

**PEMODELAN MATEMATIKA PADA KONVERSI LAJU AIR (DEBIT)
DENGAN METODE BEDA HINGGA BERBASIS
PYTHON**

Skripsi

Oleh

**PANO GUAN SILAEN
NPM. 2217031044**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

ABSTRACT

MATHEMATICAL MODELING OF WATER RATE (DISCHARGE) CONVERSION USING THE FINITE DIFFERENCE METHOD BASED ON PYTHON

By

Panoguan Silaen

This study discusses water flow modeling using a finite difference scheme implemented in the Python programming language. This study was conducted using water discharge data from four river points at the Batutegi dam. The analysis process began with manual numerical calculations using a finite difference approach, then the results were verified using Python-based computations. The results showed a high degree of agreement between the manual calculations and the computational results, indicating that the method used was capable of producing reliable estimates. Furthermore, the application of Python programming offers advantages in terms of data processing efficiency and the ability to handle large amounts of data. This research is expected to serve as a reference in the development and planning of water discharge utilization as a sustainable renewable energy source through an accurate mathematical and computational approach.

Keywords: finite difference method, water discharge, Python programming, solar energy, numerical methods.

ABSTRAK

PEMODELAN MATEMATIKA PADA KONVERSI LAJU AIR (DEBIT) DENGAN METODE BEDA HINGGA BERBASIS PYTHON

Oleh

Panoguan Silaen

Penelitian ini membahas pemodelan laju air menggunakan skema beda hingga yang diimplementasikan melalui bahasa pemrograman Python. Kajian ini dilakukan dengan memanfaatkan data debit air dari empat titik sungai pada bendungan batutegi. Proses analisis diawali dengan perhitungan numerik secara manual menggunakan pendekatan beda hingga, kemudian hasilnya diverifikasi melalui komputasi berbasis Python. Hasil penelitian menunjukkan adanya tingkat kesesuaian yang tinggi antara perhitungan manual dan hasil komputasi, yang mengindikasikan bahwa metode yang digunakan mampu menghasilkan estimasi yang andal. Selain itu, penerapan pemrograman Python memberikan keuntungan dalam hal efisiensi pengolahan data serta kemampuan untuk menangani data dalam jumlah besar. Penelitian ini diharapkan dapat menjadi referensi dalam pengembangan dan perencanaan pemanfaatan debit air sebagai sumber energi terbarukan yang berkelanjutan melalui pendekatan matematis dan komputasional yang akurat.

Kata-kata kunci: metode beda hingga, debit air, pemrograman Python, metode numerik.

**PEMODELAN MATEMATIKA PADA KONVERSI LAJU AIR (DEBIT)
DENGAN METODE BEDA HINGGA BERBASIS
PYTHON**

PANO GUAN SILAEN

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

Judul Skripsi : **PEMODELAN MATEMATIKA PADA KONVERSI LAJU AIR (DEBIT) DENGAN METODE BEDA HINGGA BERBASIS PYTHON**

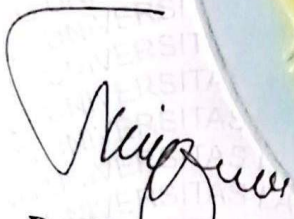
Nama Mahasiswa : **Panoguan Silaen**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031044**

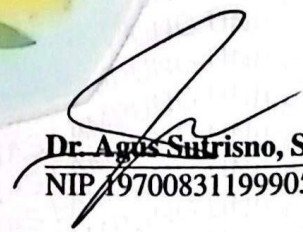
Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



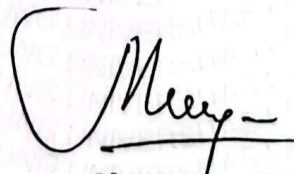


Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP 196207041988031002



Dr. Agus Sulrisno, S.Si., M.Si.
NIP 197008311999051002

2. Ketua Jurusan Matematika

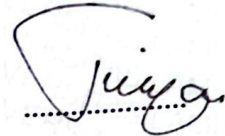


Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

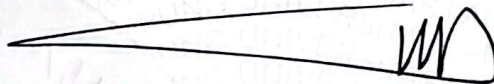
Ketua : Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.



Sekretaris : Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.



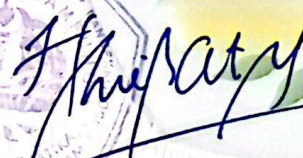
**Penguji
Bukan Pembimbing : Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**



2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002



Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 03 Maret 2026

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **PANO GUAN SILAEN**
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031044**
Jurusan : **Matematika**
Judul Skripsi : **PEMODELAN MATEMATIKA PADA
KONVERSI LAJU AIR (DEBIT) DENGAN
METODE BEDA HINGGA BERBASIS
PYTHON**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung,

Penulis,



Panoguan Silaen

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Panoguan Silaen yang lahir di batu hallung pada tanggal 31 mei 2003. Penulis merupakan anak ke empat dari enam bersaudara, seorang anak dari pasangan Baris Silaen dan Tiarmin Siagian. yang tinggal dan bekerja sebagai Petani di desa tornaganjang.

Penulis memulai pendidikan di SD Negeri 176376 Lumban Lintong pada tahun 2010 sampai dengan 2016. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SMP N 3 satu atap Lumban Lintong pada tahun 2016 sampai dengan tahun 2019, dan menyelesaikan pendidikan di SMA Negeri 1 Habinsaran pada tahun 2022.

Pada tahun 2022, penulis diterima di program studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN). Pada akhir tahun 2024 sampai dengan awal tahun 2025, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari pada Bulan januari tahun 2025 di Desa Baturaja, Lampung Utara. penulis juga Kerja Praktik (KP) di Badan Pengelola Keuangan dan Aset Daerah Kota Bandar Lampung (BPKAD) selama 40 hari sampai dengan 1 Agustus 2025.

Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif dalam organisasi kampus diantaranya tahun 2023 anggota pengurus Himatika FMIPA Unila , dan tahun 2025 Ketua umum unit kegiatan mahasiswa kristen Unila. Selama masa studi, penulis menunjukkan semangat dan komitmen dalam menyelesaikan berbagai tugas akademik dan organisasi. Penulis berharap hasil dari penelitian ini dapat memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya di bidang Analisis Numerik.

KATA INSPIRASI

"Do what you can, with what you have, where you are."

— **Theodore Roosevelt**

Firmanmu itu pelita bagi kakiku dan terang bagi jalaku.

Mazmur 119:105

Takut akan Tuhan adalah permulaan pengetahuan, tetapi orang bodoh menghina hikmat dan didikan .

Amsal 1:7

PERSEMBAHAN

Puji Tuhan

Dengan mengucapkan puji dan syukur atas kehadiran Tuhan yang maha esa karena limpahan kasih dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya.

Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Bapak dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi dan doa serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan yang maha esa atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Pemodelan matematika pada konversi laju air (debit) dengan metode beda hingga berbasis Python" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Ibu Dra. Dorrah Azis, M.Si. selaku dosen Pembimbing Akademik.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Seluruh guru SD, SMP, dan SMA yang telah mengajarkan dan memberikan ilmu hingga penulis bisa menduduki bangku perkuliahan.
8. Bapak Baris silaen, yang selalu memberikan dukungan dan doa sehingga penulis dapat segera menyelesaikan skripsi ini.
9. Abang Erijon silaen S.Pd, Efrancis silaen, kakak Masda silaen serta adek Asni silaen dan Rita silaen yang selalu memberikan dukungan dan doa sehingga penulis dapat segera menyelesaikan skripsi ini.
10. Ibu tercinta, yang telah dipanggil pulang ke rumah Bapa di Surga. Terima kasih atas kasih, doa, dan pengorbanan yang tak tergantikan. Meskipun ibu telah tiada, kasihmu tetap hidup dan menjadi kekuatan bagi penulis. Penulis percaya ibu kini beristirahat dalam damai bersama Tuhan Yesus Kristus.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung

Panoguan Silaen

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR TABEL	xv
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Tujuan Penelitian	3
1.3 Manfaat Penelitian	3
II TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Pemodelan Matematika	4
2.2 Fungsi	6
2.3 Beda Hingga	7
2.4 Metode Titik Tengah	13
2.5 Persamaan Diferensial	13
2.6 Persamaan Differensial Biasa	14
2.7 Persamaan Diferensial Parsial	16
2.8 Metode Beda Hingga pada Persamaan Diffrensial	17
2.9 Pembangkit Listrik Tenaga Air (PLTA)	22
2.10 Fluida Dinamis	23
2.11 Pemrograman Python	23
III METODE PENELITIAN	24
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	24
3.2 Data Penelitian	24
3.3 Metode Penelitian	24
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	26
4.1 Data Penelitian	26
4.2 Hasil Perhitungan Manual	28
4.3 Hasil Perhitungan Menggunakan Pemrograman Python	32
V KESIMPULAN DAN SARAN	38
5.1 Kesimpulan	38

5.2	Saran	39
	DAFTAR PUSTAKA	40

DAFTAR GAMBAR

2.1	Pemetaan Fungsi	6
2.2	Deskripsi selang ruang dan waktu	8
2.3	Metode beda hingga pada geometri	8
2.4	Ilustrasi laju T_c	8
2.5	Koordinat T_c	9
2.6	Garis persamaan simultan	10
2.7	Grafik aproksimasi metode beda hingga	10
2.8	Garis Horizontal	11
2.9	Garis Vertikal	12
2.10	Garis Horizontal dan Vertikal	12
2.11	Grafik Beda Maju	18
2.12	Grafik Beda Mundur	19
2.13	Grafik Beda Tengah	19
2.14	Metode beda hingga skema maju	20
2.15	Metode beda hingga skema mundur	21
2.16	Metode beda hingga skema tengah	21
2.17	Pusat pembangkit listrik tenaga air	22
4.1	Titik pengambilan data	26
4.2	Grafik pendekatan beda hingga	27
4.3	<i>Grid</i> perhitungan beda hingga	28

DAFTAR TABEL

2.1	Rumus dan nilai laju T_c	9
2.2	Formula metode beda hingga	10
4.1	Data Debit Air pada empat titik Sungai pada Bendungan	27
4.2	Hasil perhitungan manual dan Python	36

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Pemodelan adalah suatu proses penyederhanaan dari sistem nyata ke dalam bentuk representasi matematis atau simbolik yang bertujuan untuk memahami, menganalisis, dan memprediksi perilaku suatu fenomena. Dalam ilmu teknik dan sains, pemodelan berfungsi sebagai jembatan antara teori dan kenyataan, di mana sistem yang kompleks di dunia nyata diterjemahkan menjadi bentuk persamaan yang dapat dianalisis dan disimulasikan. Dengan kata lain, pemodelan membantu manusia untuk melihat bagaimana suatu sistem bekerja tanpa harus melakukan percobaan langsung di lapangan yang seringkali membutuhkan biaya cukup besar dan waktu yang lama.

Dalam konteks sumber daya air, salah satu aspek penting yang sering dimodelkan adalah laju aliran air atau debit (Q). Debit menggambarkan jumlah air yang mengalir suatu penampang saluran per satuan waktu, dan nilainya dapat berubah akibat pengaruh hujan, topografi, kondisi tanah, serta perubahan tata guna lahan. Untuk memahami perubahan debit ini secara kuantitatif, dibutuhkan model matematika yang dapat menggambarkan hubungan antara debit, waktu, dan ruang secara teratur.

Pemodelan debit dimulai dari upaya manusia untuk menyederhanakan fenomena aliran air ke dalam bentuk persamaan. Salah satu bentuk dasar yang sering digunakan adalah persamaan kontinuitas, yang menyatakan bahwa jumlah air yang masuk ke dalam suatu sistem harus sama dengan jumlah air yang keluar ditambah perubahan volume di dalam sistem tersebut. Namun, karena bentuk persamaan ini berupa turunan parsial yang sulit diselesaikan secara analitik, maka digunakanlah metode numerik, salah satunya adalah metode beda hingga (finite difference method). Pendekatan ini pertama kali dikembangkan oleh Leonhard Euler (1707-1783).

Ilmu matematika ialah salah satu cabang ilmu yang bisa dipakai buat menyelesaikan berbagai masalah. Kata “matematika” sendiri asalnya dari bahasa Yunani, *máthema* (*μάθημα*), yang artinya kajian tentang besaran, struktur, ruang, dan perubahan. Pola-pola dalam matematika dipelajari untuk membangun kebenaran lewat deduksi yang ketat, berdasarkan aksioma dan definisi yang saling berhubungan. Selain itu, matematika juga menjadi alat penting yang dipakai di banyak bidang ilmu di seluruh dunia.

Matematika terapan merupakan bidang dalam matematika yang menitikberatkan pada penerapan konsep dan prinsip matematika dalam berbagai disiplin ilmu, sekaligus mendorong pemanfaatan serta pengembangan temuan-temuan matematika yang berpotensi melahirkan cabang ilmu baru. Salah satu kajian penting dalam matematika terapan adalah persamaan diferensial, yang mencakup persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial didefinisikan sebagai persamaan yang memuat variabel bebas, variabel terikat, serta turunan dari variabel tersebut.

Teknologi conventional hydroelectric merupakan sistem pembangkit listrik yang memanfaatkan energi kinetik aliran air sebagai penggerak turbin. Energi mekanik yang dihasilkan dari putaran turbin tersebut kemudian diubah menjadi energi listrik melalui generator dalam suatu sistem bendungan, seperti yang diterapkan pada Pembangkit Listrik Tenaga Air (PLTA). PLTA dikenal sebagai salah satu sumber energi terbarukan yang bersifat kompetitif karena biaya pembangkitannya relatif ekonomis. Komponen utama dari sistem ini terdiri atas turbin air yang digerakkan oleh aliran air serta generator yang terhubung secara langsung.

Damastuti (1997) mengkaji sistem pembangkit listrik tenaga mikrohidro dengan fokus pada pengaruh debit aliran air dan perbedaan elevasi. Selanjutnya, Hasan (2016) meneliti penggunaan metode beda hingga dalam pemodelan matematika aliran banjir yang didasarkan pada persamaan Saint Venant. Penelitian lain dilakukan oleh Ruby (2023) yang memodelkan laju perpindahan panas pada wajan pembuatan arang aktif-13 menggunakan metode beda hingga untuk mengidentifikasi pola distribusi panas pada media tersebut. Selain itu, Subandono (2013) membahas penerapan metode beda hingga dengan skema eksplisit pada persamaan konduksi panas. Ilmah dkk. (2021) kemudian melakukan pemodelan matematis terhadap sifat fisis aliran fluida di dalam saluran pipa dengan menggunakan metode beda hingga dua dimensi. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa variasi luas penampang saluran memengaruhi pola garis alir dan kecepatan fluida. Pada penampang yang lebih sempit, garis-garis alir cenderung lebih rapat sehingga menghasilkan kecepatan

aliran yang lebih besar, sedangkan pada penampang yang lebih lebar jarak antar garis alir semakin renggang yang menandakan kecepatan aliran yang lebih kecil.

Berdasarkan uraian latar belakang tersebut, penulis terdorong untuk mengkaji laju aliran air pada pembangkit listrik tenaga mikrohidro dengan menerapkan metode beda hingga. Sejalan dengan tujuan tersebut, penelitian ini diberi judul “Pemodelan Matematika pada Konversi Laju Air (Debit) dengan Metode Beda Hingga berbasis python.”

