1899 Francis Guthrie menemukan Konjektur Empat Warna (*The Four Color Conjecture*) yang menyatakan bahwa setiap negara pada sebuah peta dapat diwarnai dengan paling banyak empat warna, sehingga tidak ada dua wilayah yang saling bertetangga memiliki warna yang sama. Masalah yang terkait dengan konjektur empat warna (*four color problem*) ini menyebabkan lahirnya konsep pewarnaan daerah, simpul, dan sisi. Sehingga konsep tersebut diterapkan untuk mewarnai graf secara umum (Asmiati, 2023).

Seiring dengan perkembangan teori graf, penelitian tidak hanya fokus pada pewarnaan graf, tetapi juga melibatkan penerapan konsep jarak untuk membedakan simpul, yang dikenal sebagai dimensi metrik. Dimensi metrik menggunakan suatu himpunan simpul pembeda (*resolving set*) sehingga setiap simpul dalam graf dapat memiliki representasi jarak yang berbeda berdasarkan vektor jarak setiap simpul terhadap himpunan simpul pembeda tersebut (Harary dan Melter, 1976). Kemudian, Chartrand dkk. pada tahun 1998 memperkenalkan konsep dimensi partisi sebagai pengembangan dari konsep dimensi metrik. Chartrand dkk. (1998) mengelompokkan semua simpul pada graf G ke dalam sejumlah kelas partisi. Selanjutnya menentukan jarak antara setiap simpul terhadap masing-masing kelas partisi sehingga setiap simpul memiliki representasi yang unik dalam graf berupa vektor koordinat. Partisi dengan kardinalitas minimum yaitu jumlah kelas partisi paling sedikit yang menghasilkan representasi vektor koordinat berbeda untuk setiap simpul disebut sebagai dimensi partisi graf G (Chartrand dkk., 2000).

Pada pewarnaan graf, dikenal konsep pewarnaan lokasi. Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk. pada tahun 2002 sebagai pengembangan teori graf yang berhubungan dengan pewarnaan simpul dan dimensi partisi graf. Konsep dimensi partisi dalam pewarnaan lokasi digunakan untuk menentukan kode warna bagi setiap simpul di graf G . Kemudian pewarnaan simpul pada graf G dikatakan memenuhi syarat pewarnaan lokasi

apabila tidak terdapat simpul yang memiliki representasi atau kode warna yang sama. Banyaknya minimum warna yang dibutuhkan dalam pewarnaan lokasi sehingga setiap simpul pada suatu graf memiliki kode warna yang unik disebut dengan bilangan kromatik lokasi graf G , yang dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ (Chartrand dkk., 2002).

Beberapa penelitian telah banyak dilakukan terkait dengan bilangan kromatik lokasi pada graf. Asmiati (2017) telah menentukan bilangan kromatik lokasi n amalgamasi bintang yang dihubungkan suatu lintasan $S_{k,m}$ untuk $k, m \geq 2$, $k \leq m$. Asmiati dkk. (2018) telah menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel tertentu. Bilangan kromatik lokasi dari graf split siklus telah ditentukan oleh Prawinasti dkk., 2020. Kemudian Asmiati dkk. (2021) telah menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf barbel bayangan lintasan. Pada tahun 2022, Rahmatalia dkk. telah menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf split lintasan (Rahmatalia dkk., 2022). Pada tahun 2023, Lessya dkk. telah menentukan bilangan kromatik graf helm H_n untuk $3 \leq n \leq 9$ (Lessya dkk., 2023). Selanjutnya Yulianti dkk. (2024) telah menentukan bilangan kromatik lokasi beberapa amalgamasi graf lengkap dan pada tahun yang sama Nurinsani (2024) telah menentukan bilangan kromatik lokasi gabungan graf palem.

Penelitian terkait bilangan kromatik lokasi pada graf mengalami perkembangan yang sangat pesat. Hal ini mendorong para peneliti untuk menjelajahi variasi baru dan pengembangan lebih lanjut, khususnya dengan mengalihkan fokus partisi dari himpunan simpul ($V(G)$) ke himpunan sisi ($E(G)$). Gagasan untuk menggunakan partisi sisi sebagai dasar informasi jarak untuk membedakan simpul inilah yang melahirkan konsep pewarnaan lokasi sisi (*edge-locating coloring*). Konsep ini secara resmi diperkenalkan oleh Korivand dkk. (2024), yang dikenal sebagai bilangan kromatik lokasi sisi yang dinotasikan dengan $\chi'_L(G)$. Meskipun objek yang diwarnai berbeda, tujuan dari $\chi'_L(G)$ tetap sama dengan $\chi_L(G)$, yaitu untuk menciptakan kode unik bagi setiap simpul dalam graf. Bilangan kromatik lokasi sisi ($\chi'_L(G)$) menunjukkan banyaknya warna paling minimum yang diperlukan untuk pewarnaan lokasi sisi pada Graf G .

