DERIVASI-(α, β) PADA MODUL POLINOMIAL

Skripsi

Oleh

RAFAEL BILLY GLEN DACHI
NPM. 2217031152

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

ABSTRACT

(α, β)-DERIVATION ON POLYNOMIAL MODULE

By

Rafael Billy Glen Dachi

A mapping δ on R is called a derivation if $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$, for every $a, b \in R$. If δ is a derivation on the ring R, M and N are right modules over ring R, and α is a ring homomorphism and β is a module homomorphism, then the mapping $d : M \to N$ is called a derivation (α, β) on the module over ring if it satisfies $d(xa) = d(x)\alpha(a) + \beta(x)\delta(a)$, for every $x \in M$ and $a \in R$. This study aims to analyze the properties of derivations (α, β) on modules over rings and polynomial modules $M[x]$ over polynomial rings $R[x]$, construct concrete examples of derivations (α, β), and examine the relationship between derivations (α, β) on modules over rings and polynomial modules $M[x]$ over polynomial rings $R[x]$.

Keywords: ring, module, polynomial ring, polynomial module, (α, β)-derivations.

ABSTRAK

DERIVASI-(α, β) PADA MODUL POLINOMIAL

Oleh

Rafael Billy Glen Dachi

Suatu pemetaan δ pada R disebut derivasi jika $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$, untuk setiap $a, b \in R$. Jika δ adalah derivasi pada ring R, M dan N merupakan modul kanan atas ring R dan α adalah homomorfisma ring serta β adalah homomorfisma modul, maka pemetaan $d : M \to N$ disebut derivasi (α, β) pada modul atas ring jika memenuhi $d(xa) = d(x)\alpha(a) + \beta(x)\delta(a)$, untuk setiap $x \in M$ dan $a \in R$. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis sifat-sifat derivasi$-(\alpha, \beta)$ pada modul atas ring dan modul polinomial $M[x]$ atas ring polinomial $R[x]$, mengontruksi contoh konkret derivasi-(α, β) serta mengkaji hubungan antara derivasi-(α, β) pada modul atas ring dan modul polinomial $M[x]$ atas ring polinomial $R[x]$.

Kata-kata kunci: ring, modul, ring polinomial, modul polinomial, derivasi-(α, β).

DERIVASI-(α, β) PADA MODUL POLINOMIAL

RAFAEL BILLY GLEN DACHI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

Judul Skripsi	:	**DERIVASI - (α, β) PADA MODUL POLINOMIAL**
Nama Mahasiswa	:	*Rafael Billy Glen Dachi*
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031152**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.	**Dr. Bernadhita H. S. U., S.Si., M.Sc.**
NIP. 198406272006042001	NIP. 199206302023212034

2. Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama, FMIPA Universitas Lampung

Mulyono, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP. 197406112000031002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	:	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Sekretaris	:	**Dr. Bernadhita H. S. U., S.Si., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **20 April 2026**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Rafael Billy Glen Dachi**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031152**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Derivasi-(α, β) Pada Modul Polinomial**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 20 April 2026

Penulis,

Rafael Billy Glen Dachi

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Rafael Billy Glen Dachi yang lahir di Batam pada tanggal 10 September 2003. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara, putra dari pasangan P. Dachi dan E. Wau.

Penulis memulai pendidikan formal di TK Eben Haezer pada tahun 2009 dan menyelesaikannya pada tahun 2010. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di SD Swasta Eben Haezer II Batam pada tahun 2010 sampai dengan 2016. Setelah menyelesaikan pendidikan sekolah dasar, penulis melanjutkan pendidikan di SMP Swasta Eben Haezer II Batam pada tahun 2016 sampai dengan tahun 2019, dan menyelesaikan pendidikan tiga tahun di SMA Negeri 21 Batam pada tahun 2022.

Pada tahun 2022, penulis diterima di Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Pada akhir tahun 2024, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di PT Great Giant Pineapple selama 40 hari yang terhitung dari 23 Desember 2024 sampai dengan 31 Januari 2025. Selain itu, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 30 hari di kelurahan Susunan Baru, kecamatan Tanjung Karang Barat, kota Bandar Lampung.

Selama masa studi, penulis menunjukkan ketekunan dan dedikasi dalam menyelesaikan berbagai tugas akademik. Penulis berharap hasil dari penelitian ini dapat memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya di bidang Struktur Aljabar.

KATA INSPIRASI

"See, God has come to save me. I will trust in him and not be afraid. The LORD GOD is my strength and my song; he has given me victory."

(Isaiah 12:2)

"You will be rewarded for this; your hope will not be disappointed."

(Proverbs 23: 18)

"I decided long ago, never to walk in anyone's shadows.
If I fail, if I succeed. At least I lived as I believe.
No matter what they take from me.
They can't take away my dignity."

(Greatest Love of All - Whitney Houston)

PERSEMBAHAN

Dalam nama Bapa, Putra, dan Roh Kudus, dengan mengucapkan puji dan syukur ke kehadirat Tuhan Yesus Kristus karena limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Bapa dan Mama Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan harapan serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yesus Kristus atas limpahan kasih dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Derivasi-(α, β) pada Modul Polinomial” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sepanjang proses penyusunan skripsi ini.