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Memodelkan suatu persamaan aliran air menggunakan metode beda hingga.
2. Menghitung laju air menggunakan metode beda hingga.
3. Membandingkan hasil nilai laju air antara perhitungan manual dengan *Software Python*.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Memperluas wawasan tentang pemahaman metode beda hingga terkait laju air.
2. Sebagai bahan referensi dan acuan bagi peneliti selanjutnya yang ingin mengkaji perhitungan matematika dalam pemodelan laju aliran air.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika adalah proses membangun representasi matematis dari suatu fenomena dengan berlandaskan pada asumsi-asumsi tertentu. Proses ini merupakan tahapan awal yang esensial dalam pemanfaatan matematika untuk menganalisis berbagai fenomena, baik yang berkaitan dengan ilmu alam, ekonomi, sosial, maupun bidang lainnya. Secara garis besar, penggunaan matematika dalam menganalisis suatu fenomena dilakukan melalui tiga tahapan utama, yaitu:

1. Pemodelan matematika terhadap suatu fenomena serta perumusan masalah. Tahap ini bertujuan untuk mengubah data serta informasi yang diperoleh dari suatu fenomena nyata ke dalam bentuk model matematika. Data dan informasi mengenai fenomena tersebut dapat diperoleh melalui eksperimen di laboratorium, pengamatan di lingkungan industri, maupun dari kejadian dalam kehidupan sehari-hari. Melalui model matematika, suatu fenomena dapat dikaji secara lebih terukur atau kuantitatif dalam bentuk persamaan, pertidaksamaan, sistem persamaan, maupun ekspresi matematika. Namun, karena model disusun berdasarkan asumsi-asumsi tertentu, model matematika juga memiliki keterbatasan dibandingkan dengan fenomena sebenarnya, khususnya dalam hal generalisasi dan interpretasi hasil.
2. Pencarian solusi/kesimpulan matematika. Setelah model matematika berhasil dibentuk, langkah selanjutnya adalah menentukan solusi dari model tersebut dengan menerapkan metode-metode matematika yang tepat. Dalam beberapa kasus, metode matematika yang sesuai belum tersedia untuk menyelesaikan permasalahan yang ada, sehingga kondisi ini kerap menjadi pendorong bagi para ahli matematika terapan untuk mengembangkan metode matematika

baru. Hasil solusi matematika umumnya dinyatakan dalam bentuk fungsi matematika, nilai numerik, maupun grafik.

3. Interpretasi solusi atau kesimpulan matematika terhadap fenomena yang dikaji. Dalam matematika terapan, solusi baik berupa fungsi, angka, atau grafik tidak bermakna kalau tidak bisa menjelaskan masalah awal. Untuk itu, tahap interpretasi solusi ini penting untuk dipahami arti dan dampak hasil yang didapat terhadap fenomena yang jadi dasar masalahnya (Cahyono, 2013).

Model merupakan bentuk penyederhanaan dari realitas yang kompleks, yang dirancang untuk mempermudah pemahaman terhadap realitas tersebut, serta tetap mempertahankan karakteristik utama dari objek aslinya dalam menjalankan fungsi atau menyelesaikan permasalahan tertentu. Selain itu, model dapat dipahami sebagai representasi umum yang mewakili sekumpulan bentuk yang ada, atau sebagai gambaran suatu permasalahan dalam bentuk yang lebih sederhana sehingga dapat dianalisis dan diselesaikan dengan lebih mudah. Dalam matematika, teori model merupakan cabang kajian yang membahas konsep-konsep matematika melalui pendekatan teori himpunan atau dengan menelaah berbagai model yang merepresentasikan suatu sistem matematika. Kajian ini diawali dengan asumsi keberadaan objek-objek matematika, seperti bilangan, kemudian dilanjutkan dengan analisis terhadap operasi, relasi, serta aksioma yang berlaku pada setiap objek maupun pada sistem secara keseluruhan. Salah satu kontribusi penting dari teori model adalah pembuktian bahwa axiom of choice dan continuum hypothesis bersifat independen terhadap aksioma teori himpunan, yang ditunjukkan melalui hasil kerja Kurt Gödel dan Paul Cohen.

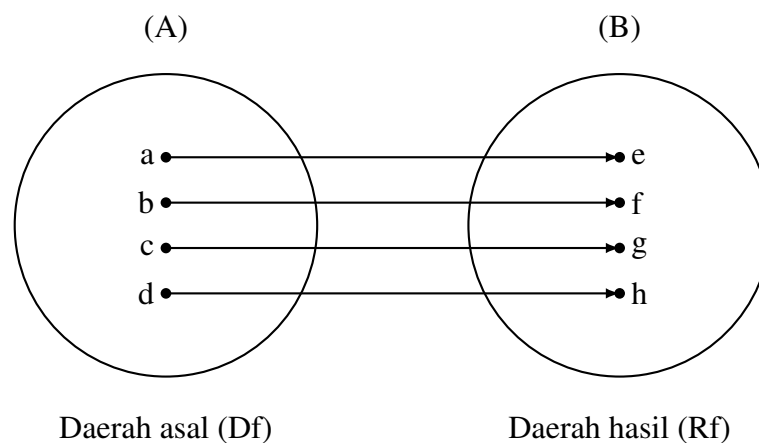
Telah ditunjukkan bahwa axiom of choice maupun negasinya sama-sama konsisten dengan aksioma Zermelo–Fraenkel dalam teori himpunan, dan kondisi serupa juga berlaku pada continuum hypothesis. Setelah suatu permasalahan dirumuskan ke dalam bentuk model matematika, model tersebut kemudian diselesaikan dengan mengikuti kaidah dan aturan yang berlaku. Hasil penyelesaian yang diperoleh selanjutnya harus melalui tahap pengujian guna memastikan keabsahan solusinya. Solusi yang terbukti valid akan memberikan jawaban yang sesuai terhadap model matematika dan disebut sebagai solusi matematis. Sebaliknya, apabila solusi yang dihasilkan tidak memenuhi kriteria validitas atau tidak sejalan dengan model yang dirumuskan, maka permasalahan tersebut dianggap belum terselesaikan, sehingga model matematika perlu dikaji dan disusun kembali (Bell, 1978).

Pemodelan matematika merupakan proses menggambarkan berbagai perilaku di dunia nyata, khususnya fenomena alam, ke dalam bentuk matematika yang dikenal sebagai mathematical world. Selain itu, pemodelan matematika dapat diartikan sebagai representasi suatu objek, proses, atau fenomena tertentu agar pola yang terbentuk dapat dikenali dan dianalisis lebih lanjut (*Dym and Ivey, 1980*).

2.2 Fungsi

Fungsi merupakan suatu bentuk relasi yang menghubungkan satu variabel dengan satu atau lebih variabel lainnya. Cara penulisan fungsi ditentukan oleh jumlah variabel yang terlibat di dalamnya. Jika fungsi hanya melibatkan dua variabel, yaitu satu variabel bebas dan satu variabel terikat, maka dituliskan dalam bentuk $y = f(x)$. Apabila fungsi melibatkan tiga variabel, yakni dua variabel bebas dan satu variabel terikat, penulisannya menjadi $y = f(x_1, x_2)$. Sementara itu, untuk fungsi yang melibatkan lebih dari dua variabel bebas, penulisannya dinyatakan sebagai $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dalam kajian fungsi terdapat tiga komponen utama yang perlu diperhatikan, yaitu variabel, bilangan konstan, dan koefisien (*Sukirman, 2004*).