Penelitian tentang bilangan kromatik lokasi sisi ($\chi'_L(G)$) merupakan bidang yang relatif baru dan belum banyak diteliti secara menyeluruh. Beberapa penelitian awal telah mengulas bilangan kromatik lokasi sisi pada berbagai

kelas graf dasar. Korivand dkk. (2024) telah berhasil memperoleh informasi mengenai bilangan kromatik lokasi sisi pada graf lintasan (P_n), graf siklus (C_n), graf lengkap (K_n), graf roda (W_n), graf kipas (F_n), graf kincir angin ($W_m(n)$), dan graf buku (B_n).

Graf matahari yang dinotasikan dengan $C_n \odot \overline{K_1}$ adalah suatu graf yang dibentuk dari graf siklus C_n dengan menambahkan satu simpul yang memiliki derajat satu (simpul pendant atau daun) pada setiap simpul di graf siklus C_n , sedemikian hingga jika v_i adalah simpul ke- i dari C_n dan u_i adalah simpul pendant ke- i , maka $v_i u_i$ adalah sisi pendant ke- i untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Graf matahari adalah graf hasil dari operasi korona dari dua graf, yaitu graf siklus C_n dengan $n \geq 3$ dan komplemen dari graf lengkap dengan satu simpul $\overline{K_1}$. Pada graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$ berlaku $|V(C_n \odot \overline{K_1})| = |E(C_n \odot \overline{K_1})| = 2n$ (Slamin dkk., 2012).

Bilangan kromatik lokasi sisi ($\chi'_L(G)$) merupakan konsep yang masih sangat baru dan hasil telaah pustaka menunjukkan bahwa hingga saat ini belum terdapat penelitian yang meneliti bilangan kromatik lokasi sisi pada graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk membahas dan mengkaji bilangan kromatik lokasi sisi pada graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap literatur teori graf serta membuka peluang aplikasi yang lebih luas dalam menangani masalah pewarnaan graf yang lebih kompleks.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi sisi graf terutama pada graf matahari dan barbelnya.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

1. Menambah pengetahuan dan pemahaman pembaca mengenai penentuan bilangan kromatik lokasi sisi graf matahari dan barbelnya.

2. Sebagai bahan rujukan bagi pembaca dalam melakukan penelitian lanjutan terkait penentuan bilangan kromatik lokasi sisi pada jenis graf lainnya.

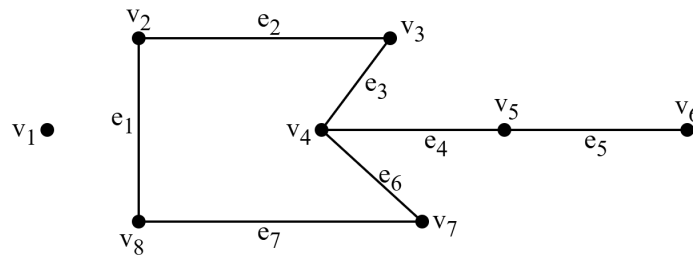
BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

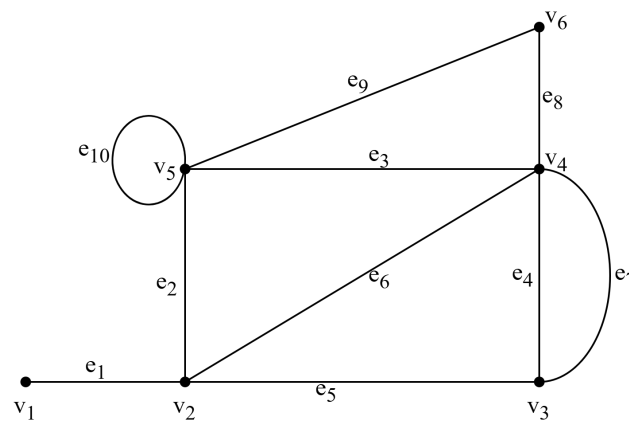
Menurut Slamin (2023) graf adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan simpul berhingga (tidak boleh kosong) dan E adalah himpunan sisi berhingga (boleh kosong) yang menghubungkan pasangan simpul. Orde (*order*) adalah jumlah simpul pada graf sedangkan ukuran (*size*) adalah jumlah sisi pada graf.

Misalkan u dan v adalah simpul-simpul pada suatu graf G , jika terdapat sisi e yang menghubungkan simpul u dan simpul v , yaitu $e = uv$, maka simpul u disebut bertetangga (*adjacent*) dengan simpul v . Simpul v adalah tetangga dari simpul u , dan himpunan dari semua tetangga simpul u disebut ketetanggaan dari simpul u yang dinotasikan dengan $N(u)$. Simpul u dan v dapat juga disebut menempel (*incident*) dengan sisi e . Banyaknya simpul yang menempel pada simpul v yang dinotasikan dengan $d(v)$ adalah derajat dari simpul v pada graf G . Jika simpul v berderajat 0, maka v tidak bertetangga dengan simpul yang lain, sehingga simpul v disebut simpul terasing atau simpul terisolasi (*isolated vertex*). Simpul yang hanya memiliki derajat satu disebut simpul ujung (*end vertex*) atau daun (*leaf*) (Slamin, 2023).