2. Ibu Dr. Bernadhita Herindri Samodera Utami, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing 2 yang telah memberikan arahan, dukungan, serta doa sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan saran, kritik, serta evaluasi yang membangun sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

4. Ibu Dr. Khoirin Nisa, M.Si. selaku Dosen Pembimbing Akademik.

5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Seluruh dosen, staff, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Khususnya Ibu Anita selaku Admin Jurusan yang telah membantu memperlancar segala urusan administrasi dari awal sampai akhir.

7. Seluruh guru TK, SD, SMP, dan SMA yang telah mengajarkan dan memberikan ilmu hingga penulis bisa menduduki bangku perkuliahan.
8. Bapak, ibu, kakak, serta adik-adik yang selalu memberikan dukungan dan doa sehingga penulis dapat segera menyelesaikan skripsi ini.
9. Sahabat penulis: Geby Gemoy dan Bang Dapit, yang selalu ada dan memberikan semangat serta motivasi dalam setiap proses penulisan skripsi ini.
10. Teman teman penulis: Winne, Nando, Denada, sirkel Pomparan, sirkel Kudumain, sirkel KKN, terima kasih sudah ada dalam proses perkuliahan yang penulis jalani.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 20 April 2026

Rafael Billy Glen Dachi

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Konsep diferensial pertama kali diperkenalkan pada pertengahan abad ke-17, diawali oleh Newton dengan konsep fluks pada tahun 1670-an, tidak lama setelah itu pada tahun 1680-an konsep diferensial diperkenalkan oleh Leibniz (Archibald dkk., 2005). Konsep ini terus berkembang dan diterapkan pada bidang ilmu lain salah satunya aljabar. Pengembangan konsep diferensial pada aljabar disebut derivasi. Konsep derivasi diperluas ke dalam struktur aljabar abstrak melalui derivasi pada ring. Derivasi pada ring pertama kali diperkenalkan untuk menggambarkan operasi diferensial dalam konteks aljabar. Dalam hal ini, derivasi didefinisikan sebagai operator linear d pada suatu ring yang memenuhi dua sifat utama, yaitu linearitas dan hasil kali Leibniz (Ashraf dkk., 2006). Konsep derivasi bisa diperluas lagi ke dalam struktur aljabar yang lebih abstrak melalui derivasi pada modul atas ring. Dengan menggunakan konsep yang sama, derivasi pada modul polinomial $M[x]$ atas ring polinomial $R[x]$ diterapkan untuk menggambarkan bagaimana elemen-elemen dalam modul saling berinteraksi melalui operasi diferensial.

Derivasi adalah konsep pada aljabar yang sudah dipelajari sejak lama. Konsep derivasi pada ring dalam aljabar abstrak pertama kali dipelajari secara formal oleh Posner (1957), penelitian yang dilakukan menjadi landasan penting untuk studi derivasi dalam teori ring. Kemudian Herstein (1978) mengembangkan konsep ini lebih lanjut, ia membahas sifat-sifat derivasi pada ring dan ring prima. Herstein juga memperkenalkan generalisasi derivasi, seperti derivasi-(α, β) yang menjadi dasar penelitian lanjutan dalam teori ring. Konsep ini terus berkembang dan banyak peneliti yang mempelajarinya.

Beberapa penelitian lanjutan tentang derivasi pada ring antara lain, Kuzucuoğlu & Sayin (2017) membahas struktur derivasi pada kelas khusus ring matriks yang terdiri dari gabungan matriks niltriangular dan matriks atas suatu ideal, Khalaf dkk. (2018) membahas struktur dan sifat-sifat derivasi pada ring prima, yaitu ring asosiatif yang dilengkapi dengan suatu derivasi dan memenuhi sifat prima dalam konteks diferensial, Al-Omary & Nauman (2021) mempelajari generalisasi derivasi pada ring prima yang memenuhi identitas tertentu, De Filippis dkk. (2023) membahas generalisasi derivasi-g pada ring prima dan Ali dkk. (2024) membahas secara komprehensif berbagai tipe derivasi pada ring dalam aljabar abstrak, penelitian ini mengulas perkembangan, definisi, sifat-sifat, dan hasil-hasil terkini terkait berbagai generalisasi derivasi pada ring.

Perkembangan konsep derivasi pada bahasan ini mengarah pada pengenalan derivasi-(α, β). Konsep ini dimulai oleh Argac dkk. (1987) dengan mengembangkan konsep derivasi dalam konteks endomorfisma ring yang menjadi ide utama terbentuknya derivasi-(α, β). Lebih lanjut Aydin (1997) mengkaji sifat-sifat derivasi-(α, β) pada ring prima dan ring semiprima, kemudian Garg & Sharma (2016) melakukan penelitian dengan mengembangkan konsep derivasi klasik dan generalisasi derivasi-(α, β) dengan fokus pada sifat multiplikatif. Hongan (2017) membahas generalisasi derivasi-(α, β) pada ring semiprima, Muthana & Alkhamisi (2020) mengkaji generalisasi derivasi-(α, β) yang bersifat multiplikatif dan *centrally extended* pada ring semiprima, serta Waluyo dkk. (2025) yang mengkaji derivasi-(σ, τ) pada ring grup, yaitu generalisasi derivasi pada ring dengan melibatkan dua endomorfisma.

