TEOREMA ROLLE DAN TEOREMA NILAI RATA-RATA PADA FUNGSI BERNILAI BARISAN l_2

Skripsi

Oleh

KARTIKA CHANDRA KIRANA
NPM. 2217031027

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

ABSTRACT

ROLLE'S THEOREM AND THE MEAN VALUE THEOREM ON l_2 -VALUED SEQUENCE FUNCTIONS

By

KARTIKA CHANDRA KIRANA

This thesis discusses Rolle's Theorem and the Mean Value Theorem for sequence-valued functions in the space l_2. The discussion begins with the basic concepts of limits, continuity, and derivatives of sequence-valued functions as the main foundation. It is then shown that both theorems remain valid for sequence-valued functions in the space l_2, provided that the functions are continuous on a closed interval and differentiable on an open interval with respect to the l_2 norm. The results show that the relationship between Rolle's Theorem and the Mean Value Theorem for sequence-valued functions is consistent with the real-valued case. Therefore, the basic concepts of calculus can be extended to the sequence space l_2 as a Banach space and a Hilbert space.

Keywords: Rolle's Theorem, Mean Value Theorem, sequence-valued functions, l_2 space.

ABSTRAK

TEOREMA ROLLE DAN TEOREMA NILAI RATA-RATA PADA FUNGSI BERNILAI BARISAN l_2

Oleh

KARTIKA CHANDRA KIRANA

Skripsi ini membahas Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-Rata pada fungsi bernilai barisan di ruang l_2. Pembahasan dimulai dengan konsep dasar limit, kontinuitas, dan turunan pada fungsi bernilai barisan sebagai landasan utama. Selanjutnya ditunjukkan bahwa kedua teorema tersebut tetap berlaku pada fungsi bernilai barisan di ruang l_2 dengan memenuhi syarat kekontinuan pada interval tertutup dan terdiferensialkan pada interval terbuka dalam norma l_2. Hasil kajian ini menunjukkan bahwa hubungan antara Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-Rata pada fungsi bernilai barisan sejalan dengan kasus fungsi bernilai real. Dengan demikian, konsep dasar kalkulus dapat diperluas ke dalam ruang barisan l_2 sebagai ruang Banach dan ruang Hilbert.

Kata-kata kunci: Teorema Rolle, Teorema Nilai Rata-Rata, fungsi bernilai barisan, ruang l_2.

TEOREMA ROLLE DAN TEOREMA NILAI RATA-RATA PADA FUNGSI BERNILAI BARISAN l_2

KARTIKA CHANDRA KIRANA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

Judul Skripsi : **TEOREMA ROLLE DAN TEOREMA NILAI RATA-RATA PADA FUNGSI BERNILAI BARISAN l_2**

Nama Mahasiswa : *kartika chandra kirana*

Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031027**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si.,M.Sc.	**Riza Sawitri, S.Pd.,M.Sc.**
NIP 197202271998021001	NIP 198905042024062001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr.Aang Nuryaman, S.Si.,M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Muslim Ansori, S.Si.,M.Sc.** ....

Sekretaris : **Riza Sawitri, S.Pd.,M.Sc.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr.Aang Nuryaman, S.Si.,M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **18 Februari 2026**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**KARTIKA CHANDRA KIRANA**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031027**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**TEOREMA ROLLE DAN TEOREMA NILAI RATA-RATA PADA FUNGSI BERNILAI BARISAN l_2**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi inni merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai degnan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 18 Februari 2026

Penulis,

METERAI TEMPEL

0C005ANX294176021

KARTIKA CHANDRA KIRANA

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Kartika Chandra Kirana, lahir di Bandar Jaya, Lampung Tengah, pada tanggal 10 Juni 2004.

Pendidikan dasar ditempuh di SD Negeri 2 Murnijaya. Setelah menyelesaikan pendidikan dasar, penulis melanjutkan ke jenjang Sekolah Menengah Pertama di SMP Negeri 01 Tumijajar. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan ke jenjang Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 01 Tumijajar dan lulus dengan baik.

Pada tahun 2022, penulis melanjutkan pendidikan ke jenjang Perguruan Tinggi di Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, melalui jalur Seleksi Nasional Berdasarkan Prestasi (SNBP).

Selama menempuh pendidikan di perguruan tinggi, penulis telah melaksanakan Praktik Kerja Lapangan (PKL) di Dinas Perhubungan Kota Bandar Lampung, serta melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Sukabumi, Campang Jaya, Bandar Lampung.

Penulis berharap ilmu dan pengalaman yang diperoleh selama masa studi dapat bermanfaat, baik bagi diri sendiri maupun masyarakat luas.

KATA INSPIRASI

Filipi 4:6

Janganlah hendaknya kamu kuatir tentang apa pun juga, tetapi nyatakanlah dalam segala hal keinginanmu kepada Allah dalam doa dan permohonan dengan ucapan syukur.

Lagu ”Pembuat Mujizat”

Lirik ”Tak ada yang mustahil bagi-Mu,” kalimat ini menjadi penguat bagi penulis dalam menjalani proses penyusunan skripsi yang penuh tantangan. Di saat kemampuan terasa terbatas dan langkah terasa berat, iman mengajarkan untuk tetap percaya dan bertahan. Skripsi ini menjadi bukti bahwa dengan ketekunan, doa, dan pengharapan kepada Tuhan, setiap proses yang tampak sulit dapat dilalui.

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas kasih setia-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan kasih setia serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anak kecil mu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang dan dapat menjadi berkat bagi sesama tanpa memandang apapun.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Orang Terkasih

Terimakah kepada abang sudah memberikan dukungan yang sangat mendalam dan sudah menjadi sosok penyemangat dalam mengerjakan skripsi ini dan telah menemani sampai skripsi ini selesai.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-Rata pada Fungsi Bernilai Barisan l_2” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Riza Safitri, S.Pd., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Sc. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Ir. Warsono., M.S., Ph.D. selaku dosen pembimbing akademik.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Terima kasih yang tak terhingga untuk Bapak dan Ibu tercinta, yang selalu menjadi sumber kekuatan dan inspirasi dalam setiap langkah hidup penulis. Tiada kata yang mampu menggambarkan betapa besar kasih dan pengorbanan kalian. Segala doa dan cinta kalian adalah alasan penulis dapat sampai pada titik ini. Karya ini penulis persembahkan sebagai ungkapan cinta dan rasa bangga menjadi anak kalian.
8. Terima kasih untuk sahabat, teman, serta kakak dengan NPM 2217031007 Dan 2217031043 yang telah menemani dan memberikan dukungan kepada penulis sejak masa mahasiswa baru hingga saat ini. Kebersamaan, motivasi, dan bantuan yang diberikan sangat berarti dalam proses penyelesaian skripsi ini. Semoga segala kebaikan tersebut mendapatkan balasan yang terbaik.
9. Terima kasih untuk orang terkasih dengan NPM 2412011460, penulis sampaikan kepada seseorang yang istimewa di hati penulis, yang selalu menemani di setiap langkah perjuangan ini. Terima kasih atas doa, motivasi, dan kasih sayang yang menjadi sumber kekuatan dalam menyelesaikan setiap tantangan. Tanpa dukunganmu, mungkin perjalanan ini tak akan semudah ini.
10. Terima kasih kepada teman-teman seperjuangan bimbingan yaitu Sadiah dan Heni yang telah bersama-sama menjalani proses penyusunan skripsi ini. Diskusi, saran, serta dukungan yang diberikan, baik secara langsung maupun tidak langsung, sangat membantu penulis dalam menyelesaikan karya ini.
11. Penulis mengucapkan terima kasih kepada diri sendiri yang telah bertahan dan terus melangkah di tengah berbagai keterbatasan, keraguan, dan tantangan selama proses penyusunan skripsi ini. Kesabaran, ketekunan, dan keberanian untuk tidak menyerah menjadi bagian penting hingga karya ini dapat diselesaikan. Pengalaman ini menjadi pembelajaran berharga bagi penulis dalam menumbuhkan kedewasaan, tanggung jawab, dan kepercayaan diri.
12. Seluruh pihak terkait yang membantu penulis yang tidak bisa disebutkan satu per satu atas peran dan dukungannya dalam menyelesaikan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung,