Gambar 2.1 Contoh graf dengan orde 8 ukuran 7

Gambar 2.1 adalah contoh graf $G(V, E)$ yang memiliki orde 8 dan ukuran 7, dengan himpunan simpul $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Jumlah derajat dalam suatu graf adalah dua kali banyak sisi yang ada pada graf. Pada Gambar 2.1 jumlah derajatnya adalah 14 dengan uraiannya $d(v_4) = 3$, $d(v_2) = d(v_3) = d(v_5) = d(v_7) = d(v_8) = 2$ dan $d(v_6) = 1$. Karena v_6 memiliki derajat satu maka v_6 disebut simpul ujung (*end vertex*) atau daun (*leaf*). Pada Gambar 2.1 simpul v_2 bertetangga dengan simpul v_3 dan simpul v_8 , sedangkan simpul v_2 dan simpul v_8 menempel pada sisi e_1 . Himpunan tetangga dari $N(v_2)$ adalah $\{v_3, v_8\}$. Simpul v_1 disebut simpul terasing karena v_1 berderajat 0, artinya v_1 tidak bertetangga dengan sebarang simpul yang lain.



Gambar 2.2 Contoh graf dengan 6 simpul dan 10 sisi

Dalam pembahasan graf sering muncul beberapa istilah seperti gelung (*loop*), jalan (*walk*), lintasan (*path*), jarak (*distance*), dan siklus (*cycle*). Menurut Deo (1989), gelung (*loop*) adalah suatu sisi yang kedua ujungnya berakhir pada

suatu simpul yang sama, sedangkan sisi paralel (*parallel edges*) adalah sisi yang memiliki dua simpul akhir yang sama. Suatu graf disebut graf sederhana (*simple graph*) jika graf tersebut tidak memiliki gelung (*loop*) maupun sisi paralel (*parallel edges*). Dapat dilihat pada Gambar 2.2 sisi e_4 dan sisi e_7 adalah sisi paralel (*parallel edges*) dan sisi e_{10} adalah gelung (*loop*) sehingga Gambar 2.2 tidak termasuk graf sederhana.

Jalan (*walk*) adalah rangkaian simpul dan sisi yang berurutan, dengan aturan yang menyatakan bahwa simpul dan sisi dapat dilalui berulang kali. Contoh jalan (*walk*) dari simpul v_1 ke simpul v_6 berdasarkan Gambar 2.2 adalah $v_1 - e_1 - v_2 - e_5 - v_3 - e_4 - v_4 - e_6 - v_2 - e_2 - v_5 - e_9 - v_6$.

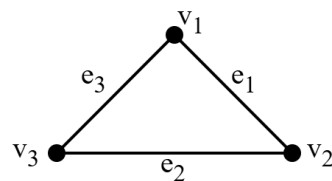
Lintasan (*path*) adalah rangkaian dari simpul dan sisi yang berurutan, dengan aturan yang menyatakan bahwa semua simpul dan sisi hanya dapat dilalui satu kali. Contoh lintasan (*path*) dari simpul v_1 ke simpul v_6 berdasarkan Gambar 2.2 adalah $v_1 - e_1 - v_2 - e_5 - v_3 - e_4 - v_4 - e_3 - v_5 - e_9 - v_6$.

Jarak (*distance*) yang dinotasikan dengan $d(u, v)$ didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek yang menghubungkan simpul u dan simpul v . Sebagai contoh, jarak dari v_1 ke v_2 dan v_3 ke v_6 , berdasarkan Gambar 2.2 diperoleh $d(1, 2) = 1$ dan $d(3, 6) = 2$.

Graf G disebut graf terhubung apabila untuk setiap dua simpul yang berbeda di G terdapat lintasan yang menghubungkan keduanya. Jika hal ini tidak berlaku, maka G disebut tidak terhubung (Wamiliana, 2022). Berikut diberikan definisi beberapa jenis graf terhubung serta operasi pada graf yang digunakan dalam penelitian ini, yaitu graf siklus C_n dan graf lengkap (K_n).