Pada konteks modul dan aljabar, derivasi pada modul mulai dibahas oleh beberapa peneliti antara lain, Grønbæk (1989) meneliti struktur dan sifat derivasi pada modul Banach atas aljabar Banach komutatif, Hejazian & Niknam (1996) memberikan gambaran bagaimana derivasi dapat digunakan untuk mengungkapkan struktur aljabar, dan Abbaspour dkk. (2005) yang memformalkan konsep derivasi pada modul serta membahas sifat-sifat derivasi pada modul. Penelitian derivasi pada modul terus berlanjut dengan Teymouri dkk. (2020) yang meneliti sifat dan struktur derivasi pada struktur aljabar Banach yang diperluas dengan modul, Chiu & Macarro (2023) yang mempelajari konsep derivasi tingkat tinggi pada modul.

Penelitian terbaru yang membahas derivasi pada modul yaitu Fitriani dkk. (2025) yang mengkaji tentang derivasi-f pada modul polinomial $M[x]$ atas ring polinomial $R[x]$, dan membahas hubungan derivasi-f pada ring dan modul, serta memberikan dasar untuk studi lebih lanjut dalam teori ring dan modul polinomial. Penerapan derivasi-(α, β) pada modul polinomial memberikan peluang untuk memahami struktur aljabar melalui operator yang lebih luas dan bersifat general, yang dapat menggambarkan interaksi lebih kompleks antar elemen-elemen dalam modul tersebut.

Berdasarkan pengembangan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, belum ada peneliti yang membahas tentang derivasi-(α, β) pada modul polinomial $M[x]$ atas ring polinomial $R[x]$. Oleh karena itu, penelitian ini akan membahas mengenai hubungan antara derivasi-(α, β) pada modul atas ring dan derivasi-(α, β) pada modul polinomial $M[x]$ atas ring polinomial $R[x]$. Selain itu, dalam penelitian ini juga akan diselidiki sifat-sifat derivasi-(α, β), baik pada modul secara umum maupun pada modul polinomial.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. menyelidiki sifat-sifat derivasi-(α, β) pada modul atas ring dan modul polinomial $M[x]$ atas ring polinomial $R[x]$;
2. mengkonstruksi contoh-contoh derivasi-(α, β) pada modul atas ring dan modul polinomial $M[x]$ atas ring polinomial $R[x]$;
3. menyelidiki hubungan antara derivasi-(α, β) pada modul atas ring dengan derivasi-(α, β) pada modul polinomial $M[x]$ atas ring polinomial $R[x]$.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang ingin diperoleh dari penelitian ini yaitu:

1. mengetahui sifat-sifat derivasi-(α, β) pada modul atas ring dan modul polinomial $M[x]$ atas ring polinomial $R[x]$;

2. mengetahui hubungan antara derivasi-(α, β) pada modul atas ring dengan derivasi-(α, β) pada modul polinomial $M[x]$ atas ring polinomial $R[x]$;

3. menambah referensi penelitian selanjutnya mengenai derivasi-(α, β) pada modul atas ring dan modul polinomial $M[x]$ atas ring polinomial $R[x]$.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, akan diuraikan konsep dasar yang menjadi landasan teori untuk mendukung pembahasan pada bagian selanjutnya. Konsep-konsep tersebut akan membentuk kerangka berpikir yang menjelaskan definisi serta contoh-contohnya.

2.1 Grup

Salah satu langkah penting untuk mendalami konsep-konsep yang lebih kompleks dalam teori aljabar adalah memahami struktur dasar dalam aljabar abstrak, yaitu grup. Sebelum membahas pengertian grup dan sifat-sifatnya, berikut ini dibahas pengertian operasi biner.

Definisi 2.1.1 Diberikan himpunan tak kosong S. Operasi biner $*$ pada himpunan S merupakan fungsi dari $S \times S$ ke S. Untuk setiap $(a, b) \in S \times S$, $*(a, b)$ di S dinotasikan dengan $a * b$ (Fitriani & Faisol, 2022).

Berdasarkan Definisi 2.1.1, operasi biner pada himpunan S memetakan pasangan berurutan $(a, b) \in S \times S$ ke $*(a, b)$ di S yang dinotasikan dengan $a * b$ yang merupakan elemen dari S. Sebagai ilustrasi jika dipilih $S = \mathbb{Z}$, dan $*$ adalah operasi penjumlahan bilangan bulat, maka $+$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$ karena $+(a, b)$ yang dinotasikan dengan $a + b$ merupakan bilangan bulat.

Berikut diberikan contoh operasi biner.

Contoh 2.1.2 Diberikan himpunan

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Akan ditunjukkan operasi perkalian matriks $(\cdot)$ merupakan operasi biner pada G. Diberikan sebarang dua matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in G$, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \\ c \cdot e + d \cdot g & c \cdot f + d \cdot h \end{bmatrix} \in G.$$

Jadi, operasi perkalian matriks $(\cdot)$ merupakan operasi biner pada G.

Setelah memahami definisi dan contoh dari operasi biner, berikut diberikan definisi himpunan tertutup.

Definisi 2.1.3 Diberikan operasi biner $*$ dan himpunan bagian tak kosong H di S. Himpunan H dikatakan tertutup terhadap operasi biner $*$ jika untuk setiap $a, b \in H$, berlaku $a * b \in H$(Fitriani & Faisol, 2022).

Berikut diberikan contoh himpunan tertutup.

Contoh 2.1.4 Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ berserta operasi penjumlahan $(+)$ bilangan pada $\mathbb{Z}$.