Kartika Chandra Kirana

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Barisan adalah susunan bilangan yang diatur dalam urutan tertentu, misalnya $1, 2, 3, \ldots$(Widodo, 2017). Dalam matematika, barisan tidak hanya dianggap sebagai daftar bilangan, tetapi juga dipelajari sifat-sifatnya, seperti apakah barisan tersebut konvergen atau divergen (Soewito, 2015). Salah satu ruang penting yang memuat barisan khusus adalah ruang l_2, yaitu himpunan semua barisan bilangan real (atau kompleks) yang jumlah kuadrat suku-sukunya berhingga (Kreyszig, 1989). Ruang l_2 sangat penting dalam analisis modern karena memiliki struktur ruang Hilbert, yang banyak digunakan dalam analisis fungsional, teori operator, maupun penerapan dalam fisika dan teknik (Conway, 1990).

Ruang l_2 juga termasuk dalam kategori ruang Banach, yaitu ruang bernorm yang lengkap di mana setiap barisan Cauchy di dalamnya pasti konvergen. Ruang ini memungkinkan pembahasan fungsi yang bernilai barisan, bukan hanya bernilai real, sehingga konsep limit, kontinuitas, dan turunan dapat diperluas ke dalam ruang bernilai barisan (Bartle & Sherbert, 2000). Dengan memahami sifat-sifat ruang Banach, dapat dipelajari tentang perilaku fungsi yang memiliki nilai berupa barisan dalam konteks analisis fungsional.

Dalam analisis real, Teorema Rolle merupakan teorema penting yang menjelaskan hubungan antara nilai fungsi dan turunannya. Teorema ini menyatakan bahwa jika suatu fungsi kontinu pada interval tertutup dan dapat diturunkan pada interval terbuka, serta nilai fungsi di kedua ujung interval sama, maka terdapat sedikitnya satu titik di dalam interval tersebut di mana turunan fungsi bernilai nol (Chaudhary dkk., 2023). Teorema ini menjadi dasar dalam memahami perilaku fungsi yang halus dan kontinu pada suatu interval.

Selanjutnya, Teorema Nilai Rata-Rata menyatakan bahwa terdapat suatu titik di dalam interval di mana laju perubahan sesaat fungsi sama dengan laju perubahan rata-rata fungsi pada interval tersebut. Artinya, turunan fungsi di titik tertentu menggambarkan rata-rata perubahan fungsi pada keseluruhan interval. Konsep ini sangat penting dalam kalkulus karena menjelaskan keterkaitan antara fungsi dan turunannya (Purcell dkk., 2007).

Kedua teorema tersebut saling berkaitan erat karena sama-sama menekankan hubungan antara kontinuitas dan keterdiferensialan suatu fungsi. Pada Teorema Rolle nilai fungsi di ujung interval sama, sedangkan pada Teorema Nilai Rata-Rata perbedaan nilai di ujung interval digunakan untuk menentukan kemiringan rata-rata fungsi. Hubungan inilah yang menjadi dasar penting dalam memperluas kedua teorema tersebut ke fungsi bernilai barisan di ruang l_2 (Kreyszig, 1989).

Penelitian yang dilakukan oleh Vyborny (1981) merupakan salah satu penelitian terdahulu yang mengkaji tentang Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-Rata. Penelitian tersebut membahas generalisasi teorema nilai rata-rata dan teorema Taylor untuk fungsi yang bernilai pada ruang vektor topologis lokal. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa konsep nilai rata-rata yang berlaku pada fungsi real dapat diperluas ke fungsi bernilai vektor, termasuk ruang Banach dan Hilbert, sehingga memberikan dasar teoritis bagi kajian fungsi bernilai barisan pada ruang l_2.

Dalam penelitian ini, konsep Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-Rata diperluas ke fungsi yang bernilai barisan di ruang l_2. Hal ini berarti fungsi tidak lagi memetakan bilangan real ke bilangan real, tetapi dari $\mathbb{R}$ ke barisan dalam ruang l_2. Penerapan ini menarik karena menunjukkan bagaimana konsep dasar kalkulus satu variabel dapat dikembangkan menjadi bentuk yang lebih umum di ruang bernorm (Conway, 1990).

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dari penulisan proposal ini sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk dan syarat keberlakuan Teorema Rolle pada fungsi bernilai barisan di ruang l_2?
2. Bagaimana bentuk dan syarat keberlakuan Teorema Nilai Rata-Rata pada fungsi bernilai barisan di ruang l_2?

3. Bagaimana hubungan antara Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-Rata dalam konteks Fungsi bernilai barisan di ruang l_2?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan Penelitian dari penulisan proposal ini sebagai berikut:

1. Menentukan dan membuktikan bentuk Teorema Rolle yang berlaku pada fungsi bernilai barisan di ruang l_2.
2. Menentukan dan membuktikan bentuk Teorema Nilai Rata-Rata pada fungsi bernilai barisan di ruang l_2.
3. Menganalisis hubungan antara Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-Rata dalam ruang l_2 serta implikasinya terhadap sifat-sifat fungsi bernilai barisan.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat Penelitian dari penulisan proposal ini sebagai berikut:

1. Menambah pengetahuan tentang konsep Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-Rata bernilai barisan di ruang l_2.
2. Memahami konsep dan sifat-sifat Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-Rata bernilai barisan di ruang l_2.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Fungsi

Fungsi merupakan hubungan matematis yang memasangkan setiap elemen himpunan asal dengan tepat satu elemen pada himpunan hasil (Purcell dkk., 2007). Beberapa fungsi memiliki sifat khusus, seperti fungsi bijektif, yaitu fungsi yang bersifat injektif dan surjektif sekaligus. Selain itu, dikenal pula fungsi invers yang mengembalikan pasangan hasil ke pasangan asalnya (Darwanto dkk., 2020). Adapun beberapa definisi fungsi sebagai berikut.

Definisi 2.1.1 Fungsi merupakan salah satu konsep fundamental dalam matematika yang menyatakan adanya hubungan ketergantungan antara variabel bebas dan variabel terikat. Variabel-variabel tersebut berperan sebagai unsur utama dalam pembentukan suatu fungsi (Markonah Riwaty, 2008). Secara formal, suatu fungsi f didefinisikan sebagai suatu aturan korespondensi yang memasangkan setiap elemen p dari suatu himpunan tak kosong, yang disebut daerah asal (domain), dengan tepat satu elemen $f(p)$ pada himpunan lain. Ketunggalan pasangan ini menegaskan bahwa setiap elemen pada daerah asal memiliki satu dan hanya satu nilai hasil. Himpunan yang memuat seluruh nilai hasil pemetaan tersebut disebut sebagai daerah hasil (range) fungsi. Dalam penulisan matematis, fungsi biasanya dilambangkan dengan satu huruf, seperti f, j, atau F, sedangkan notasi $f(p)$, yang dibaca "f dari p", menyatakan nilai fungsi f yang bersesuaian dengan elemen p pada daerah asal (Purcell dkk., 2007).