Siklus (*cycle*) adalah lintasan tertutup (*closed path*) dengan setiap simpul (kecuali simpul awal dan simpul akhir) hanya muncul satu kali. Dengan kata lain, siklus merupakan lintasan yang memiliki simpul awal dan simpul akhir yang sama. Contoh siklus (*cycle*) berdasarkan Gambar 2.2 adalah $v_2 - e_5 - v_3 - e_4 - v_4 - e_3 - v_5 - e_2 - v_2$. Graf siklus adalah jenis graf terhubung dengan setiap simpulnya memiliki derajat dua. Graf siklus dengan n simpul dinotasikan dengan C_n , dengan $n \geq 3$. Graf siklus C_n terdiri

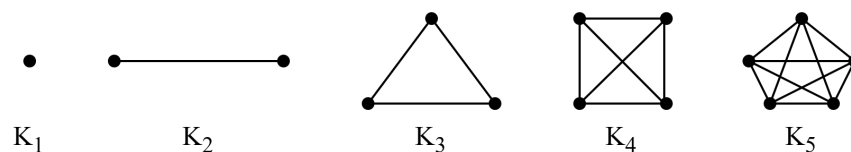
atas n simpul, yaitu $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$. Setiap simpul tersebut dihubungkan secara berurutan sehingga terbentuk sisi-sisi pada graf siklus C_n yaitu $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$. Dengan demikian, terdapat suatu sisi yang menghubungkan simpul terakhir, yaitu v_n , dengan simpul pertama, yaitu v_1 sehingga membentuk lintasan tertutup (Munir, 2010).



Gambar 2.3 Graf siklus C_3

Gambar 2.3 adalah contoh graf siklus yang memiliki 3 simpul dan 3 sisi, yaitu himpunan simpul $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$. Himpunan simpul dan himpunan sisi tersebut membentuk lintasan tertutup.

Graf lengkap (*complete graph*) adalah jenis graf terhubung yang setiap pasangan simpulnya dihubungkan oleh sebuah garis. Graf lengkap dengan n simpul dinotasikan dengan K_n , dan banyaknya sisi pada K_n adalah $\frac{1}{2}n(n-1)$ (Wamiliana, 2022). Berikut diberikan contoh graf lengkap.



Gambar 2.4 Contoh graf lengkap K_n untuk beberapa n

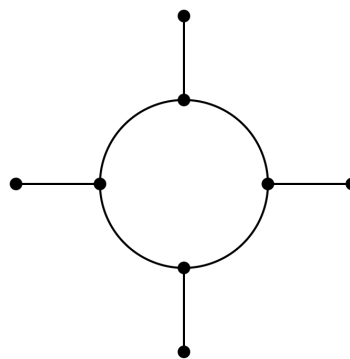
Operasi juga dapat diterapkan pada suatu graf. Salah satu jenis operasi yang dapat diterapkan pada suatu graf adalah operasi komplement. Komplement graf dari graf G dinotasikan dengan $\overline{G}$. Komplement graf adalah graf yang tetap mempertahankan himpunan simpul $V(G)$ yang sama dengan graf G , namun sisi-sisi pada $\overline{G}$ terdiri dari seluruh pasangan simpul yang tidak terhubung pada graf G . Dengan kata lain, dua simpul akan saling terhubung di $\overline{G}$ jika

dan hanya jika keduanya tidak terhubung oleh suatu sisi di graf aslinya, yaitu G (Chartrand dkk., 2011). Berikut diberikan contoh komplemen graf dari graf lengkap (K_3).



Gambar 2.5 (a) Graf K_3 , (b) Graf $\overline{K_3}$

Operasi juga dapat dilakukan pada dua graf sehingga dapat menjadi graf baru. Salah satu operasi pada dua graf adalah operasi korona yang telah diperkenalkan oleh Frucht dan Harary pada tahun 1970. Operasi korona antara graf G dan graf H dinotasikan dengan $G \odot H$ yaitu graf yang dibentuk dari salinan graf H sebanyak simpul yang terdapat pada graf G , salinan graf H dinyatakan dengan $H_i, i = 1, 2, 3, \dots, |V(G)|$, dengan $|V(G)|$ merupakan banyaknya simpul di G , kemudian setiap simpul ke- i di $V(G)$ akan terhubung dengan setiap simpul di H_i (Frucht dan Harary, 1970). Berikut diberikan contoh operasi korona $C_4 \odot \overline{K_1}$.

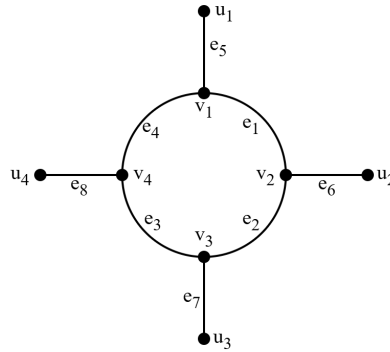


Gambar 2.6 Graf hasil operasi korona $C_4 \odot \overline{K_1}$

Gambar 2.6 merupakan graf yang dibentuk dengan melakukan operasi korona pada graf siklus C_4 dan komplemen graf lengkap $\overline{K_1}$ sehingga menghasilkan graf baru yaitu $C_4 \odot \overline{K_1}$.

Graf matahari adalah graf hasil operasi korona dari dua graf, yaitu graf siklus C_n dengan $n \geq 3$ dan komplemen dari graf lengkap dengan satu simpul $\overline{K_1}$. Graf matahari dinotasikan dengan $C_n \odot \overline{K_1}$.

Graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$ adalah suatu graf yang dibentuk dari graf siklus C_n dengan menambahkan satu simpul yang memiliki derajat satu (simpul pendent atau daun) pada setiap simpul di graf siklus C_n , sedemikian hingga jika v_i adalah simpul ke- i dari C_n dan u_i adalah simpul pendent ke- i , maka $v_i u_i$ adalah sisi pendent ke- i untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Himpunan simpul dari graf matahari yaitu $V(C_n \odot \overline{K_1}) = \{v_i, u_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ serta himpunan sisinya yaitu $E(C_n \odot \overline{K_1}) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_n v_1\} \cup \{u_i v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ atau $E(C_n \odot \overline{K_1}) = \{e_i \mid 1 \leq i \leq 2n\}$. Pada graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$ berlaku $|V(C_n \odot \overline{K_1})| = |E(C_n \odot \overline{K_1})| = 2n$. Berikut diberikan contoh graf matahari $C_4 \odot \overline{K_1}$ (Slamin dkk., 2012).

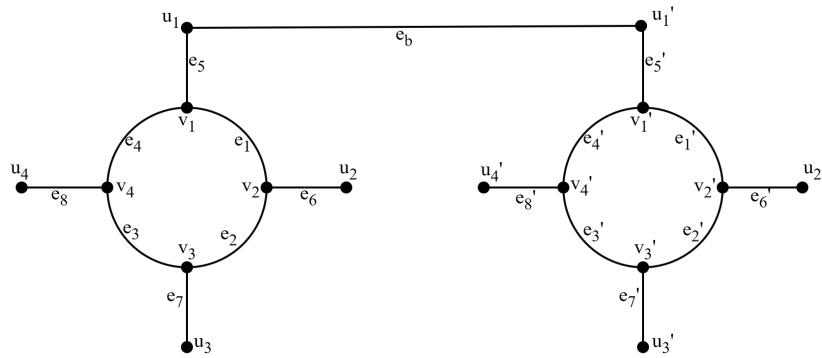


Gambar 2.7 Graf matahari $C_4 \odot \overline{K_1}$

Graf barbel adalah suatu graf yang dibentuk dengan menghubungkan dua graf sembarang yang terhubung, yaitu G dan H , dengan menggunakan satu sisi sebagai jembatan. Kedua graf yang dihubungkan tidak harus sama, sehingga bisa memiliki banyaknya simpul atau struktur yang berbeda (Asmiati dkk., 2018).

Graf barbel matahari merupakan graf yang dibentuk dari graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$ dan salinan graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$ yaitu $C_n \odot \overline{K_1}'$, kemudian kedua graf tersebut dihubungkan dengan satu sisi sebagai jembatan yaitu pada simpul u_1 dan simpul u_1' sehingga menghasilkan sisi $u_1 u_1' = e_b$. Graf barbel matahari

dinotasikan dengan $B_{C_n \odot \overline{K_1}}$. Himpunan simpul dari graf barbel matahari $B_{C_n \odot \overline{K_1}}$ yaitu $V(B_{C_n \odot \overline{K_1}}) = \{v_i, u_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v'_i, u'_i; 1 \leq i \leq n\}$. Serta himpunan sisinya yaitu $E(B_{C_n \odot \overline{K_1}}) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_n v_1\} \cup \{u_i v_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_1 u'_1\} \cup \{v'_i v'_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v'_n v'_1\} \cup \{u'_i v'_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ atau $E(B_{C_n \odot \overline{K_1}}) = \{e_i \mid 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{e_b\} \cup \{e'_i \mid 1 \leq i \leq 2n\}$. Berikut diberikan contoh graf barbel matahari $B_{C_4 \odot \overline{K_1}}$.



Gambar 2.8 Graf barbel matahari $B_{C_4 \odot \overline{K_1}}$

2.2 Bilangan Kromatik Lokasi Sisi

Salah satu topik dari teori graf yang terus berkembang pesat adalah bilangan kromatik. Bilangan kromatik adalah perkembangan teori graf yang berkaitan dengan pewarnaan simpul, yang kemudian berkembang pesat menjadi konsep bilangan kromatik lokasi ($\chi_L(G)$), yaitu suatu konsep perkembangan dari pewarnaan simpul dan dimensi partisi. Pada tahun 2002, Chartrand dkk. memperkenalkan konsep bilangan kromatik lokasi yang dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Konsep tersebut tidak hanya memenuhi persyaratan pewarnaan tetapi juga memanfaatkan informasi jarak ke kumpulan warna untuk menciptakan kode warna yang unik bagi setiap simpul (Chartrand dkk., 2002)

Penelitian mengenai $\chi_L(G)$ telah dilakukan secara luas pada berbagai kelas graf seperti amalgamasi bintang, graf barbel, graf split siklus, graf split lintasan, graf helm, dan gabungan graf palem. Perkembangan yang cepat ini mendorong para peneliti untuk menjelajahi variasi baru dengan mengalihkan fokus dari partisi himpunan simpul ($V(G)$) ke himpunan sisi ($E(G)$). Inovasi

ini membawa pada lahirnya sebuah konsep baru, yaitu bilangan kromatik lokasi sisi ($\chi'_L(G)$), yang diperkenalkan oleh Korivand dkk. pada tahun 2024, dengan $\chi'_L(G)$ merepresentasikan banyaknya minimum warna yang dibutuhkan untuk pewarnaan lokasi sisi dari G sehingga kode warna untuk setiap simpul berdasarkan jarak ke sisi yang diwarnai menjadi unik (Korivand dkk., 2024).