Telah diketahui bahwa operasi penjumlahan bilangan $(+)$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$. Untuk setiap dua elemen di $3\mathbb{Z} = \{3z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{Z}$. Untuk setiap dua elemen di $3\mathbb{Z}$, hasil penjumlahan kedua bilangan tersebut berada di dalam himpunan $3\mathbb{Z}$. Akibatnya, himpunan $3\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan bilangan.

Struktur aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu dinamakan grup.

Definisi 2.1.5 Suatu grup $\langle G, * \rangle$ terdiri dari himpunan tak kosong G bersama operasi biner $*$ yang didefinisikan pada G dan memenuhi aksioma berikut:

(i) operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$;

(ii) terdapat elemen identitas e, yaitu untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$;

(iii) untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen invers $a' \in G$ sehingga berlaku $a * a' = a' * a = e$,

(Fitriani & Faisol, 2022).

Setelah memahami operasi biner dan himpunan tertutup, berikut diberikan contoh grup.

Contoh 2.1.6 Diberikan himpunan $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup.

(i) Operasi $+$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$, yaitu $(a+b)+c = a+(b+c)$, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

(i) Terdapat elemen identitas di $\mathbb{Z}$ terhadap operasi $+$, yaitu 0, sehingga $0 + a = a + 0 = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.

(iii) Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ memiliki invers terhadap operasi $+$, yaitu $-a \in \mathbb{Z}$, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Jadi, $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup.

Berikut diberikan contoh sistem matematika yang bukan grup.

Contoh 2.1.7 Diberikan himpunan bilangan $\mathbb{Z}^+$ dengan operasi perkalian $(\cdot)$. Struktur aljabar $\langle \mathbb{Z}^+, \cdot \rangle$ bukan grup karena setiap elemen di $\mathbb{Z}^+$ selain 1 tidak memiliki invers terhadap operasi $(\cdot)$.

Selanjutnya akan dijelaskan tentang grup komutatif. Berdasarkan sifat komutatif dari operasi biner dalam suatu grup, dapat dinyatakan bahwa jika grup tersebut komutatif, hasil operasi antara dua elemen akan tetap sama meskipun urutan elemen dibalik. Berikut diberikan definisi dari grup komutatif.

Definisi 2.1.8 Grup $\langle G, * \rangle$ disebut grup Abel atau grup komutatif jika pada operasi biner $*$ berlaku:

$$a * b = b * a,$$

untuk setiap $a, b \in G$ (Fitriani & Faisol, 2022).

Berikut diberikan contoh grup komutatif.

Contoh 2.1.9 Himpunan $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ menyatakan himpunan semua matriks berukuran $m \times n$ yang entri entrinya bilangan real merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan matriks. Hal ini dikarenakan untuk setiap $X, Y \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, berlaku $X + Y = Y + X$.

Setelah memahami grup dan aksioma-aksioma yang harus terpenuhi, selanjutnya akan dijelaskan tentang subgrup. Subgrup adalah salah satu konsep dasar dalam teori grup yang memiliki peran penting dalam memahami struktur dan sifat-sifat grup secara lebih mendalam. Secara umum, subgrup adalah himpunan bagian dari suatu grup yang juga memenuhi aksioma-aksioma grup terhadap operasi yang sama.

Berikut diberikan definisi dari subgrup.

Definisi 2.1.10 Diberikan himpunan bagian H dari grup G yang tertutup terhadap operasi biner pada G. Himpunan H dikatakan subgrup G jika terhadap operasi biner yang sama pada G, H merupakan grup. Selanjutnya H subgrup G dinotasikan dengan $H \leq G$ atau $H < G$ yang berarti H subgrup G, tetapi $H \neq G$ (Fitriani & Faisol, 2022).

Berikut diberikan contoh subgrup dari suatu grup.

Contoh 2.1.11 Himpunan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan subgrup $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$, karena memenuhi semua syarat subgrup.

Setelah membahas subgrup, berikut akan dijelaskan tentang homomorfisma grup. Secara umum homomorfisma grup adalah sebuah pemetaan antara dua grup yang mempertahankan operasi biner.

Definisi 2.1.12 Diberikan grup $\langle G, * \rangle$ dan $\langle H, * \rangle$. Pemetaan $f : G \to H$ dikatakan homomorfisma jika memenuhi:

$$f(x * y) = f(x) * f(y),$$

untuk setiap $x, y \in G$ (Suryanti, 2017).

Berikut diberikan contoh homomorfisma grup.

Contoh 2.1.13 Diberikan grup G yang terdiri dari semua fungsi kontinu dengan domain $[0, 2]$ terhadap operasi penjumlahan fungsi dan $\mathbb{R}$ adalah grup dari semua bilangan real terhadap operasi pemjumlahan bilangan. Didefinisikan $\sigma : G \to \mathbb{R}$, dengan

$$\sigma(g) = \int_0^2 g(x)\, dx, \text{untuk setiap } g \in G.$$

Akan ditunjukkan bahwa σ merupakan homomorfisma grup dari G ke $\mathbb{R}$. Diberikan sebarang $g, h \in G$ berlaku:

$$\begin{aligned}\sigma(g+h) &= \int_0^2 (g+h)(x)\ dx \\ &= \int_0^2 (g(x)+h(x))\ dx \\ &= \int_0^2 g(x)\ dx + \int_0^2 h(x)\ dx \\ &= \sigma(g)+\sigma(h).\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa σ merupakan homomorfisma grup.