Contoh 2.1.1 Diketahui suatu fungsi $f(s) = 2s + 3$ dengan $D = \{1, 2, 3, 4\}$. Selanjutnya dapat di tentukan nilai $f(1), f(2), f(3), f(4)$ yang diperoleh sebagai berikut :

Penyelesaian: Gunakan rumus $f(s) = 2s + 3$.

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1) + 3 = 5, \\ f(2) &= 2(2) + 3 = 7, \\ f(3) &= 2(3) + 3 = 9, \\ f(4) &= 2(4) + 3 = 11. \end{aligned}$$

Kemudian akan ditentukan daerah hasil (range) dari fungsi tersebut.

Diperoleh: Range $= \{5, 7, 9, 11\}$.

Fungsi $f(s) = 2s + 3$ menghubungkan setiap $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ ke satu nilai unik di range $\{5, 7, 9, 11\}$. Maka f memenuhi sifat fungsi.

Definisi 2.1.2 Fungsi f dikatakan bijektif jika dan hanya jika f merupakan fungsi injektif serta surjektif secara bersamaan (Darwanto dkk., 2020).

Contoh 2.1.2 Diketahui Fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan rumus $f(s) = s - 1$.

Akan ditunjukkan fungsi f merupakan fungsi bijektif, yaitu memenuhi:

- Syarat injektif, yaitu

  $$f(s_1) = f(s_2) \Rightarrow s_1 = s_2$$

  Diperhatikan bahwa

  $$\begin{aligned} f(s_1) = f(s_2) &\Rightarrow s_1 - 1 = s_2 - 1 \\ &\Rightarrow s_1 = s_2 \end{aligned}$$

  Terbukti bahwa fungsi ini injektif.

- Syarat surjektif, yaitu

  $$\forall t \in \mathbb{R},\ \exists s \in \mathbb{R} \text{ sehingga } f(s) = t$$

  Misalkan $t \in \mathbb{R}$, kemudian mencari nilai s sehingga

  $$f(s) = t \Rightarrow s - 1 = t \Rightarrow s = t + 1$$

  Karena $t + 1 \in \mathbb{R}$, maka selalu ada $s \in \mathbb{R}$ untuk setiap t.

Terbukti bahwa fungsi ini surjektif.

Jadi, karena $f(s) = s - 1$ injektif dan surjektif, maka fungsi tersebut bijektif.

Definisi 2.1.3 Misalkan p adalah anggota himpunan P dan q adalah anggota himpunan Q, maka $f^{-1}(q) = p$ jika $f(p) = q$ (Darwanto dkk., 2020).

Contoh 2.1.3 Diketahui $f = \{(4, p), (5, q), (6, r)\}$ dari $P = \{4, 5, 6\}$ ke $Q = \{a, b, c\}$ adalah fungsi yang berkorespondensi satu ke satu. Invers fungsi $f^{-1} = \{(p, 4), (q, 5), (r, 6)\}$.

2.2 Limit

Limit merupakan konsep dasar dalam kalkulus yang menjelaskan perilaku suatu fungsi ketika variabel mendekati suatu nilai tertentu. Limit sangat penting karena menjadi syarat utama bagi definisi fungsi kontinu dan turunan (Purcell dkk., 2007). Kontinuitas yang didasarkan pada limit inilah yang kemudian menjadi prasyarat dalam penerapan Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-Rata. Dengan kata lain, tanpa adanya limit, baik kontinuitas maupun turunan tidak dapat didefinisikan secara tepat, sehingga teorema-teorema tersebut tidak dapat berlaku. Adapun definisi limit sebagai berikut :

Definisi 2.2.1 Untuk menyatakan bahwa $\lim\limits_{s \to r} f(s) = M$, berarti bahwa ketika s mendekati r, tetapi tidak sama dengan r, maka nilai $f(s)$ akan mendekati M (Purcell dkk., 2007).

Contoh 2.2.1 Misalkan $\lim\limits_{s \to 3}(4s - 5)$. Ketika s mendekati 3 maka $4s - 5$ mendekati terhadap $4 \cdot 3 - 5 = 7$. Dituliskan dalam bentuk

$$\lim_{s \to 3}(4s - 5) = 7$$

Definisi 2.2.2 Untuk menyatakan bahwa $\lim\limits_{s \to r^+} f(s) = M$, berarti bahwa saat s mendekati nilai r dari arah kanan, maka nilai fungsi $f(s)$ mendekati M. Demikian pula, untuk menyatakan bahwa $\lim\limits_{s \to r^-} f(s) = M$, berarti bahwa saat s mendekati nilai r dari arah kiri, maka nilai fungsi $f(s)$ juga mendekati M (Purcell dkk., 2007).

Contoh 2.2.2 Misalkan fungsi $f(s)$ didefinisikan sebagai:

$$f(s) = \begin{cases} s+2, & \text{jika } s < 3, \\ 5, & \text{jika } s = 3, \\ 2s-1, & \text{jika } s > 3. \end{cases}$$

Selanjutnya dapat dicari nilai $\lim\limits_{s \to 3^-} f(s)$ dan $\lim\limits_{s \to 3^+} f(s)$.

Diperhatikan bahwa

Langkah 1: Limit dari arah kiri $(s \to 3^-)$
Untuk $s < 3$, berlaku $f(s) = s + 2$.

$$\lim_{s \to 3^-} f(s) = 3 + 2 = 5.$$

Langkah 2: Limit dari arah kanan $(s \to 3^+)$
Untuk $s > 3$, berlaku $f(s) = 2s - 1$.

$$\lim_{s \to 3^+} f(s) = 2(3) - 1 = 5.$$

Oleh karena

$$\lim_{s \to 3^-} f(s) = 5 \quad \text{dan} \quad \lim_{s \to 3^+} f(s) = 5,$$

maka kedua limit sisi kiri dan kanan sama, sehingga:

$$\lim_{s \to 3} f(s) = 5.$$

Definisi 2.2.3 Diberikan $\lim\limits_{s \to r} f(s) = M$ yang artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$, jika $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(s) - M| < \varepsilon$ dengan syarat $0 < |s - r| < \delta$ atau dengan kata lain $0 < |s - r| < \delta$ maka $|f(s) - M| < \varepsilon$ (Purcell dkk., 2007).

Contoh 2.2.3 Akan ditunjukkan bahwa:

$$\lim_{s \to 2} (3s + 1) = 7$$

Perhatikan bahwa

Langkah 1: Tentukan elemen-elemen definisi

$$f(s) = 3s + 1, \quad r = 2, \quad M = 7.$$

Langkah 2: Rumuskan syarat ε-δ

Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika

$$0 < |s - 2| < \delta,$$

maka

$$|f(s) - 7| < \varepsilon.$$

Langkah 3: Substitusikan $f(s)$ ke dalam bentuk limit

$$|f(s) - 7| = |(3s + 1) - 7| = |3s - 6| = 3|s - 2|.$$

Langkah 4: Hubungan dengan ε

Agar $|f(s) - 7| < \varepsilon$, maka diperlukan

$$3|s - 2| < \varepsilon.$$

$$|s - 2| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Langkah 5: Tentukan nilai δ

Ambil

$$\delta = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Langkah 6: Verifikasi

Jika $0 < |s - 2| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$, maka:

$$|f(s) - 7| = 3|s - 2| < 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon.$$

Kesimpulan: Berdasarkan definisi limit ε-δ, terbukti bahwa:

$$\lim_{s \to 2}(3s + 1) = 7.$$

2.3 Turunan

Dalam analisis matematika, turunan merupakan konsep dasar yang merepresentasikan laju perubahan suatu fungsi seiring perubahan variabel bebasnya (Purcell dkk., 2007). Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, turunan dari f di titik p didefinisikan sebagai

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h},$$

jika limit tersebut ada. Turunan f pada p menyatakan laju perubahan sesaat dari fungsi f pada titik tersebut. Adapun definisi dan teorema turunan sebagai berikut:

Definisi 2.3.1 Turunan dari fungsi f dilambangkan dengan f'. Turunan dari fungsi f pada sebarang bilangan r didefinisikan sebagai $f'(r) = \lim_{h \to 0} \frac{f(r+h)-f(r)}{h}$ dengan syarat limitnya ada dan nilainya bukan merupakan ∞ atau $-\infty$ (Purcell dkk., 2007).