Berikut diberikan definisi dari bilangan kromatik lokasi sisi yang diambil dari (Korivand dkk., 2024). Misalkan G adalah graf terhubung sederhana. Misalkan $c : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ adalah suatu pewarnaan sisi pada graf G . Pewarnaan c disebut pewarnaan sisi yang sejati (*proper edge coloring*) yaitu untuk setiap pasangan sisi yang bertetangga pada graf G memiliki warna yang berbeda. Misalkan $\pi = (C_1, C_2, \dots, C_k)$ menunjukkan partisi terurut dari $E(G)$, yang merupakan kelas-kelas warna. Untuk setiap simpul v di G , kode warna sisi $C_\pi(v)$ adalah k -pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$, dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, e) \mid e \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$ adalah jarak minimum dari v ke kelas warna C_i dan jarak minimum dari simpul v dan sisi $e = xy$ adalah $d(v, e) = \min\{d(v, x), d(v, y)\}$. Pewarnaan c disebut pewarnaan lokasi sisi dari G jika simpul-simpul yang berbeda dari G memiliki kode warna sisi yang berbeda. Bilangan kromatik lokasi sisi $\chi'_L(G)$ adalah minimum warna yang dibutuhkan untuk pewarnaan lokasi sisi dari G .

Berikut ini teorema dasar yang telah dibuktikan Korivand dkk. pada tahun 2024 mengenai bilangan kromatik lokasi sisi.

Teorema 2.2.1(Korivand dkk., 2024). Untuk suatu graf siklus C_n dengan $n \geq 3$, bilangan kromatik lokasi sisi $\chi'_L(C_n)$ yaitu:

$$\chi'_L(C_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 3, \\ 4, & \text{untuk } n \geq 4. \end{cases}$$

Bukti:

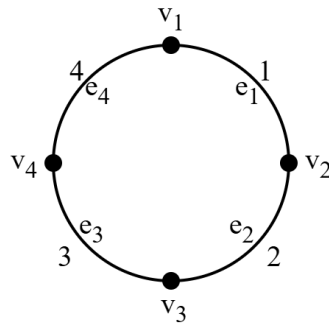
Diketahui untuk $n = 3$, $\chi'_L(C_n) = \chi'_L(C_3) = 3$. Untuk kasus $n \geq 4$ diasumsikan bahwa $\chi'_L(C_n) > 3$. Kasus ini dibuktikan dengan menggunakan metode kontradiksi, yaitu menetapkan bahwa sisi-sisi dari C_n diwarnai dengan tiga warna dan mengasumsikan bahwa menggunakan tiga warna adalah warna

yang paling sedikit digunakan dalam C_n . Misalkan $e = v_1v_2$ mewakili satu-satunya sisi yang diberi warna 3. Karena $n \geq 4$, jika n ganjil, simpul v_3 dan v_n memiliki kode warna sisi yang sama dan untuk n genap, simpul v_1 dan v_2 memiliki kode warna sisi yang sama. Dengan demikian, warna 3 diberikan pada minimal dua sisi. Selanjutnya asumsikan bahwa e dan f adalah dua sisi berwarna 3 dengan jarak minimum $d(e, f) = \min\{d(e_1, e_2) \mid e_1, e_2 \in C_3\}$. Jika jarak antara e dan f adalah ≥ 2 , dengan simpul a bertetangga dengan v , simpul v bertetangga dengan u , dan simpul u bertetangga dengan b . Dengan kata lain, terdapat lintasan pendek yang menghubungkan keempat simpul tersebut secara berurutan, yaitu $a - v - u - b$. Karena sisi yang diberi warna 3 adalah $e = vu$, maka v dan u merupakan simpul ujung dari sisi tersebut, sedangkan a dan b berada masing-masing satu langkah dari v dan u . Susunan ini menunjukkan bahwa a dan b berada pada posisi yang simetris terhadap sisi e , sehingga keduanya memperoleh kode warna sisi yang sama yaitu $c_\pi(a) = c_\pi(b)$. Misalkan $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ adalah suatu matching alternatif yang maksimal yaitu himpunan sisi yang seluruhnya merupakan bagian dari kelas warna C_3 , tidak memiliki simpul yang sama yaitu tidak ada dua sisi yang bertemu di simpul yang sama dan juga memenuhi karakteristik bahwa jarak antara dua sisi berurutan, yaitu e_i dan e_{i+1} , adalah satu untuk setiap $1 \leq i \leq m$. Karena tiga warna adalah warna yang paling sedikit berlaku dalam C_n , simpul a dan b yang memiliki sifat $d(a, e_1) = d(b, e_m) = 1$ dan bukan simpul akhir dari e_i , untuk $1 \leq i \leq m$, memiliki kode warna sisi yang sama, yaitu $(0, 0, 1)$. Karena dalam semua kasus ada dua simpul yang memiliki kode warna sisi yang sama, maka $\chi'_L(C_n) \geq 3$ adalah suatu kontradiksi. ■