Sebuah pemetaan antara dua grup yang sama dengan mempertahankan operasi biner disebut endomorfisma grup.

Definisi 2.1.14 Diberikan $\langle G, * \rangle$ dan $\langle H, * \rangle$ merupakan grup, pemetaan $f : G \to H$ adalah homomorfisma grup. Jika $G = H$, maka f disebut endomorfisma grup (Suryanti, 2017).

Berikut diberikan contoh endomorfisma grup.

Contoh 2.1.15 Diberikan $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan, dan pemetaan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Didefinisikan $f(x) = 3x$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$.

Akan ditunjukkan bahwa f merupakan endomorfisma grup dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$. Diberikan sebarang $x \in \mathbb{Z}$. Berlaku:

$$\begin{aligned}f(x+y) &= 3(x+y) \\ &= 3x+3y \\ &= f(x)+f(y).\end{aligned}$$

Karena $f(x+y) = f(x)+f(y)$, terbukti f merupakan homomorfisma. Selanjutnya karena domain dan kodomain dari f merupakan grup $\mathbb{Z}$ yang sama, terbukti f merupakan endomorfisma grup.

2.2 Ring

Setelah memahami konsep operasi biner dan grup Abel yang menjadi dasar terbentuknya suatu grup. Selanjutnya, akan dijelaskan mengenai ring. Secara umum ring adalah konsep dalam struktur aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu.

Berikut diberikan definisi ring.

Definisi 2.2.1 Diberikan suatu himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi yang dinotasikan dengan $+$ dan $\cdot$, yang disebut operasi penjumlahan dan perkalian. Himpunan R disebut ring terhadap operasi $+$ dan $\cdot$ jika memenuhi sifat:

(i) $\langle R, +\rangle$ merupakan grup komutatif artinya:

(1) untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku, $(a + b) + c = a + (b + c)$,

(2) terdapat $0 \in R$, sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a$, untuk setiap $a \in R$, 0 adalah elemen identitas di R,

(3) untuk setiap $a \in R$, terdapat elemen invers yaitu $-a \in R$, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$,

(4) untuk setiap $a, b \in R$, berlaku $a + b = b + a$;

(ii) operasi perkalian di R bersifat asosiatif, yaitu:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$

untuk setiap $a, b, c \in R$;

(iii) operasi penjumlahan dan perkalian di R bersifat:

(a) distributif kiri:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

(b) distributif kanan:

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c),$$

untuk setiap $a, b, c \in R$

(Wahyuni dkk., 2021).

Berikut diberikan contoh ring.

Contoh 2.2.2 Diberikan A yang merupakan himpunan semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Untuk setiap $f, g \in A$ dan $x \in \mathbb{R}$, didefinisikan:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ dan } (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Akan ditunjukkan $\langle A, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

(i) $\langle A, + \rangle$ merupakan grup Abel.

(ii) Untuk setiap $f, g, h \in A$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$\begin{aligned} ((fg)h)(x) &= (fg)(x)h(x) \\ &= f(x)g(x)h(x) \\ &= f(x)(gh)(x) \\ &= (f(gh))(x). \end{aligned}$$

Jadi $((fg)h)(x) = (f(gh))(x)$ untuk setiap $f, g, h \in A$ dan $x \in \mathbb{R}$. Artinya operasi $\cdot$ bersifat asosiatif.

(iii) Untuk setiap $f, g, h \in A$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$\begin{aligned} (f(g+h))(x) &= f(x)(g+h)(x) \\ &= f(x)(g(x)+h(x)) \\ &= f(x)g(x) + f(x)h(x) \\ &= (fg)(x) + (fh)(x) \\ &= (fg+fh)(x). \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} ((f+g)h)(x) &= (f+g)(x)h(x) \\ &= (f(x)+g(x))h(x) \\ &= f(x)h(x) + g(x)h(x) \\ &= (fh)(x) + (gh)(x) \\ &= (fh+gh)(x). \end{aligned}$$

Jadi berlaku hukum distributif kiri dan kanan pada A.

Berdasarkan pernyataan (i), (ii), dan (iii), terbukti bahwa $\langle A, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

Setelah memahami ring dan aksioma-aksioma yang harus terpenuhi, berikut akan dibahas tentang ring komutatif.

Definisi 2.2.3 Suatu ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ dikatakan ring komutatif jika R komutatif terhadap perkalian yaitu berlaku $a \cdot b = b \cdot a$ untuk setiap $a, b \in R$ (Wahyuni dkk., 2021).

Berikut diberikan contoh pada ring komutatif.

Contoh 2.2.4 Ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$, dan $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$, masing masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.

Dalam teori aljabar, ideal dari suatu ring R adalah himpunan bagian I dari R yang memenuhi dua aksioma. Ideal ring dibedakan menjadi dua yaitu ideal kiri dan ideal kanan.

Berikut akan diberikan definisi dari ideal kiri.

Definisi 2.2.5 Diberikan ring R dan $I \subset R$ dengan $I \neq R$. I disebut ideal kiri jika:

(i) untuk setiap $a, b \in I$, berlaku $a - b \in I$,

(ii) untuk setiap $a \in I, r \in R$, berlaku $ra \in I$,

(Rasiman dkk., 2018).

Berikut diberikan definisi ideal kanan.