Contoh 2.3.1 Diketahui fungsi $f(s) = s^2$. Berdasarkan definisi turunan, maka diperoleh

$$f'(s) = \lim_{h \to 0} \frac{f(s+h) - f(s)}{h}.$$

Substitusikan fungsi ke dalam rumus:

$$f'(s) = \lim_{h \to 0} \frac{(s+h)^2 - s^2}{h}.$$

Uraikan $(s+h)^2$ sehingga

$$(s+h)^2 = s^2 + 2sh + h^2.$$

Maka

$$f'(s) = \lim_{h \to 0} \frac{2sh + h^2}{h}.$$

Sederhanakan dengan membagi semua suku oleh k

$$f'(s) = \lim_{h \to 0} (2s + h).$$

Saat h mendekati 0, didapatkan

$$f'(s) = 2s.$$

Jadi, turunan dari $f(s) = s^2$ adalah $f'(s) = 2s$.

Teorema 2.3.1

Jika suatu fungsi f mempunyai turunan di titik r, maka fungsi f kontinu di titik r.

Bukti:

Untuk membuktikan f kontinu di r, maka akan ditunjukkan bahwa $\lim_{s \to r} f(s) = f(r)$. Misalkan dinyatakan $f(s)$ dalam bentuk :

$$f(s) = f(r) + \frac{f(s) - f(r)}{s - r}(s - r), \quad s \neq r$$

Masing-masing ruas dikenakan limit, maka

$$\begin{aligned}
\lim_{s \to r} f(s) &= \lim_{s \to r} \left[f(r) + \frac{f(s) - f(r)}{s - r} \cdot (s - r) \right] \\
&= \lim_{s \to r} f(r) + \lim_{s \to r} \frac{f(s) - f(r)}{s - r} \cdot \lim_{s \to r}(s - r) \\
&= f(r) + f'(r) \cdot 0 \\
&= f(r)
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\lim_{s \to r} f(s) = f(r)$ yang berarti f kontinu (Purcell dkk., 2007).

2.4 Barisan

Suatu barisan adalah suatu fungsi

$$p : \mathbb{N} \to S,$$

dengan S merupakan kodomain.

Misalnya $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, atau ruang bernorm seperti l_2. Untuk setiap $j \in \mathbb{N}$, nilai barisan dinotasikan sebagai

$$p(j) = p_j.$$

Dengan demikian, barisan (p_j) dapat dipandang sebagai fungsi yang memetakan setiap bilangan asli ke suatu elemen di dalam S. Adapun definisi barisan sebagai berikut :

Definisi 2.4.1 Barisan didefinisikan sebagai suatu fungsi yang memiliki domain berupa himpunan bilangan bulat positif. Jika setiap bilangan bulat positif

$1, 2, 3, \ldots, j, \ldots$ dipasangkan dengan suatu bilangan real tertentu s_j, maka urutan $s_1, s_2, \ldots, s_j, \ldots$ disebut sebagai suatu barisan (Mizrahi & Sullivan, 1982).

Contoh 2.4.1 Pertimbangkan barisan $p_j = \frac{j}{j+1}$. Beberapa suku awalnya adalah

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

yang menunjukkan bahwa nilai barisan semakin besar.

Perhatikan bahwa

$$\frac{j}{j+1} = 1 - \frac{1}{j+1}.$$

Ketika j semakin besar, suku $\frac{1}{j+1} \to 0$, sehingga $p_j \to 1$.

Karena barisan ini selalu kurang dari 1 dan nilainya meningkat untuk setiap j, maka (p_j) monoton naik dan dibatasi. Dengan demikian, barisan tersebut konvergen dengan limit

$$\lim_{j \to \infty} p_j = 1.$$

Definisi 2.4.2 Barisan Suatu barisan (s_j) dikatakan konvergen apabila terdapat suatu elemen $s \in S$ sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli j_0 dengan sifat bahwa untuk setiap $j \geq j_0$ berlaku

$$|s_j - s| < \varepsilon.$$

Hal ini dapat ditulis sebagai $\lim_{j \to \infty} s_j = s$ atau $(s_j) \to s$ saat $j \to \infty$, dan bilangan s disebut limit barisan tersebut (Darmawijaya, 2007). Sebaliknya, barisan (s_j) dikatakan divergen jika tidak terdapat bilangan $s \in S$ yang memenuhi syarat konvergensi tersebut, yaitu barisan tidak mendekati satu bilangan tertentu atau tidak dapat dibuat cukup dekat dengan suatu bilangan tetap meskipun j diperbesar tanpa batas (Bartle & Sherbert, 2000).

Contoh 2.4.2 Diberikan barisan

$$s_j = \frac{j}{j+2}.$$

Akan dibuktikan bahwa barisan (s_j) konvergen.

Ambil $s = 1$. Untuk setiap $j \in \mathbb{N}$ berlaku

$$|s_j - s| = \left| \frac{j}{j+2} - 1 \right| = \frac{2}{j+2}.$$

Misalkan $\varepsilon > 0$. Pilih $j_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$j_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 2.$$

Maka untuk setiap $j \geq j_0$ diperoleh

$$|s_j - 1| = \frac{2}{j+2} < \varepsilon.$$

Dengan demikian, berdasarkan definisi barisan konvergen, barisan

$$(s_j) = \left(\frac{j}{j+2} \right)$$

adalah konvergen dan

$$\lim_{j \to \infty} s_j = 1.$$

2.5 Deret

Deret merupakan penjumlahan dari suku-suku suatu barisan yang dapat berhingga atau tak hingga. Jika penjumlahan tersebut memiliki batas tertentu maka deret dikatakan konvergen, sedangkan jika tidak memiliki batas disebut divergen (Purcell dkk., 2007). Adapun definisi deret sebagai berikut:

Definisi 2.5.1 Suatu deret tak hingga $\sum_{j=1}^{\infty} p_j$ dikatakan konvergen apabila jumlah dari suku-suku pertamanya, yang membentuk barisan jumlah parsial (T_j), memiliki nilai batas tertentu T saat j menuju tak hingga. Artinya, jika nilai T_j semakin mendekati suatu bilangan tetap T, maka deret tersebut memiliki jumlah T. Namun, jika barisan jumlah parsial (T_j) tidak memiliki batas atau nilainya tidak mendekati suatu bilangan tertentu, maka deret tersebut disebut divergen, yang berarti deret tersebut tidak mempunyai jumlah yang pasti (Purcell dkk., 2007).

Contoh 2.5.1 Misalkan $p = 2$ dan $i = \frac{1}{3}$. Buktikan bahwa deret berikut merupakan deret geometri yang konvergen.

Bukti:

$$2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots$$

Deret di atas merupakan deret geometri dengan:

$$p = 2, \quad i = \frac{1}{3}.$$

Karena $|i| = \frac{1}{3} < 1$, maka deret geometri tersebut konvergen.