Suatu fungsi dari himpunan x ke himpunan y didefinisikan sebagai suatu aturan yang memasangkan setiap elemen pada himpunan x dengan tepat satu elemen pada himpunan y . Hubungan tersebut dinyatakan dalam bentuk $y = f(x)$, di mana y berperan sebagai variabel terikat, sedangkan x merupakan variabel bebas.



Gambar 2.1 Pemetaan Fungsi

2.3 Beda Hingga

Metode beda hingga merupakan pendekatan numerik yang umum dimanfaatkan dalam penyelesaian berbagai permasalahan matematika dan teknik yang berkaitan dengan gejala fisika (Hasan, 2016). Metode ini cenderung efektif diterapkan pada kasus-kasus dengan bentuk geometri yang sederhana dan teratur. Contohnya, pada permasalahan satu dimensi digunakan domain berupa interval, pada dua dimensi berbentuk bidang persegi, sedangkan pada tiga dimensi berbentuk ruang kubus (Li, 2010).

Metode beda hingga bekerja dengan cara mengaproksimasi turunan dalam persamaan diferensial menjadi bentuk diskrit yang diturunkan dari pengembangan deret Taylor. Secara fisis, pendekatan ini memanfaatkan nilai suatu besaran pada titik-titik di sekitar lokasi dan waktu yang ditinjau, dengan asumsi bahwa jarak antar titik tersebut sangat kecil sehingga perubahan nilai dapat direpresentasikan secara mendekati.

Andaikan f dan turunannya f', f'', f''', \dots di dalam selang $[a, b]$. Misalkan $x_0 \in [a, b]$, maka nilai x di sekitar x_0 dan $x \in [a, b]$, $f(x)$ dapat dinyatakan dalam bentuk pengembangan deret Taylor;

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \dots \quad (2.3.1)$$

Jika $x - x_0 = h$, maka persamaan tersebut dapat ditulis menjadi:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \dots \quad (2.3.2)$$

Menurut Sinopa dkk. (2020), jika diberikan suhu $u(x, t)$ dengan variabel ruang x dan waktu t , maka ruang tersebut dibagi menjadi bagian-bagian berhingga (disebut *grid* atau *mesh*). Dalam metode beda hingga, proses ini dinamakan diskritisasi. Misalkan ruang x pada interval $0 \leq x \leq \pi$ dibagi menjadi sejumlah titik dengan jarak sama Δx . Nilai titiknya adalah;

$$x_0 = 0, x_1 = \Delta x, x_2 = 2\Delta x, \dots, x_m = \pi$$

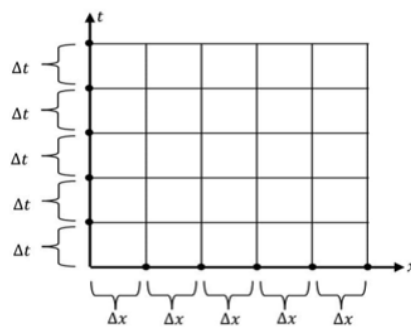
Secara umum, dapat ditulis:

$$x_j = j\Delta x, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M$$

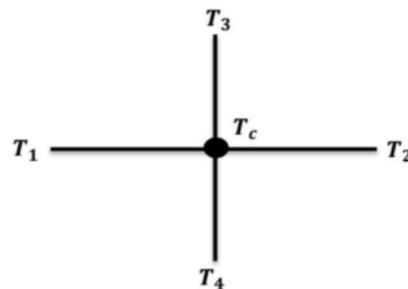
Jika N adalah jumlah total selang waktu Δt pada langkah waktu yang membagi $0 \leq t \leq T$, diperoleh:

$$\Delta t = \frac{T}{N}$$

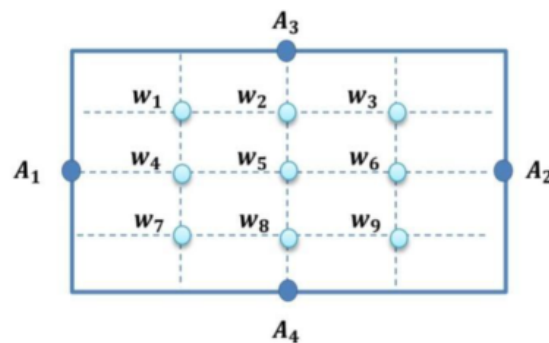
Diskritisasi suhu $u(x, t)$ sepanjang interval ruang x dan waktu t dapat ditunjukkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Deskritisasi selang ruang dan waktu



Gambar 2.3 Metode beda hingga pada geometri



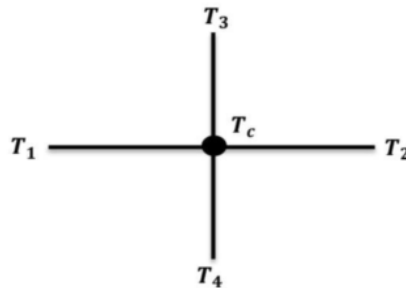
Gambar 2.4 Ilustrasi laju T_c

Titik tengah garis yang dinyatakan dengan m dan didapatkan persamaan yakni:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{2h}$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

dengan m adalah gradien.



Gambar 2.5 Koordinat T_c

Berdasarkan Gambar 2.5, diambil garis horizontal yang terdiri dari sisi kanan dan sisi kiri, serta garis vertikal yang terdiri dari sisi atas dan sisi bawah. Proses tersebut menghasilkan garis koordinat T_c sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 2.5.

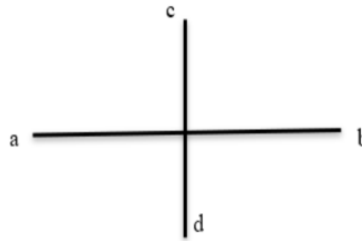
Tabel 2.1 Rumus dan nilai laju T_c

	Nilai	Laju
Horizontal	$t_c = \frac{T_1 - T_2}{2}$	$\partial t_c = \frac{T_1 - T_2}{2}$
Vertikal	$t_c = \frac{T_3 - T_4}{2}$	$\partial t_c = \frac{T_3 - T_4}{2}$

Persamaan simultan untuk menentukan nilai T_c adalah

$$T_c = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{4}.$$

Setelah nilai T_c diperoleh, selanjutnya dibentuk garis persamaan simultan sebagai berikut:



Gambar 2.6 Garis persamaan simultan

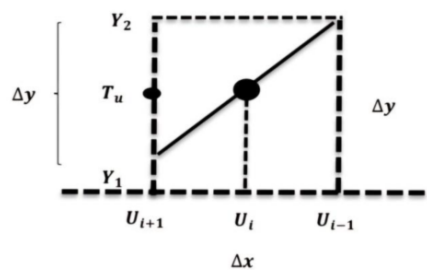
Berdasarkan Gambar 2.6, diperoleh persamaan simultan sebagai berikut:

$$T_{c1} = \frac{a + b + c + d}{4}$$

$$4T_{c1} = a + b + c + d$$

$$a + b + c + d - 4T_{c1} = 0$$

Gambar 2.7 menunjukkan grafik aproksimasi metode beda hingga yang terdiri atas tiga jenis turunan parsial, yaitu beda maju, beda mundur, dan beda pusat.