Definisi 2.2.6 Diberikan ring R dan $I \subset R$ dengan $I \neq R$. I disebut ideal kanan jika:

(i) untuk setiap $a, b \in I$, berlaku $a - b \in I$,

(ii) untuk setiap $a \in I, r \in R$, berlaku $ar \in I$,

(Rasiman dkk., 2018).

Jika himpunan bagian I dari R merupakan ideal kiri sekaligus ideal kanan maka I disebut ideal atau ideal dua sisi dari ring. Berikut diberikan definisi ideal.

Definisi 2.2.7 Diberikan ring R dan $I \subset R$ dengan $I \neq R$. I disebut ideal atau ideal dua sisi dari ring jika:

(i) untuk setiap $a, b \in I$, berlaku $a - b \in I$,

(ii) untuk setiap $a \in I, r \in R$, berlaku $ra \in I$ dan $ar \in I$,

(Rasiman dkk., 2018).

Berikut diberikan contoh ideal.

Contoh 2.2.8 Diberikan ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan himpunan bagian tak kosong $3\mathbb{Z}$ yang merupakan himpunan semua bilangan bulat kelipatan dari 3, yaitu:

$$3\mathbb{Z} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Akan dibuktikan bahwa $3\mathbb{Z}$ adalah ideal dalam $\mathbb{Z}$.

(i) Diberikan sebarang $a = 3k$ dan $b = 3m$ dengan $k, m \in \mathbb{Z}$, berlaku:

$$a - b = 3k - 3m = 3(k - m) \in 3\mathbb{Z}.$$

(ii) Diberikan sebarang $x \in \mathbb{Z}$ dan $a = 3k \in 3\mathbb{Z}$, berlaku:

$$x \cdot a = x \cdot 3k = 3(x \cdot k) \in 3\mathbb{Z}.$$
$$a \cdot x = 3k \cdot x = 3(k \cdot x) \in 3\mathbb{Z}.$$

Berdasarkan (i) dan (ii), terbukti bahwa $3\mathbb{Z}$ merupakan ideal dari $\mathbb{Z}$.

Selanjutnya akan dijelaskan tentang homomorfisma ring. Secara umum konsep homomorfisma yaitu suatu pemetaan yang memepertahankan dua operasi biner.

Berikut diberikan definisi homomorfisma ring.

Definisi 2.2.9 Diberikan ring R dan R'. Suatu pemetaan $f : R \rightarrow R'$ disebut homomorfisma ring jika memenuhi:

1. $f(a + b) = f(a) + f(b)$,
2. $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$,

untuk setiap $a, b \in R$ (Alwi, 2021).

Suatu homomorfisma dari suatu ring ke dalam dirinya sendiri dinamakan endomorfisma ring (Alwi, 2021).

Berikut diberikan contoh homomorfisma ring yang sekaligus endomorfisma ring.

Contoh 2.2.10 Diberikan ring $M_2(\mathbb{Z})$ dan suatu pemetaan $\gamma : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z})$. Didefinisikan $\gamma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.
Akan ditunjukkan γ merupakan endomorfisma ring. Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Berlaku:

$$\begin{aligned}
\gamma(A+B) &= \gamma\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \gamma\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \\
&= \gamma(A) + \gamma(B).
\end{aligned}$$

Selain itu,

$$\begin{aligned}
\gamma(A \cdot B) &= \gamma\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \gamma\left(\begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + c_2d_1 & b_2c_1 + d_1d_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + c_2d_1 & b_2c_1 + d_1d_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \\
&= \gamma(A) \cdot \gamma(B).
\end{aligned}$$

Karena $\gamma(A+B) = \gamma(A)+\gamma(B)$ dan $\gamma(A \cdot B) = \gamma(A) \cdot \gamma(B)$, terbukti γ merupakan homomorfisma ring. Selanjutnya, karena domain dan kodomain dari γ merupakan ring $M_2(\mathbb{Z})$ yang sama, terbukti γ merupakan endomorfisma ring.

2.3 Ring Polinomial $R[x]$

Ring polinomial adalah salah satu struktur aljabar yang terdiri dari semua fungsi $f(x)$, dengan $f(x)$ disebut polinomial jika dapat dituliskan sebagai $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, dengan n merupakan bilangan bulat positif dan $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ merupakan koefisien fungsi $f(x)$, yaitu elemen dari suatu ring R, dan variabel x.

Berikut diberikan definisi ring polinomial.

Definisi 2.3.1 Diberikan ring R. Himpunan $R[x]$, dinotasikan sebagai semua himpunan barisan tak hingga $(a_0, a_1, a_2, ...)$, dengan $a_i \in R$, untuk setiap $i = 1, 2, 3, ...$ dan terdapat $n \in \mathbb{Z}^+$, sehingga untuk $k \geq n$ berlaku $a_k = 0$. Elemen-elemen $R[x]$ disebut polinomial atas ring.
Operasi penjumlahan dan perkalian pada $R[x]$ didefinisikan sebagai berikut:

$$+ : R[x] \times R[x] \to R[x]$$

$$(a_0, a_1, a_2, ...) + (b_0, b_1, b_2, ...) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ...)$$

$$\cdot : R[x] \times R[x] \to R[x]$$

$$(a_0, a_1, a_2, ...) \cdot (b_0, b_1, b_2, ...) = (c_0, c_1, c_2, ...),$$

dengan $c_j = \sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i}$ untuk $j = 0, 1, 2, ...$
Dengan dua operasi tersebut, $R[x]$ memenuhi aksioma ring dan selanjutnya disebut ring polinomial (Dummit & Foote, 2004).