Jumlah deret tak hingga diberikan oleh rumus

$$T = \frac{p}{1 - i}.$$

Substitusikan nilai $p = 2$ dan $i = \frac{1}{3}$

$$T = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3.$$

Jadi, deret tersebut konvergen dengan jumlah

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{j-1} = 3.$$

Definisi 2.5.2 Deret yang berbentuk

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$

dengan p konstan disebut deret p.

- Jika $p > 1$, maka deret j konvergen.
- Jika $p \leq 1$, maka deret p divergen.

(Purcell dkk., 2007).

Contoh 2.5.2 Misalkan $p = 2$. Buktikan bahwa deret berikut konvergen untuk $p > 1$.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

Bukti:

Deret tersebut merupakan deret p-series dengan $p = 2$.

Menurut sifat deret p-series:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p} \begin{cases} \text{konvergen}, & \text{jika } p > 1, \\ \text{divergen}, & \text{jika } p \leq 1. \end{cases}$$

Karena $p = 2 > 1$, maka deret ini konvergen.

Secara lebih lanjut, diketahui bahwa:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449.$$

Jadi, deret tersebut konvergen dengan jumlah mendekati 1.645.

2.6 Barisan l_2

Barisan l_2 memiliki peranan penting dalam pembahasan skripsi ini karena ruang l_2 merupakan ruang Hilbert, yaitu ruang vektor bernorm yang dilengkapi produk dalam (*inner product*) dan lengkap terhadap norma yang diinduksi oleh produk dalam tersebut. Sifat lengkapnya berarti bahwa setiap barisan Cauchy di dalamnya memiliki limit yang masih berada dalam ruang yang sama. Suatu barisan (s_j) disebut barisan Cauchy apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga untuk semua $i, j \geq N$ berlaku

$$\|s_j - s_k\| < \varepsilon$$

(Kreyszig, , 1989)

Dengan sifat-sifat ini, ruang l_2 menyediakan struktur yang stabil dan lengkap sehingga konsep limit, kekontinuan, dan turunan dapat didefinisikan serta dianalisis dengan baik dalam konteks fungsi bernilai barisan. Selain itu, sifat konvergensi pada barisan l_2 menjadi dasar penting dalam mengkaji fungsi bernilai barisan, karena setiap komponennya merupakan fungsi real yang memenuhi syarat kontinuitas dan keterdiferensialan.

Definisi 2.6.1 Barisan l_2 adalah himpunan semua barisan bilangan real atau kompleks dengan

$$s = (s_1, s_2, s_3, ...)$$

yang memenuhi syarat

$$\sum_{j=1}^{\infty} |s_j|^2 < \infty.$$

Artinya, suatu barisan (s_j) termasuk dalam l_2 apabila jumlah kuadrat dari nilai absolut setiap elemennya konvergen atau berhingga (Rudin, 1991). Ruang l_2 dilengkapi dengan norma

$$\|s\|_2 = \left(\sum_{s=1}^{\infty} |s_j|^2 \right)^{1/2}.$$

sehingga setiap elemen $s \in l_2$ memiliki panjang (norma) yang terdefinisi dengan baik (Shilov, 1985).

Contoh 2.6.1 Barisan $s = \left(\frac{1}{j}\right)$, yaitu

$$s = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right).$$

Akan diselidiki apakah deret yang bersesuaian dengan barisan tersebut konvergen atau tidak.

Penyelesaian:

Pembuktian konvergensi deret *p-series* dengan $p = 2$, yaitu

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}.$$

Untuk setiap $j \geq 2$ berlaku

$$\frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{j(j-1)}.$$

Deret

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j(j-1)}$$

merupakan deret tak hingga karena

$$\frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}.$$

Jumlah parsialnya adalah

$$T_N = \sum_{j=2}^{N} \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right) = 1 - \frac{1}{N}.$$

Karena $\lim_{N\to\infty} T_N = 1$, maka deret tak hingga tersebut konvergen. Oleh karena

$$\frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{j(j-1)} \quad \text{untuk } j \geq 2,$$

dan deret pembandingnya konvergen, maka berdasarkan uji perbandingan diperoleh bahwa deret

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$$

juga konvergen. Selanjutnya, dari hasil klasik dalam analisis matematika diketahui bahwa jumlah deret *p-series* untuk $p = 2$ bernilai

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2.7 Ruang Barisan

Definisi 2.7.1 Ruang barisan dasar l_2 adalah koleksi dari semua barisan bilangan real (s_k) yang memenuhi

$$\sum_{k=2}^{\infty} |s_k| < +\infty,$$

dapat dituliskan sebagai

$$l_2 = \left\{ (s_k)_{k\geq 2} \; ; \; \sum_{k=2}^{\infty} |s_k| < +\infty \right\}.$$

Ruang ini disebut ruang barisan dasar karena l_2 merupakan salah satu ruang barisan yang paling dasar dan paling sering digunakan dalam analisis, khususnya pada pembahasan ruang bernorm dan konsep-konsep seperti konvergensi barisan, norma, serta kelengkapan. Istilah "klasik" merujuk pada fakta bahwa ruang l_2 telah lama menjadi contoh standar dalam berbagai buku analisis fungsional dan matematika modern.

Diberikan norma pada l_2 sebagai berikut:

$$\|s\|_2 = \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} |s_k| \right\}.$$

(Alwi, 2014).

Contoh 2.7.1 Buktikan bahwa barisan $(s_k) = \left(\frac{1}{k}\right)_{k=2}^{\infty}$ merupakan elemen dari ruang l_2.

Bukti:

Barisan tersebut dapat dituliskan sebagai

$$s = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right).$$

Sesuai dengan definisi ruang l_2, suatu barisan $s = (s_k)$ merupakan elemen l_2 apabila memenuhi

$$\sum_{k=1}^{\infty} |s_k|^2 < \infty.$$

Pada barisan ini, setiap komponen bernilai real dan positif, sehingga

$$|s_k| = \left| \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{k}, \quad |s_k|^2 = \frac{1}{k^2}.$$

Oleh karena itu, jumlah kuadrat modulus setiap komponennya adalah

$$\sum_{k=2}^{\infty} |s_k|^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Deret tersebut merupakan deret p-series dengan $p = 2$ dan diketahui bersifat konvergen. Secara khusus,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

sehingga

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 < \infty.$$

Dengan demikian, jumlah kuadrat modulus setiap komponen barisan tersebut berhingga, sehingga barisan (s_k) merupakan elemen dari ruang l_2.

2.8 Ruang Vektor

Ruang vektor merupakan konsep dasar yang menjadi landasan dalam analisis fungsi bernilai barisan pada ruang l_2. Setiap elemen dalam ruang vektor berupa barisan atau objek yang dapat dijumlahkan dan dikalikan dengan skalar, serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu seperti komutatif, asosiatif, dan distributif (Anton & Rorres, 2004). Keterkaitannya dengan penelitian ini adalah bahwa ruang l_2 sebagai ruang vektor memungkinkan fungsi $f : \mathbb{R} \to l_2$ untuk didefinisikan secara aljabar dan analitik, sehingga operasi turunan dan sifat kontinuitas dapat diterapkan. Hal ini penting dalam pembuktian dan penerapan Teorema Rolle serta Teorema Nilai Rata-Rata pada fungsi bernilai barisan l_2 (Purcell dkk., 2007). Berikut akan dijelaskan definisi dari ruang vektor sebagai berikut :

Definisi 2.8.1 Misalkan V merupakan suatu himpunan tak kosong dari objek-objek sebarang, dimana dua operasinya didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Himpunan V disebut ruang vektor dan objek-objek pada V disebut vektor, jika memenuhi aksioma-aksioma berikut :

1 $u + v \in V$,

2 $u + v = v + u$ (sifat komutatif),

3 $u + (v + w) = (u + v) + w$ (sifat asosiatif),

4 Ada sebuah vektor $0 \in V$ sehingga $0 + u = u + 0 = u$ untuk semua $u \in V$,

5 Untuk setiap $u \in V$, terdapat suatu objek $-u \in V$ sehingga $u + (-u) = (-u) + u = 0$,

6 Jika k adalah skalar sebarang dan u adalah objek sebarang $\in V$, maka ku terdapat pada V,

7 $k(u+v) = ku + kv$ (sifat distributif),

8 $(k+l)u = ku + lu$,

9 $k(lu) = (kl)u$,

10 $1u = u$.