Akibat 2.2.1 Diperoleh 4-pewarnaan lokasi sisi dari C_4 sedemikian rupa sehingga menetapkan dua sisi yang berdekatan warna 3 dan 4, dan sisi-sisi lainnya diwarnai dengan 1 dan 2, secara bergantian.

Contoh 2.1:

Berikut ini diberikan contoh pewarnaan lokasi sisi minimum pada graf siklus C_4 .



Gambar 2.9 Contoh pewarnaan lokasi sisi minimum pada graf siklus C_4

Pada Gambar 2.9 diberikan $C_1 = \{e_1\}$, $C_2 = \{e_2\}$, $C_3 = \{e_3\}$, $C_4 = \{e_4\}$. Sehingga kode warna yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$c_\pi(v_1) = (0, 1, 1, 0) \quad c_\pi(v_3) = (1, 0, 0, 1)$$

$$c_\pi(v_2) = (0, 0, 1, 1) \quad c_\pi(v_4) = (1, 1, 0, 0)$$

Karena setiap simpul pada graf siklus C_4 memiliki kode warna yang berbeda sehingga graf C_4 memenuhi syarat sebagai pewarnaan lokasi sisi. Oleh karena itu, $\chi'_L(C_4) = 4$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Langkah-Langkah Penelitian

Dalam penelitian ini, penentuan bilangan kromatik lokasi sisi pada graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$ untuk $n \geq 3$ dan barbelnya dilakukan melalui langkah-langkah berikut.

1. Menentukan bilangan kromatik lokasi sisi graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$ untuk $n \geq 3$.
 - a. Mengkontruksi graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$ untuk $n \geq 3$.
 - b. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi sisi graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$ untuk $n \geq 3$. Karena graf $C_n \odot \overline{K_1}$ memuat graf siklus C_n , maka pewarnaan sisi pada graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$ sekurang-kurangnya sama dengan pewarnaan lokasi sisi dari graf siklus C_n . Apabila batas tersebut belum memenuhi ketentuan pewarnaan lokasi sisi, maka jumlah warna ditambahkan secara bertahap hingga seluruh syarat pewarnaan lokasi sisi terpenuhi.
 - c. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi sisi graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$ untuk $n \geq 3$. Pada tahap ini dilakukan konstruksi pewarnaan

pada graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$ untuk $n \geq 3$ sehingga memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi sisi. Pewarnaan sisi pada graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$ dimulai dengan mewarnai graf siklus C_n . Kemudian dilanjutkan pewarnaan pada semua sisi di luar graf siklus C_n , sehingga diperoleh kelas warna dan pewarnaan minimum pada sisi-sisi graf yang memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi sisi.

- d. Jika batas atas $\chi'_L(C_n \odot \overline{K_1}) \leq x$ dan batas bawah $\chi'_L(C_n \odot \overline{K_1}) \geq x$, maka akan diperoleh bilangan kromatik lokasi sisi yaitu:

$$\chi'_L(C_n \odot \overline{K_1}) = x$$

- e. Hasil yang diperoleh selanjutnya dirumuskan dalam bentuk pernyataan matematika.
- f. Melakukan pembuktian terhadap hasil-hasil yang diperoleh pada Langkah e.
2. Menentukan bilangan kromatik lokasi sisi graf barbel matahari $B_{C_n \odot \overline{K_1}}$ untuk $n \geq 3$.
- a. Mengkontruksi graf barbel matahari $B_{C_n \odot \overline{K_1}}$ untuk $n \geq 3$.
- b. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi sisi graf barbel matahari $B_{C_n \odot \overline{K_1}}$ untuk $n \geq 3$. Karena graf $B_{C_n \odot \overline{K_1}}$ memuat graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$ untuk $n \geq 3$, maka pewarnaan sisi pada graf barbel matahari $B_{C_n \odot \overline{K_1}}$ sekurang-kurangnya sama dengan pewarnaan lokasi sisi dari graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$. Apabila batas tersebut belum memenuhi ketentuan pewarnaan lokasi sisi, maka jumlah warna ditambahkan secara bertahap hingga seluruh syarat pewarnaan lokasi sisi terpenuhi.
- c. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi sisi graf barbel matahari $B_{C_n \odot \overline{K_1}}$ untuk $n \geq 3$. Pada langkah ini dilakukan konstruksi pewarnaan pada graf barbel matahari $B_{C_n \odot \overline{K_1}}$ untuk $n \geq 3$, sehingga memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi sisi. Pewarnaan sisi pada graf barbel matahari $B_{C_n \odot \overline{K_1}}$ dimulai dengan mewarnai graf siklus C_n . Kemudian dilanjutkan pewarnaan pada semua sisi di luar graf siklus C_n , sehingga diperoleh kelas warna dan pewarnaan minimum pada sisi-sisi graf yang memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi sisi.
- d. Jika batas atas $\chi'_L(B_{C_n \odot \overline{K_1}}) \leq x$ dan batas bawah $\chi'_L(B_{C_n \odot \overline{K_1}}) \geq x$,