Jika R adalah ring komutatif, maka $R[x]$ juga komutatif. Hal ini disebabkan oleh operasi perkalian dalam $R[x]$ didasarkan pada komutativitas dari koefisien-koefisien dalam R. Jika R memiliki elemen identitas 1_R, maka $R[x]$ juga memeliki elemen identitas, yang merupakan polinomial dengan koefisien konstanta 1_R dan suku-suku lainnya bernilai nol, karena elemen tersebut memenuhi sifat identitas dalam operasi perkalian di $R[x]$.

Berikut diberikan contoh ring polinomial.

Contoh 2.3.2 Diberikan ring polinomial $\mathbb{R}[x]$, yang merupakan himpunan semua polinomial dengan koefisien dari bilangan real dan variabel x. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{R}[x], +, \cdot \rangle$ adalah ring polinomial.

(i) Akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{R}[x], + \rangle$ merupakan grup komutatif. Diberikan sebarang $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$, yaitu:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \\ q(x) &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m, \\ r(x) &= c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k. \end{aligned}$$

1) Akan ditunjukkan $\mathbb{R}[x]$ tertutup terhadap operasi penjumlahan. Diberikan sebarang $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Berlaku:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots \in \mathbb{R}[x]. \end{aligned}$$

Karena penjumlahan sebarang dua polinomial di $\mathbb{R}[x]$ menghasilkan polinomial di $\mathbb{R}[x]$, terbukti bahwa $\mathbb{R}[x]$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.

2) Akan ditunjukkan operasi penjumlahan $+$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}[x]$. Diberikan sebarang $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$. Berlaku:

$$\begin{aligned} (p(x) + q(x)) + r(x) &= ((a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x^1 + \cdot\cdot) + c_0 x^0 + c_1 x^1 + \cdot\cdot \\ &= ((a_0 + b_0) + c_0)x^0 + ((a_1 + b_0) + c_1)x^1 + \cdots \\ &= (a_0 + (b_0 + c_0))x^0 + (a_1 + (b_1 + c_1))x^1 + \cdots \\ &= a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots ((b_0 + c_0)x^0 + (b_1 + c_1)x^1 + \cdots) \\ &= p(x) + (q(x) + r(x)). \end{aligned}$$

Karena $(p(x) + q(x)) + r(x) = p(x) + (q(x) + r(x))$, terbukti bahwa $+$ bersifat assosiatif di $\mathbb{R}[x]$.

3) Terdapat elemen identitas yaitu, $\pi(x) = 0x^0 + 0x^1 + \cdots, \forall x \in \mathbb{R}$, sehingga untuk setiap $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. Berlaku:

$$\pi(x) + p(x) = p(x) + \pi(x) = p(x).$$

Jadi, $\pi(x)$ merupakan elemen identitas terhadap $+$ di $\mathbb{R}[x]$.

4) Untuk setiap $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ dan $x \in \mathbb{R}$, terdapat $-p(x) \in \mathbb{R}[x]$, yaitu $-p(x) = -a_0 - a_1 x - \cdots - a_n x^n$. Berlaku:

$$p(x) + (-p(x)) = -p(x) + p(x) = 0 = \pi(x).$$

Jadi, setiap $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ memiliki invers terhadap $+$ di $\mathbb{R}[x]$.

5) Akan ditunjukkan operasi penjumlahan $+$ bersifat komutatif di $\mathbb{R}[x]$. Diberikan sebarang $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Berlaku:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x^1 + \cdots \\ &= (b_0 + a_0)x^0 + (b_1 + a_1)x^1 + \cdots \\ &= q(x) + p(x). \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $+$ bersifat komutatif di $\mathbb{R}[x]$.

Berdasarkan 1) sampai dengan 5) dapat disimpulkan bahwa $\langle \mathbb{R}[x], + \rangle$ merupakan grup komutatif.

(ii) Akan ditunjukkan operasi perkalian bersifat assosiatif di $\mathbb{R}[x]$. Diberikan sebarang $p(x)q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Berlaku:

$$(p(x) \cdot q(x)) \cdot r(x) = p(x) \cdot (q(x) \cdot r(x)).$$

Jadi $\cdot$ bersifat assosiatif di $\mathbb{R}[x]$.

(iii) Akan ditunjukkan operasi penjumlahan dan perkalian bersifat distributif kiri dan distributif kanan di $\mathbb{R}[x]$. Diberikan sebarang $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$. Berlaku:

$$p(x) \cdot (q(x) + r(x)) = (p(x) \cdot q(x)) + (p(x) + r(x)).$$

Selain itu,

$$(p(x) + q(x)) \cdot r(x) = (p(x) + r(x)) + (q(x) + r(x)).$$

Terbukti bahwa $\langle \mathbb{R}[x], +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

(iv) Selanjutnya karena $\mathbb{R}[x]$ tertutup terhadap operasi penjumlahan, dan operasi perkalian dua elemen di $\mathbb{R}[x]$ diberikan sebagai berikut. Diberikan sebarang $p(x)q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Berlaku:

$$p(x) \cdot q(x) = (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) \cdot (b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)$$
$$= (c_0 + c_1x + \cdots + c_{n+m}x^{n+m}) \in \mathbb{R}[x].$$

Dengan $c_j = \sum_{i=0}^{j} a_ib_{j-i}$, karena perkalian sebarang dua polinomial di $\mathbb{R}[x]$ menghasilkan polinomial di $\mathbb{R}[x]$, terbukti bahwa $\mathbb{R}[x]$ tertutup terhadap operasi perkalian.