(Anton & Rorres, 2004).

Contoh 2.8.1 Diketahui:

$$V = \mathbb{R}^2 = \{(s,t) \mid s,t \in \mathbb{R}\}.$$

Buktikan bahwa V merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$.

Bukti: Pembuktian lengkap bahwa $V = \mathbb{R}^2$ adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$. Ingat operasi pada V:

$$(s_1,t_1) + (s_2,t_2) = (s_1+s_2,\ t_1+t_2), \qquad k(s,t) = (ks,kt) \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Kita periksa satu per satu aksioma ruang vektor.

1. Tertutup terhadap penjumlahan.
   Untuk setiap $(s_1,t_1),(s_2,t_2) \in \mathbb{R}^2$ kita punya

   $$(s_1,t_1) + (s_2,t_2) = (s_1+s_2,\ t_1+t_2).$$

   Karena penjumlahan bilangan real menutup di $\mathbb{R}$, maka $s_1+s_2 \in \mathbb{R}$ dan $t_1+t_2 \in \mathbb{R}$, sehingga $(s_1+s_2, t_1+t_2) \in \mathbb{R}^2$. Jadi tertutup.

2. Komutatif.
   Untuk setiap $(s_1,t_1),(s_2,t_2) \in \mathbb{R}^2$:

   $$(s_1,t_1)+(s_2,t_2) = (s_1+s_2,t_1+t_2) = (s_2+s_1,t_2+t_1) = (s_2,t_2)+(s_1,t_1),$$

   karena penjumlahan real bersifat komutatif: $s_1+s_2 = s_2+s_1$ dan $t_1+t_2 = t_2+t_1$.

3. Asosiatif.
   Ambil $u = (s_1,t_1),\ v = (s_2,t_2),\ w = (s_3,t_3)$. Maka

   $$(u+v)+w = (s_1+s_2,t_1+t_2)+(s_3,t_3) = ((s_1+s_2)+s_3,\ (t_1+t_2)+t_3),$$

dan

$$u + (v + w) = (s_1, t_1) + (s_2 + t_3, t_2 + t_3) = (s_1 + (s_2 + s_3),\ t_1 + (t_2 + t_3)).$$

Karena penjumlahan real asosiatif, $(s_1 + s_2) + s_3 = s_1 + (s_2 + s_3)$ dan $(t_1 + t_2) + t_3 = t_1 + (t_2 + t_3)$, sehingga $(u + v) + w = u + (v + w)$.

4. Elemen nol (identitas aditif).
   Perlihatkan ada elemen $0_V \in \mathbb{R}^2$ sehingga $v + 0_V = v$ untuk semua v. Ambil $0_V = (0, 0)$. Untuk setiap $(s, t) \in \mathbb{R}^2$,

$$(s, t) + (0, 0) = (s + 0, t + 0) = (s, t),$$

   karena $s + 0 = s$ dan $t + 0 = t$. Jadi $(0, 0)$ adalah elemen nol.

5. Invers aditif.
   Untuk setiap $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ pilih $-(s, t) = (-s, -t) \in \mathbb{R}^2$. Kemudian

$$(s, t) + (-s, -t) = (s + (-s), t + (-t)) = (0, 0),$$

   karena $s + (-s) = 0$ dan $t + (-t) = 0$. Jadi setiap vektor punya invers aditif.

6. Tertutup terhadap perkalian skalar.
   Untuk $k \in \mathbb{R}$ dan $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ definisi memberi

$$k(s, t) = (ks, kt).$$

   Karena hasil perkalian real tetap di $\mathbb{R}$, maka $(ks, kt) \in \mathbb{R}^2$. Jadi tertutup.

7. Distributif terhadap penjumlahan vektor (skalar terhadap jumlah vektor).
   Untuk $k \in \mathbb{R}$ dan $u = (s_1, t_1),\ v = (s_2, t_2)$:

$$k(u + v) = k(s_1 + s_2,\ t_1 + t_2) = (k(s_1 + s_2),\ k(t_1 + t_2)).$$

   Karena perkalian real distributif terhadap penjumlahan, $k(s_1 + s_2) = ks_1 + ks_2$ dan $k(t_1 + t_2) = kt_1 + kt_2$, sehingga

$$k(u + v) = (ks_1 + ks_2,\ kt_1 + kt_2) = (ks_1, kt_1) + (ks_2, kt_2) = ku + kv.$$

8. Distributif terhadap penjumlahan skalar (penjumlahan skalar terhadap vektor).

Untuk $k, l \in \mathbb{R}$ dan $u = (s, t)$:

$$(k + l)u = ((k + l)s,\ (k + l)t).$$

Dengan distributivitas di $\mathbb{R}$,

$$(k + l)s = ks + lx, \qquad (k + l)t = kt + lt,$$

maka

$$(k + l)u = (ks + ls,\ kt + lt) = (ks, kt) + (ls, lt) = ku + lu.$$

9. Asosiatif terhadap perkalian skalar.
   Untuk $k, l \in \mathbb{R}$ dan $u = (s, t)$:

   $$k(lu) = k(ls, lt) = (k(ls),\ k(lt)) = ((kl)s,\ (kl)t) = (kl)u,$$

   karena perkalian real asosiatif: $k(ls) = (kl)s$.

10. Identitas perkalian skalar.
    Untuk $u = (s, t)$, ambil skalar $1 \in \mathbb{R}$. Maka

    $$1 \cdot u = (1 \cdot s,\ 1 \cdot t) = (s, t) = u,$$

    karena $1 \cdot s = s$ dan $1 \cdot t = t$.

Karena kesepuluh aksioma yang diperlukan terpenuhi, kita menyimpulkan bahwa $\mathbb{R}^2$ adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$.

2.9 Ruang Bernorm

Ruang bernorma merupakan pengembangan dari ruang vektor yang dilengkapi dengan fungsi norma untuk mengukur panjang atau ukuran suatu vektor (Darmawijaya, 2007). Dalam konteks penelitian ini, ruang l_2 termasuk ruang bernorma yang lengkap, sehingga memungkinkan fungsi $f : \mathbb{R} \to l_2$ memiliki sifat kontinuitas dan turunan yang diperlukan dalam penerapan Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-Rata pada fungsi bernilai barisan (Bartle & Sherbert, 2000).

Definisi 2.9.1 Dalam konteks ruang vektor X, sebuah norma adalah fungsi $\|\cdot\|$: $S \to \mathbb{R}$ yang mempunyai sifat-sifat berikut untuk setiap $t, u \in S$ dan $p \in \mathbb{R}$:

1 $\|t\| \geq 0$ untuk setiap $t \in S$,

2 $\|t\| = 0$, jika dan hanya jika $t = 0$,

3 $\|pt\| = |p|\|t\|$ untuk setiap skalar p dan $t \in S$,

4 $\|t + u\| \leq \|t\| + \|u\|$ untuk setiap $t, u \in S$.