maka akan diperoleh bilangan kromatik lokasi sisi yaitu:

$$\chi'_L(B_{C_n \odot \overline{K_1}}) = x$$

- e. Hasil yang diperoleh selanjutnya dirumuskan dalam bentuk pernyataan matematika.
- f. Melakukan pembuktian terhadap hasil-hasil yang diperoleh pada Langkah e.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang telah diuraikan, dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik lokasi sisi graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$ dan graf barbel matahari $B_{C_n \odot \overline{K_1}}$ yaitu:

$$\chi'_L(C_n \odot \overline{K_1}) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } n = 3 \text{ dan } 4, \\ 5, & \text{untuk } n \geq 5. \end{cases}$$

dan

$$\chi'_L(B_{C_n \odot \overline{K_1}}) = 5, \text{ untuk } n \geq 3$$

5.2 Saran

Penelitian mengenai bilangan kromatik lokasi sisi graf matahari dan barbelnya dapat dikembangkan dengan menerapkan operasi graf lainnya. Selain itu, konsep bilangan kromatik lokasi sisi dapat diterapkan pada graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Asmiati. (2023). *GRAF Aplikasinya pada Lintasan Terpendek Edisi 2*. Yogyakarta: MATEMATIKA.
- Asmiati, A. (2017). Bilangan kromatik lokasi n amalgamasi bintang yang dihubungkan suatu lintasan. *Jurnal Matematika Integratif*, 13(2), 115–121.
- Asmiati, A., Yana, I.K.S.G., & Yulianti, L. (2018). On the locating chromatic number of certain barbell graphs. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 1–5.
- Asmiati, A., Damayanti, M., & Yulianti, L. (2021). On the locating chromatic number of barbell shadow path graphs. *Indonesian Journal of Combinatorics*, 5(2), 82–93.
- Chartrand, G., Salehi, E., and Zhang, P. (2000). The partition dimension of a graph. *Aequationes Mathematicae*, 59, 45–54.
- Chartrand, G., Johns, G., McKeon, K., & Zhang, P. (2002). The location chromatic number of a graph. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 36, 89–101.
- Chartrand, G., Lesniak, L., & Ping, Z. (2011). *Graph & Digraph* (5th ed.). Boca Raton: CRC Press.
- Deo, N. (1989). *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. New Delhi: Prentice Hall of India Private Limited.
- Frucht, R., dan Harary, F. (1970). On the Corona of Two Graphs. *Aequationes Mathematicae*, 4(3), 322–325.
- Harary, F. and Melter, R. A. (1976). On the metric dimension of a graph. *Ars Combinatoria*, 2, 191–195.

- Korivand, M., Mojdeh, D. A., Baskoro, E. T., & Erfanian, A. (2024). Edge-locating coloring of graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, 12(1), 55–73.
- Lessya, K. N., Welyyanti, D., & Yulianti, L. (2023). Bilangan kromatik lokasi graf Helm H_m dengan $3 \leq m \leq 9$. *Jurnal Matematika UNAND*, **12**(3), 222–228.
- Munir, R. (2010). *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.
- Nurinsani, A., Welyyanti, D., & Yulianti, L. (2024). Bilangan kromatik lokasi gabungan graf palem. *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 9(1), 78–87.
- Prawinasti, K., Ansori, M., Asmiati, A., & Notiragayu, A. R. G. N. R. (2020). The locating chromatic number for split graph of cycle. *Journal of Physics: Conference Series*, 1751, 1–5.
- Rahmatalia, S., Asmiati, & Notiragayu. (2022). Bilangan kromatik lokasi graf split lintasan. *Jurnal Matematika Integratif*, 18(1), 73–80.
- Slamin. (2023). *Teori Graf dan Aplikasinya (Edisi Kedua)*. Malang: Rumpun Dua Belas (R12 Grup).
- Slamin, S., Dafik, D., dan Winnona, W., (2012). Total Vertex Irregularity Strength of the Disjoint Union of Sun Graphs. *International Journal of Combinatorics*, 2012(1), 1–9.
- Wamiliana. (2022). *Minimum Spanning Tree dan Desain Jaringan*. Bandarlampung: Pusaka Media.
- Yulianti, A., Asmiati, & Notiragayu. (2024). The locating-chromatic number for amalgamation of some complete graph. *InPrime*, 6(1), 76–88.