Gambar 2.7 Grafik aproksimasi metode beda hingga

Menurut Maulidi (2018), terdapat beberapa formula metode beda hingga yang akan ditunjukkan pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Formula metode beda hingga

Turunan Parsial	Aproksimasi Beda Hingga	Tipe
$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x$	$\frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x}$	Beda Maju
$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x$	$\frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x}$	Beda Mundur
$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x$	$\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x}$	Beda Pusat

Membentuk suatu sistem persamaan linear simultan dengan sembilan variabel yaitu sebagai berikut

$$T_1 : B + T + S + U - 4T_1 = 0$$

$$T_2 : T_1 + T + S + U - 4T_2 = 0$$

$$T_3 : B + T_1 + S + U - 4T_3 = 0$$

$$T_4 : B + T + T_1 + U - 4T_4 = 0$$

$$T_5 : B + T + S + T_1 - 4T_5 = 0$$

$$T_6 : T_4 + T + T_2 + U - 4T_6 = 0$$

$$T_7 : T_5 + T + S + T_2 - 4T_7 = 0$$

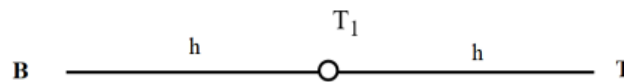
$$T_8 : B + T_5 + S + T_3 - 4T_8 = 0$$

$$T_9 : B + T_4 + T_3 + U - 4T_9 = 0$$

Metode beda hingga dapat digambarkan ke dalam grafik yang lebih sederhana:

1. Horizontal

$$T > B$$



Gambar 2.8 Garis Horizontal

- Nilai T_1

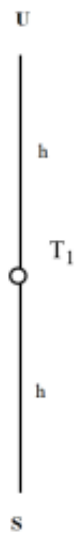
$$T_1 = \frac{T + B}{2h}$$

- Laju perubahan T_1

$$\delta T_1 = \frac{T - B}{2h}$$

2. Vertikal

$$U > S$$



Gambar 2.9 Garis Vertikal

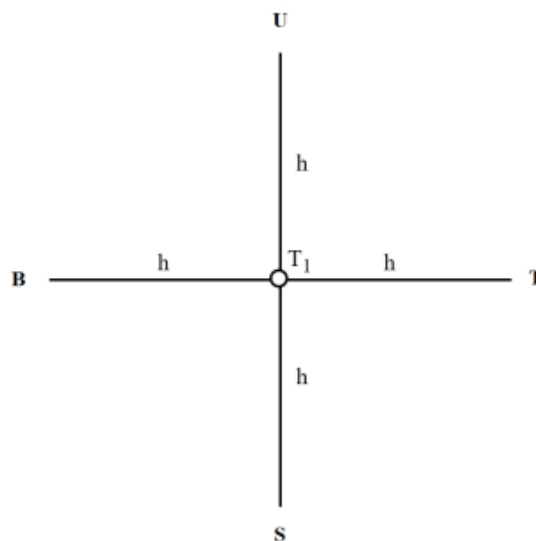
- Nilai T_1

$$T_1 = \frac{U + S}{2h}$$

- Laju perubahan T_1

$$\delta T_1 = \frac{U - S}{2h}$$

3. Horizontal dan Vertikal



Gambar 2.10 Garis Horizontal dan Vertikal

- Nilai T_1

$$T_1 = \frac{T_{1h} + T_{1v}}{2} = \frac{\frac{B+T}{2h} + \frac{S+U}{2h}}{2} = \frac{B + T + S + U}{4}$$

- Laju perubahan T_1

$$\delta T_1 = \frac{\delta T_{1h} + \delta T_{1v}}{2} = \frac{\frac{B-T}{2h} + \frac{U-S}{2h}}{2} = \frac{(B - T) + (U - S)}{4}$$

2.4 Metode Titik Tengah

Metode titik tengah (*Midpoint Method*) merupakan metode numerik dalam kategori Runge–Kutta orde dua yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa. Metode ini meningkatkan akurasi dibandingkan metode Euler dengan memanfaatkan kemiringan pada titik tengah interval untuk memperkirakan nilai solusi berikutnya. Prosedur metode ini meliputi perhitungan kemiringan awal, estimasi titik tengah, perhitungan kemiringan pada titik tengah, serta pembaruan nilai solusi menggunakan kemiringan tersebut.

Metode titik tengah (*Midpoint Method*) tidak secara langsung digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial (PDP), karena metode ini pada dasarnya dirancang untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa (PDB) yang hanya melibatkan turunan terhadap satu variabel independen. Namun demikian, dalam beberapa kasus metode ini dapat digunakan sebagai bagian dari suatu skema numerik untuk menyelesaikan PDP, misalnya melalui pendekatan metode garis (*method of lines*). Pada pendekatan ini, PDP didiskretisasi terhadap salah satu variabel (misalnya variabel ruang), sehingga diperoleh suatu sistem PDB. Sistem tersebut kemudian dapat diselesaikan menggunakan metode titik tengah atau metode Runge–Kutta lainnya sebagai integrator waktu. Untuk kasus PDP yang lebih kompleks, metode beda hingga sering digunakan sebagai teknik diskretisasi ruang sebelum diterapkan metode integrasi waktu yang sesuai.

2.5 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang melibatkan suatu fungsi tak diketahui beserta satu atau lebih turunannya. Misalnya, fungsi $w = w(t)$ dapat

dikaitkan dengan turunannya melalui berbagai bentuk notasi, seperti w' , $\frac{dw}{dt}$, dan \dot{w} . Notasi titik (\dot{w}) umumnya digunakan dalam bidang fisika dan teknik, sedangkan notasi $\frac{dw}{dt}$ lebih sering digunakan dalam analisis matematika. Persamaan diferensial dapat melibatkan turunan hingga orde ke- n , yang dinyatakan dalam bentuk $w^{(n)}$.

Berikut diberikan contohnya :

1. $\theta'' + \sqrt{\frac{g}{l}} \sin \theta = 0$
2. $Lq'' + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \sin(\omega t)$
3. $P' = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right)$ (Logan, 2006)]

2.6 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan yang melibatkan turunan biasa dari satu atau beberapa *variabel* terikat terhadap satu *variabel* bebas, misalnya $w = w(t)$ (Ross, 1984).

Berikut diberikan contohnya :

1. $\frac{dy}{dx} = x + 10$
2. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 5$
3. $\frac{dy}{dx} = 4e^{-x}$
4. $\frac{dy}{dx} = e^x + \sin(x)$
5. $3x^2 dx + 2y dy = 0$
6. $x \frac{dy}{dx} + 5y = 6$

Persamaan tersebut termasuk persamaan diferensial biasa (PDB) orde pertama dan derajat satu, karena turunan tertingginya adalah turunan pertama $\frac{dy}{dx}$ dan pangkatnya satu. Orde suatu persamaan diferensial ditentukan oleh tingkat turunan tertinggi yang terdapat dalam persamaan tersebut. Misalnya, jika diberikan fungsi $y = A \sin x + B \cos x$, dengan A dan B sebagai konstanta bebas, turunan pertama

y' yang muncul menunjukkan bahwa persamaan ini adalah orde satu. Jika fungsi tersebut didiferensialkan, maka diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = A \cos x - B \sin x, \quad \text{dan} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -A \sin x - B \cos x$$

Yang hasilnya sama dengan bentuk semula, namun dengan tanda yang berlawanan yaitu

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y$$

Sehingga menjadi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

Persamaan tersebut termasuk persamaan diferensial orde 2.

Persamaan diferensial parsial merupakan persamaan diferensial yang melibatkan lebih dari satu variabel bebas. Dengan demikian, perbedaan mendasar antar persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial terletak pada banyaknya variabel bebas yang digunakan dalam persamaan tersebut.

Berikut diberikan contohnya :

1. $\frac{dy}{dx} = x + 5$
(y peubah tak bebas, x peubah bebas dan persamaan diferensial biasa)
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$
(y peubah tak bebas, x peubah bebas dan persamaan diferensial biasa)
3. $xy + y = 3$
(y peubah tak bebas, x peubah bebas dan persamaan diferensial biasa)
4. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial^2z}{\partial y^2} = x^2 + y$
(z peubah tak bebas, x dan y peubah bebas dan persamaan diferensial parsial)
5. $\frac{du}{ds} + \frac{du}{dt} = 0$
(u peubah tak bebas, s dan t peubah bebas dan persamaan diferensial parsial)

Apabila suatu persamaan hanya melibatkan satu variabel bebas, sebagaimana pada contoh 1 sampai 3, maka turunan yang digunakan adalah turunan biasa dan

persamaan tersebut diklasifikasikan sebagai persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equation*). Sebaliknya, jika persamaan memuat dua atau lebih variabel bebas, seperti pada contoh 4 dan 5, maka digunakan turunan parsial dan persamaan tersebut termasuk dalam persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*).