Pada suatu ruang S didefinisikan sebuah norm, di mana setiap vektor $t \in S$ dipasangkan dengan suatu bilangan real nonnegatif $\|t\|$ yang disebut sebagai norm dari vektor t. Suatu ruang linear S yang dilengkapi dengan norm $\|\cdot\|$ dinamakan ruang bernorma (*norm space*) dan selanjutnya dapat dituliskan secara singkat sebagai $(S, \|\cdot\|)$ atau cukup S, sepanjang norm yang digunakan telah jelas (Darmawijaya, 2007).

Contoh 2.9.1 Misalkan $s = \mathbb{R}^2$ dan untuk setiap $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ didefinisikan:

$$\|t\| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}.$$

Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma.

Bukti:

Akan diperiksa sifat-sifat norma sebagai berikut:

1. Nonnegatif:
$$\|t\| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \geq 0,$$
karena akar kuadrat dari bilangan non-negatif selalu tidak negatif.

2. Norma nol hanya untuk vektor nol:
$$\|t\| = 0 \Leftrightarrow t_1^2 + t_2^2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0 \text{ dan } t_2 = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

3. Homogenitas (sifat skalar): Untuk setiap skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku:
$$\|\alpha t\| = \sqrt{(\alpha t_1)^2 + (\alpha t_2)^2} = |\alpha|\sqrt{t_1^2 + t_2^2} = |\alpha|\|t\|.$$

4. Ketidaksamaan segitiga: Untuk setiap $t, u \in \mathbb{R}^2$ berlaku:

$$\|t + u\| \leq \|t\| + \|u\|.$$

Ketidaksamaan ini terbukti berdasarkan *Cauchy-Schwarz Inequality*.

Oleh karena keempat sifat norma terpenuhi, maka $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|)$ dengan norma Euclidean merupakan ruang bernorma.

Definisi 2.9.2 Suatu ruang bernorma disebut lengkap (*complete*) apabila setiap barisan Cauchy yang terdapat di dalam ruang tersebut bersifat konvergen (Bartle & Sherbert, 2000).

Contoh 2.9.2 Misalkan $S = \mathbb{R}^2$ dengan norma Euclidean:

$$\|(s_1, s_2)\| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}.$$

Akan ditunjukkan bahwa ruang ini lengkap.

Penyelesaian:

Diketahui barisan $\{s_j\}$ pada $\mathbb{R}^2$ yang didefinisikan oleh:

$$s_j = \left(1 + \frac{1}{j}, 2 - \frac{1}{j}\right).$$

Langkah 1: Periksa apakah (s_j) merupakan barisan Cauchy.

Untuk i, j cukup besar, hitung jarak antara dua suku:

$$\|s_j - s_i\| = \sqrt{\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{i}\right)^2 + \left(-\frac{1}{j} + \frac{1}{i}\right)^2} = \sqrt{2}\left|\frac{1}{j} - \frac{1}{i}\right|.$$

Ketika $j, i \to \infty$, maka $\left|\frac{1}{j} - \frac{1}{i}\right| \to 0$, sehingga

$$\|s_j - s_i\| \to 0.$$

Jadi, (s_j) adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}^2$.

Langkah 2: Periksa apakah (s_j) konvergen di $\mathbb{R}^2$.

Hitung limitnya:

$$\lim_{j\to\infty} s_j = (1, 2).$$

Karena limit $(1, 2)$ terdapat dalam $\mathbb{R}^2$, maka (s_j) konvergen di $\mathbb{R}^2$.

Kesimpulan: Setiap barisan Cauchy di $\mathbb{R}^2$ konvergen ke suatu elemen di $\mathbb{R}^2$. Oleh karena itu, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ dengan norma Euclidean adalah ruang bernorma lengkap.

2.10 Ruang Banach

Ruang Banach merupakan ruang bernorm yang lengkap, artinya setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen terhadap norm yang berlaku (Bartle & Sherbert, 2000). Dalam konteks penelitian ini, ruang l_2 termasuk ruang Banach, sehingga fungsi $f : \mathbb{R} \to l_2$ dapat dianalisis secara kontinu dan diferensiabel. Hal ini menjadi dasar utama dalam penerapan Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-Rata pada fungsi bernilai barisan. Pada bahasan ini akan didefinisikan ruang Banach sebagai berikut:

Teorema 2.10.1 Misalkan (s_j) adalah barisan pada S. Jika barisan (s_j) konvergen dalam norm, maka (s_j) adalah barisan Cauchy (Bartle & Sherbert, 2000).

Bukti: Andaikan barisan (s_j) konvergen dalam norm ke suatu elemen $s \in S$. Artinya,

$$\lim_{j\to\infty} \|s_j - s\| = 0.$$

Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\|s_j - s\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{untuk setiap } j \geq N.$$

Ambil sebarang $j, k \geq N$. Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, diperoleh

$$\|s_j - s_k\| \leq \|s_j - s\| + \|s_k - s\|.$$

Karena $j \geq N$ dan $k \geq N$, maka

$$\|s_j - s_k\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dengan demikian, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\|s_j - s_k\| < \varepsilon, \quad \text{untuk semua } j, k \geq N.$$

Ini menunjukkan bahwa barisan (s_j) adalah barisan Cauchy.

Definisi 2.10.1 Jika setiap barisan Cauchy pada S konvergen ke $s \in S$ dalam norm, maka S dikatakan lengkap dan disebut sebagai ruang Banach (Bartle & Sherbert, 2000).

Contoh 2.10.1 Diketahui $S = \mathbb{R}$ dengan norma biasa:

$$\|s\| = |s|.$$

Buktikan bahwa $\mathbb{R}$ adalah ruang Banach.

Bukti:

Misalkan barisan (s_j) didefinisikan oleh:

$$s_j = 1 + \frac{1}{j}.$$

Hitung jarak antara dua suku:

$$|s_j - s_i| = \left| \frac{1}{j} - \frac{1}{i} \right|.$$

Ketika $j, i \to \infty$, maka $|s_j - s_i| \to 0$, sehingga (s_j) adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Selanjutnya, hitung limitnya:

$$\lim_{j \to \infty} s_j = 1.$$

Karena limitnya $1 \in \mathbb{R}$, maka (s_j) konvergen di $\mathbb{R}$.

Kesimpulan: setiap barisan Cauchy dalam $\mathbb{R}$ konvergen ke suatu elemen di $\mathbb{R}$. Oleh karena itu, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ adalah ruang bernorma lengkap, yaitu ruang Banach.

2.11 Teorema Rolle

Teorema Rolle merupakan salah satu teorema fundamental dalam kalkulus diferensial. Teorema ini sering dipandang sebagai kasus khusus dari Teorema Nilai Rata-rata.

Definisi 2.11.1 Teorema Rolle menyatakan bahwa jika suatu fungsi $f(s)$ didefinisikan dalam interval tertutup $[p, q]$ dan memenuhi tiga syarat utama, yaitu:

1. Fungsi $f(s)$ harus kontinu dalam interval tertutup $[p, q]$
2. Fungsi $f(s)$harus dapat diturunkan pada interval terbuka (p, q).

3. Nilai fungsi pada batas interval harus sama, yaitu $f(p) = f(q)$.

Jika ketiga kondisi ini terpenuhi, maka dipastikan terdapat setidaknya satu nilai r di dalam interval terbuka (p, q) dimana turunan pertama fungsi tersebut bernilai nol $f'(r) = 0$.

(Chaudhary dkk., 2023).

Contoh 2.11.1 Misalkan kita memiliki fungsi kuadrat $f(s) = s^2 - 4s + 3$. Buktikan bahwa Teorema Rolle berlaku pada interval tertutup [1,3].

Bukti:

1. Kontinu pada [1,3], sebab setiap fungsi kuadarat akan berlaku.
2. Dapat diturunkan pada [1,3], yaitu $f'(s) = 2s - 4$
3. $f(p) = f(q)$ Hitung $f(1)$ dan $f(3)$

$$f(1) = (1)^2 - 4(1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$f(3) = (3)^2 - 4(3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$

Karena $f(1)$ dan $f(3)$ = 0, syarat terpenuhi

Setelah 3 syarat terpenuhi, maka selanjutnya mencari titik $f'(r) = 0$

$$f'(r) = 2x - 4.$$

Selesaikan turunan pertama dengan nilai $s = 0$

$$f'(s) = 0.$$

$$2s - 4 = 0$$

$$2s = 4$$

$$s = 2$$

Jadi, di dapatkan nilai $s = 2$ terletak di dalam interval terbuka (1,3). Maka Teorema Rolle terbukti berlaku pada interval tertutup (1,3).

2.12 Teorema Nilai Rata-Rata

Jika sebuah fungsi f adalah kontinu pada interval tertutup $[p, q]$ dan dapat diturunkan (diferensiabel) pada interval terbuka (p, q), maka terdapat sebuah r di dalam interval tersebut sehingga turunan dari f pada titik r,

$$f'(r) = \frac{f(q) - f(p)}{(q - p)}$$

(Wu, 2023).

Contoh 2.12.1 Diketahui fungsi

$$f(s) = s^2 + 2s + 3$$

pada interval $[1, 3]$. Tentukan nilai r yang memenuhi Teorema Nilai Rata-Rata (Mean Value Theorem).

Penyelesaian:

Fungsi $f(s) = s^2 + 2s + 3$ adalah fungsi polinomial, sehingga kontinu pada seluruh $\mathbb{R}$ dan dapat didiferensialkan pada seluruh $\mathbb{R}$. Maka, syarat Teorema Nilai Rata-Rata terpenuhi pada interval $[1, 3]$.

Langkah 1: Hitung laju perubahan rata-rata

$$\frac{f(q) - f(p)}{q - p} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

Hitung nilai-nilai fungsi:

$$f(3) = 3^2 + 2(3) + 3 = 9 + 6 + 3 = 18,$$

$$f(1) = 1^2 + 2(1) + 3 = 1 + 2 + 3 = 6.$$

Maka:

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{18 - 6}{2} = 6.$$

Langkah 2: Turunkan fungsi dan tentukan r

Turunan dari $f(s)$ adalah:

$$f'(s) = 2s + 2.$$

Sesuai Teorema Nilai Rata-Rata, terdapat $r \in (1,3)$ sehingga:

$$f'(r) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}.$$

Substitusikan:

$$2r + 2 = 6.$$

Selesaikan untuk r:

$$2r = 4 \quad \Rightarrow \quad r = 2.$$

Kesimpulan: Terdapat $r = 2$ di dalam interval $(1,3)$ sehingga

$$f'(r) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}.$$

Maka, Teorema Nilai Rata-Rata terbukti berlaku untuk fungsi $f(s)$ pada interval $[1,3]$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian dalam penelitian ini adalah :

1. Mempelajari konsep dasar fungsi bernilai barisan l_2.
2. Mempelajari konsep limit, kontinuitas, dan turunan pada fungsi bernilai barisan l_2.
3. Mengkaji literatur terkait Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-Rata.
4. Mengkontruksi Teorema Rolle untuk fungsi bernilai barisan l_2.
5. Mengkontruksi Teorema Nilai Rata-Rata untuk fungsi bernilai barisan l_2.
6. Menunjukkan contoh penerapan kedua teorema.
7. Menyusun Kesimpulan hasil penelitian.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab-bab sebelumnya, diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Untuk fungsi bernilai barisan $f : I \subset \mathbb{R} \to l_2$, konsep limit didefinisikan melalui norma l_2 dan memenuhi sifat-sifat limit yang analog dengan fungsi bernilai real.
2. Fungsi $f : I \to l_2$ dikatakan kontinu pada suatu interval apabila limit fungsi terhadap norma l_2 ada dan sama dengan nilai fungsi pada titik tersebut.
3. Turunan fungsi $f : I \to l_2$ dapat didefinisikan melalui limit diferensial terhadap norma l_2 dan memenuhi sifat-sifat dasar turunan.
4. Jika $f : [p, q] \to l_2$ kontinu pada $[p, q]$, terdiferensialkan pada (p, q), dan memenuhi $f(p) = f(q)$, maka terdapat $r \in (p, q)$ sehingga $f'(r) = 0$, sehingga Teorema Rolle berlaku untuk fungsi bernilai barisan di ruang l_2.
5. Jika $f : [p, q] \to l_2$ kontinu pada $[p, q]$ dan terdiferensialkan pada (p, q), maka terdapat $r \in (p, q)$ sehingga berlaku hubungan Teorema Nilai Rata-Rata pada fungsi bernilai barisan di ruang l_2.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, maka penulis memberikan beberapa saran sebagai berikut:

1. Penelitian selanjutnya disarankan untuk mengkaji perluasan teorema-teorema kalkulus lain, seperti Teorema Taylor atau Teorema Nilai Rata-Rata Cauchy, pada fungsi bernilai barisan di ruang l_2.

2. Teori lebih lanjut dapat dilakukan pada fungsi bernilai barisan di ruang Banach atau ruang Hilbert lain yang lebih umum sebagai pembanding dengan ruang l_2.

DAFTAR PUSTAKA

Alwi, M. (2014). *Ruang Barisan dan Transformasi Linier*. Yogyakarta: Deepublish.

Anton, H., & Rorres, C. (2004). *Elementary Linear Algebra*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to Real Analysis*. New York: John Wiley & Sons.

Chaudhary, S., Rafiquee, N. N., & Varshney, V. (2023). Rolle's Theorem and Its Applications. *International Journal of Mathematical Sciences*, 30(2), 256–306.

Conway, J. B. (1990). *A Course in Functional Analysis*. New York: Springer-Verlag.

Darmawijaya, A. (2007). *Analisis Real dan Kompleks*. Yogyakarta: Andi Offset.

Darwanto, dkk. (2020). *Pengantar Analisis Real*. Yogyakarta: Deepublish.

Kolmogorov, A. N., & Fomin, S. V. (1975). *Introductory Real Analysis*. New York: Dover Publications.

Kreyszig, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons.

Markonah Riwaty. (2008). *Matematika Dasar*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Mizrahi, A., & Sullivan, M. (1982). *Calculus: An Integrated Approach*. Belmont, CA: Wadsworth Publishing Company.

Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2007). *Calculus*. Pearson Education, Inc.

Rudin, W. (1991). *Functional Analysis*. New York: McGraw-Hill International Editions.

Shilov, G. E. (1985). *Elementary Functional Analysis*. New York: Dover Publications.

Soewito, S. (2015). *Kalkulus Peubah Tunggal*. Jakarta: Erlangga.

Vyborný, R. (1981). Mean Value Theorems and a Taylor Theorem for Vector-Valued Functions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 24(1), 1–10.

Widodo, B. (2017). *Analisis Real dan Topologi*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Wu, S. (2023). Mean Value Theorem for Vector-Valued Functions. *Mathematics Reports*, 15(3), 210–226.