2.7 Persamaan Diferensial Parsial

Dalam persamaan diferensial parsial (PDP), suatu fungsi tak bebas dinyatakan melalui turunan parsialnya terhadap satu atau beberapa variabel bebas. (Ross,1984).

Persamaan diferensial parsial memiliki peranan penting dalam pemodelan fenomena fisis karena besaran-besaran yang terlibat di dalamnya bergantung pada perubahan ruang dan waktu. Berbeda dengan persamaan diferensial biasa yang hanya melibatkan satu variabel bebas, persamaan diferensial parsial memuat lebih dari satu variabel bebas. Tingkat orde suatu persamaan ditentukan oleh turunan tertinggi yang muncul, baik pada persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial, dan keduanya dapat diklasifikasikan sebagai persamaan linier ataupun tak linier.

Suatu persamaan diferensial diklasifikasikan sebagai linier apabila peubah tak bebas serta seluruh turunannya muncul secara linear, yaitu berpangkat satu dan tidak saling dikalikan. Apabila kondisi tersebut tidak terpenuhi, maka persamaan tersebut dikategorikan sebagai persamaan diferensial tak linier. Selanjutnya, persamaan diferensial disebut homogen apabila setiap suku penyusunnya mengandung peubah tak bebas atau salah satu turunannya. Sebaliknya, jika dalam persamaan terdapat suku yang tidak memuat peubah tak bebas maupun turunannya, maka persamaan tersebut digolongkan sebagai persamaan diferensial tak homogen. Adapun bentuk umum dari persamaan diferensial parsial dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sum_{i=0}^n A_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \sum_{i=0}^n B_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + C f + D = 0$$

Orde suatu persamaan diferensial parsial ditentukan oleh turunan dengan tingkat tertinggi yang terdapat dalam persamaan diferensial parsial tersebut.

1. Persamaan diferensial orde 1 yaitu $\frac{\partial y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial c}{\partial y} = 0$

2. Persamaan diferensial orde 2 yaitu $\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D \frac{\partial c}{\partial y} = 0$

3. Persamaan diferensial orde 3 yaitu $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^3}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

Selanjutnya, persamaan diferensial parsial dapat diklasifikasikan ke dalam tiga jenis utama, yaitu persamaan diferensial eliptik, parabolik, dan hiperbolik. Sebagai ilustrasi, dipertimbangkan suatu persamaan diferensial parsial orde dua yang melibatkan variabel ruang dan variabel waktu t .

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0$$

Di mana A , B , dan C merupakan fungsi dari variabel x dan t , sedangkan D merupakan fungsi dari peubah tak bebas u , turunan pertama $\frac{\partial u}{\partial x}$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}$, serta variabel x dan t . Perbedaan utama ketiga kelas persamaan diferensial parsial tersebut ditentukan oleh nilai diskriminan $B^2 - 4AC$.

1. Persamaan diferensial parsial diklasifikasikan sebagai hiperbolik apabila nilai diskriminan memenuhi $B^2 - 4ac > 0$. Salah satu contoh persamaan hiperbolik adalah pada persamaan gelombang yaitu $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.
2. Persamaan diferensial parsial diklasifikasikan sebagai persamaan parabolik jika memenuhi kondisi $B^2 - 4ac = 0$. Salah satu contoh persamaan parabolik adalah persamaan difusi $\frac{\partial u}{\partial t} - K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.
3. Persamaan diferensial parsial diklasifikasikan sebagai persamaan eliptik jika memenuhi kondisi $B^2 - 4ac < 0$. Salah satu contoh adalah persamaan Laplace yaitu $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (Farlow, 1982).

2.8 Metode Beda Hingga pada Persamaan Diffrensial

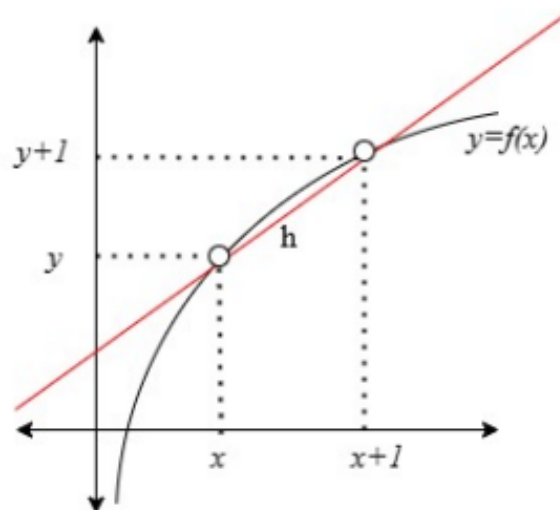
Penyelesaian persamaan diferensial parsial (PDP) secara numerik umumnya dilakukan menggunakan metode beda hingga (*finite difference method*). Metode beda hingga didasarkan pada pendekatan turunan persamaan diferensial menggunakan formulasi beda hingga yang diturunkan dari ekspansi deret Taylor. Dalam metode ini,

wilayah variabel independen dibagi menjadi sejumlah titik diskrit atau grid (*mesh*), sehingga nilai variabel dapat diaproksimasi pada titik-titik tersebut (Awanda dkk, 2019).

Ada tiga jenis hampiran dalam metode beda hingga, yaitu beda maju (*forward difference*), beda mundur (*backward difference*), dan beda tengah (*central difference*) (Sasongko, 2010) :

- Beda Maju (*forward difference*)

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Gambar 2.11 Grafik Beda Maju

- Beda Mundur (*backward difference*)

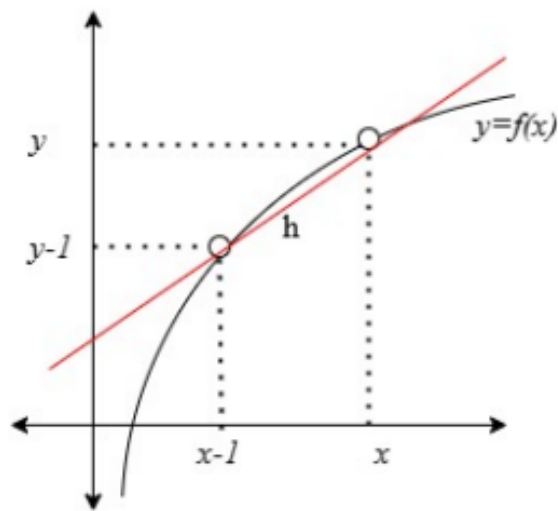
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

- Beda Tengah (*central difference*)

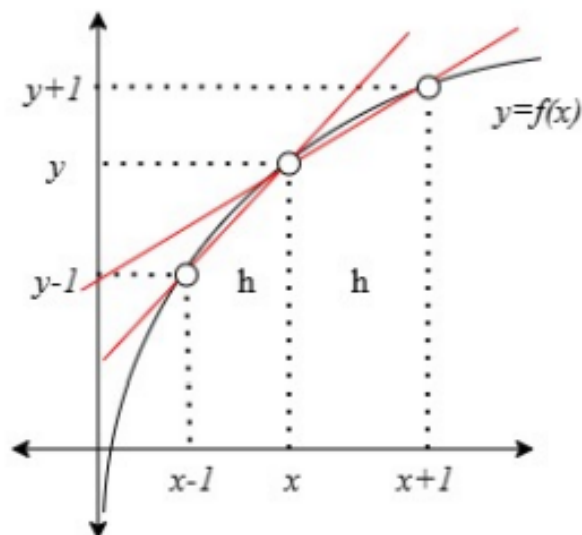
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

dan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$



Gambar 2.12 Grafik Beda Mundur



Gambar 2.13 Grafik Beda Tengah

Berdasarkan definisi di atas, maka diperoleh definisi dari turunan parsial sebagai berikut:

1. Beda maju

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

2. Beda mundur

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x - h, y)}{h} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, y - h)}{h}$$

3. Beda tengah

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x - h, y)}{2h} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y - h)}{2h}$$

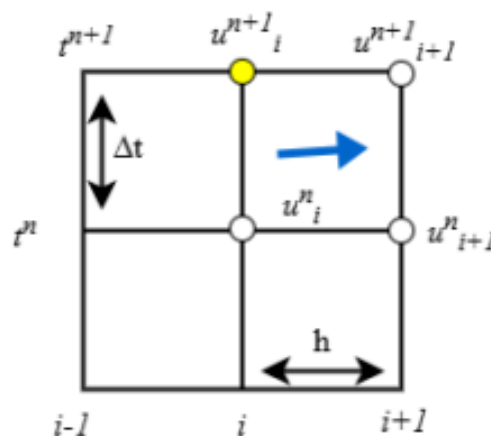
Prinsip dasar metode beda hingga adalah menggantikan turunan pada persamaan diferensial dengan aproksimasi diskrit yang diperoleh melalui ekspansi deret Taylor. Dengan pendekatan ini turunan suatu fungsi kontinu dapat diaproksimasi oleh nilai-nilai fungsi pada titik-titik diskrit di sekitar titik tinjauan. Secara fisis penggunaan deret Taylor dalam metode beda hingga dapat diartikan sebagai upaya untuk meninjau perubahan suatu besaran dalam ruang dan waktu secara mendekati kondisi sebenarnya melalui *grid* atau *mesh* yang dibentuk dari koordinat ruang dan waktu. (Awanda dkk, 2019).

Berdasarkan ekspansi Taylor di atas, terdapat tiga skema beda hingga yang biasa digunakan, yaitu skema maju, skema mundur, dan skema tengah.

1. Skema maju

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h}$$

Dalam skema maju, nilai pada titik hitung i dihubungkan dengan titik hitung $i + 1$ yang berada di depan titik tersebut.

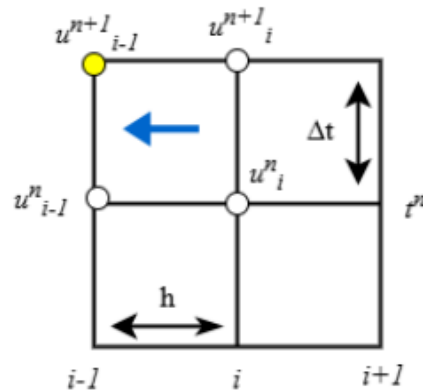


Gambar 2.14 Metode beda hingga skema maju

2. Skema mundur

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h}$$

Dalam skema mundur, nilai pada titik hitung i dihubungkan dengan titik hitung $i - 1$ yaitu titik yang terletak pada posisi sebelumnya.

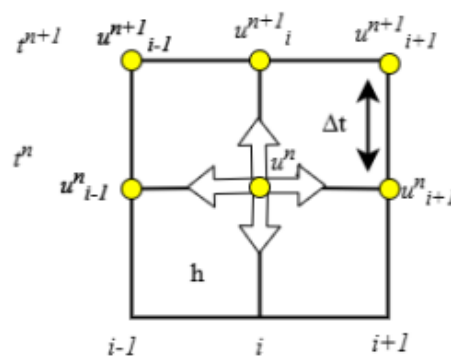


Gambar 2.15 Metode beda hingga skema mundur

3. Skema tengah

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h}$$

Pada skema tengah, nilai pada titik hitung i dihubungkan dengan titik hitung $i - 1$ yang berada di belakangnya dan titik hitung $i + 1$ yang berada di depannya.



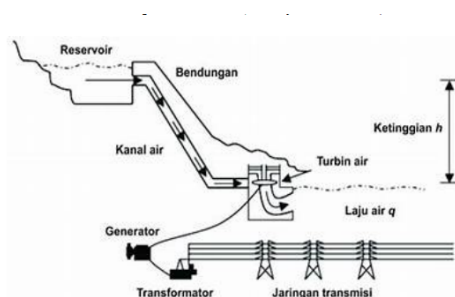
Gambar 2.16 Metode beda hingga skema tengah

2.9 Pembangkit Listrik Tenaga Air (PLTA)

Pembangkit Listrik Tenaga Air (PLTA) adalah sistem pembangkitan energi listrik yang memanfaatkan energi potensial dan kinetik air sebagai penggerak utama. Air yang berasal dari bendungan atau air terjun menggerakkan turbin sehingga menghasilkan energi mekanik, yang kemudian diubah menjadi energi listrik melalui generator. Energi listrik yang dihasilkan didistribusikan ke pengguna melalui jaringan transmisi dan distribusi yang tersedia.

Bagian-bagian pada PLTA meliputi:

1. Bendungan, berperan sebagai tempat penampungan air dalam jumlah besar yang bertujuan untuk mengatur debit dan ketinggian air sebelum dialirkan ke turbin.
2. Turbin, mengubah aliran air menjadi energi mekanik. Air yang mengalir dan jatuh akan mendorong sudu-sudu turbin sehingga menyebabkan turbin berputar. Perputaran turbin selanjutnya dihubungkan pada generator. Kinerja turbin pada PLTA dipengaruhi oleh “head” atau tinggi jatuh air terhadap turbin serta debit atau volume air di lokasi pembangkit. Faktor lain yang turut mempengaruhi adalah efisiensi dan biaya.
3. Generator, tersambung dengan turbin melalui sistem roda gigi sehingga ketika sudu-sudu turbin berputar, generator juga berputar. Selanjutnya, generator berfungsi mengonversi energi mekanik menjadi energi listrik.
4. Jalur transmisi, berperan mengalirkan energy listrik dari PLT ke rumah-rumah dan pusat industri (Anonymous, 2013).



Gambar 2.17 Pusat pembangkit listrik tenaga air

2.10 Fluida Dinamis

Fluida dinamis merujuk pada fluida, baik cairan maupun gas, yang berada dalam keadaan mengalir. Dalam analisis ini, fluida diasumsikan memiliki kecepatan aliran yang konstan terhadap waktu, bersifat tak termampatkan, mengalir tanpa viskositas, serta menunjukkan pola aliran laminar tanpa adanya turbulensi. Karakteristik aliran fluida umumnya dinyatakan melalui debit, yaitu besarnya volume fluida yang melewati suatu penampang per satuan waktu.

$$Q = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Dengan keterangan sebagai berikut:

Q = debit aliran air (m^3/s)

v = volume air (m^3)

t = selang waktu (s)

(Setiawan, 2015).

2.11 Pemrograman Python

Python merupakan bahasa pemrograman tingkat tinggi yang diciptakan oleh Guido van Rossum pada tahun 1991. Bahasa python dirancang dengan sintaks yang sederhana dan mudah dibaca, sehingga memudahkan pengguna dalam menulis serta memahami kode program (Van Rossum dan Drake, 2009). Python termasuk bahasa pemrograman multi-paradigma, yang mendukung paradigma pemrograman berorientasi objek, prosedural, dan fungsional.

Python memiliki pustaka (*library*) yang sangat luas, mencakup berbagai bidang seperti komputasi numerik, sains data, rekayasa, dan kecerdasan buatan. Beberapa pustaka populer yang sering digunakan dalam analisis numerik dan ilmiah antara lain NumPy, SciPy, Matplotlib, dan Pandas (Harris dkk, 2020). Kombinasi pustaka-pustaka tersebut menjadikan Python sebagai salah satu bahasa yang banyak digunakan untuk penelitian ilmiah dan pemodelan matematis.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 di Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini berupa data debit aliran air yang diperoleh pada 4 titik sungai pada Bendungan Batutegi. Data diperoleh dari situs resmi *Global Solar Atlas (World Bank Group)* dan website <https://open-meteo.com/>.

3.3 Metode Penelitian

Penelitian dilakukan melalui studi pustaka dengan cara mempelajari berbagai buku dan jurnal yang menunjang proses penelitian.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Dilakukan Studi pustaka dengan memahami buku-buku teks yang tersedia di perpustakaan Jurusan Matematika serta jurnal-jurnal yang relevan untuk mendukung proses penelitian.
2. Menyusun definisi serta teorema yang relevan dengan topik penelitian.
3. Melakukan pengambilan data yang diperlukan.
4. Menganalisis data dan menentukan persamaan nilai air dengan menggunakan metode beda hingga.

5. Menentukan laju pada setiap titik kecepatan melalui penerapan metode beda hingga.
6. Menentukan nilai berdasarkan persamaan yang telah dibentuk dengan bantuan perangkat lunak Python sehingga diperoleh nilai air pada setiap titik yang telah ditetapkan.
7. Mendapatkan hasil.
8. Menarik kesimpulan berdasarkan analisis perhitungan yang telah dihitung.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan mengenai perhitungan nilai pada nilai debit air menggunakan metode beda hingga didapatkan hasil sebagai berikut:

1. Model persamaan simultan nilai debit air di 9 titik yaitu

$$D_2 + D_3 + D_4 - 4T_1 = -90,748$$

$$D_1 + D_4 + T_1 - 4T_2 = -16,33$$

$$D_1 + D_4 + T_1 - 4T_3 = -10,898$$

$$D_2 + D_3 + T_1 - 4T_4 = -90,748$$

$$D_2 + D_3 + T_1 - 4T_5 = -3,628$$

$$D_2 + T_2 + T_4 - 4T_6 = -96,179$$

$$D_1 + T_4 + T_3 - 4T_7 = -10,899$$

$$D_3 + T_2 + T_5 - 4T_8 = -3,629$$

$$D_2 + T_3 + T_4 - 4T_9 = -3,629$$

2. Nilai Debit Air di 9 titik Sungai pada Bendungan yang diperoleh berdasarkan perhitungan manual adalah $T_{c1} = 30,402$, $T_{c2} = 35,270$, $T_{c3} = 33,920$, $T_{c4} = 37,095$, $T_{c5} = 15,315$, $T_{c6} = 44,863$, $T_{c7} = 43,166$, $T_{c8} = 17,638$, dan $T_{c9} = 21,386$.

3. Nilai Debit Air di 9 titik Sungai pada Bendungan yang diperoleh berdasarkan perhitungan *Software Python* adalah $T_{c1} = 30,402$, $T_{c2} = 35,270$, $T_{c3} = 33,920$, $T_{c4} = 37,095$, $T_{c5} = 15,315$, $T_{c6} = 44,863$, $T_{c7} = 43,166$, $T_{c8} = 17,638$, dan $T_{c9} = 21,386$.

5.2 Saran

Penelitian selanjutnya disarankan untuk mengembangkan atau membandingkan penggunaan metode beda hingga tengah dengan metode numerik lainnya, seperti metode-metode interpolasi numerik atau metode numerik berbasis elemen hingga, guna memperoleh hasil estimasi debit air yang lebih akurat dan komprehensif.

DAFTAR PUSTAKA

- Awanda, R., Oktafianto, K., Arifin, A. Z., & Fatihah, N. (2019). Simulasi Sebaran Abu Pabrik Kapur Menggunakan Metode Beda Hingga. *Zeta-Math Journal*, 4(2), 34-39.
- Anonymous. (2013). *Pembangkit Listrik Tenaga Air*. <http://godamaiku.blogspot.co.id/2013/01/pembangkit-listrik-tenaga-air.html>
- Cahyono. (2013). *Pemodelan Matematika*. Graha Ilmu, Bandung.
- Hasan. (2016). Penerapan Metode Beda Hingga pada Model Matematika Aliran Banjir dari Persamaan Saint Venant. *Zeta - Math Journal*, 2(1), 6–7.
- Ruby, T. (2023). Pemodelan Matematika Laju Aliran Panas Pada Wajan Pembuatan Arang Aktif-13 Dengan Menggunakan Metode Beda Hingga (Finite Difference Method). *Journal of Innovation Research and Knowledge*, 3(1).
- Subandono, A. (2013). Pembangkit Listrik Tenaga Mikro Hidro (PLTMH). *J. Rekayasa Elektrik*, 10(4), 1–3.
- Sinopa, L. C. K. V., Noviani, E., & Rizki, S. W. (2020). Hampiran Solusi Persamaan Panas Dimensi Satu dengan Metode Beda Hingga Crank-Nicolson. *Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya (Bimaster)*, 9(1), 195–204.
- Dym, Clive L., & Ivey, Elizabeth S. (1980). *Principles of Mathematical Modeling*. University of Minnesota.
- Sukirman. (2004). *Pengantar Teori Fungsi dan Aplikasinya*. Universitas Terbuka.
- Farlow, S. J. (1982). *Partial Differential Equations for Scientist and Engineers*. John Wiley & Sons, Inc., New York.

- Ilmah, A. M., Syarifuddin, A., & Abdullah, M. (2021). Pemodelan Matematis dari Sifat Fisis Aliran Fluida pada Saluran Pipa Menggunakan Metode Beda Hingga 2 Dimensi. *Journal Inovtek Polbeng*, 11(2), 146.
- Li, Z. (2010). *Finite Difference Method Basics*. California: Department of Mathematics, North California State University.
- Ross, S. L. (1984). *Differential Equations*. New York: Wiley.
- Setiawan, T. (2015). *Fluida Dinamis*. Jakarta: Yudistira.
- Maulidi, I. (2018). *Metode Beda Hingga Untuk Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial*. Aceh: Jurusan Matematika Universitas Syiah Kuala.
- Van Rossum, G., & Drake, F. L. (2009). *Python 3 Reference Manual* Scotts Valley, CA: CreateSpace.
- Harris, C. R., Millman, K. J., van der Walt, S. J., Gommers, R., Virtanen, P., Cournapeau, D., Wieser, E., Taylor, J., Berg, S., Smith, N. J., Kern, R., Picus, M., Hoyer, S., van Kerkwijk, M. H., Brett, M., Haldane, A., Del Río, J. F., Wiebe, M., Peterson, P., Gérard-Marchant, P., ... Oliphant, T. E. (2020). Array programming with NumPy.
- Sasongko, S. B. (2010). *Metode numerik dengan Scilab*. Yogyakarta: CV. Andi Offset.
- Li, Z., Qiao, Z., Tang, T. (2017). *Numerical Solution of Differential Equation: Introduction to Finite Difference and Finite Element Methods*. Cambridge University Press: Cambridge.
- Setiyowati, R., & Riestiana, V. A. (2021). Simulasi numerik persamaan gelombang air dangkal 1D dengan topografi tidak datar menggunakan metode beda hingga. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 18(2), 95-107.
- Strauss, W. A. (2008). *Partial Differential Equations: An Introduction* (2nd ed.). John Wiley & Sons.
- Zill, D. G. (2018). *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications* (11th ed.). Cengage Learning.