Jadi, terbukti bahwa $\langle \mathbb{R}[x], +, \cdot \rangle$ merupakan ring polinomial.

2.4 Modul

Teori modul merupakan perluasan dari konsep ruang vektor. Konsep ini menjadi bagian penting dalam aljabar abstrak karena memungkinkan analisis struktur yang lebih umum dan kompleks.

Berikut diberikan pengertian modul kiri dan kanan. Terlebih dahulu akan dijelaskan mengenai modul kiri atas ring.

Definisi 2.4.1 Diberikan suatu himpunan tak kosong M dan suatu ring R. M disebut modul kiri atas ring R atau $M : R-$modul kiri jika memenuhi aksioma berikut:

(i) $\langle M, + \rangle$ merupakan grup komutatif,

(ii) didefinisikan pemetaan

$$\cdot : R \times M \to M$$
$$\cdot(r, m) \mapsto \cdot(r, m) = r \cdot m, \ \forall\, r \in R,\ m \in M$$

dan memenuhi:

a) $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$,

b) $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$,

c) $(r_1r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2m)$,

d) $1_R \cdot m = m$,

untuk setiap $r, r_1, r_2 \in R$, dan $m, m_1, m_2 \in M$ (Andari, 2015).

Berikut diberikan contoh modul kiri.

Contoh 2.4.2 Diberikan $\mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat. Diberikan $\mathbb{Z}[x]$ ring polinomial dengan koefisien bilangan bulat. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}[x]$ modul kiri atas ring $\mathbb{Z}$. Pertama akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}[x], + \rangle$ merupakan grup komutatif. Diberikan sebarang $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$, yaitu:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i, \\
g(x) &= b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{n} b_jx^j, \\
h(x) &= c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k.
\end{aligned}
$$

(i) Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}[x]$ tertutup terhadap operasi penjumlahan. Diberikan sebarang $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Berlaku:

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x^1 + \cdots \in \mathbb{Z}[x].$$

Karena penjumlahan sebarang dua polinomial di $\mathbb{Z}[x]$ menghasilkan polinomial di $\mathbb{Z}[x]$, terbukti bahwa $\mathbb{Z}[x]$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.

(ii) Akan ditunjukkan operasi penjumlahan $+$ bersifat assosiatif di $\mathbb{Z}[x]$. Diberikan sebarang $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Berlaku:

$$
\begin{aligned}
(f(x) + g(x)) + h(x) &= ((a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x^1 + \cdot\cdot) + c_0x^0 + c_1x^1 + \cdot\cdot \\
&= ((a_0 + b_0) + c_0)x^0 + ((a_1 + b_0) + c_1)x^1 + \cdots \\
&= (a_0 + (b_0 + c_0))x^0 + (a_1 + (b_1 + c_1))x^1 + \cdots \\
&= a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots ((b_0 + c_0)x^0 + (b_1 + c_1)x^1 + \cdots) \\
&= f(x) +)g(x) + h(x)).
\end{aligned}
$$

Karena $[f(x) + g(x)] + h(x) = f(x) + [g(x) + h(x)]$, terbukti bahwa operasi penjumlahan $+$ bersifat assosiatif di $\mathbb{Z}[x]$.

(iii) Terdapat elemen identitas yaitu, $\theta(x) = 0x^0 + 0x^1 + 0x^2 + \cdots, \forall x \in \mathbb{Z}$, sehingga untuk setiap $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Berlaku:

$$\theta(x) + f(x) = f(x) + \theta(x) = f(x).$$

Jadi, $\theta(x)$ merupakan elemen identitas terhadap $+$ di $\mathbb{Z}[x]$.

(iv) Untuk setiap $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ dan $x \in \mathbb{Z}$, terdapat $-f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, yaitu $-f(x) = -a_0 - a_1x - \cdots - a_nx^n$. Berlaku:

$$f(x) + (-f(x)) = -f(x) + f(x) = 0 = \theta(x).$$

Jadi, setiap $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ memiliki invers terhadap $+$ di $\mathbb{Z}[x]$.

(v) Akan ditunjukkan $+$ bersifat komutatif di $\mathbb{Z}[x]$. Diberikan sebarang $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Berlaku:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x^1 + \cdots \\ &= (b_0 + a_0)x^0 + (b_1 + a_1)x^1 + \cdots \\ &= g(x) + f(x). \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $+$ bersifat komutatif di $\mathbb{Z}[x]$.

Berdasarkan (i) sampai dengan (v) dapat disimpulkan bahwa $\langle \mathbb{Z}[x], + \rangle$ merupakan grup komutatif.

Selanjutnya didefinisikan pemetaan

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[x] &\to \mathbb{Z}[x] \\ \cdot(r, f(x)) &\mapsto r \cdot f(x), \forall r \in \mathbb{Z}, f(x) \in \mathbb{Z}[x]. \end{aligned}$$

(i) Diberikan sebarang $r \in \mathbb{Z}$ dan $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Berlaku:

$$\begin{aligned} r \cdot (f(x) + g(x)) &= r \cdot ((a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x^1 + \cdots) \\ &= r \cdot (a_0 + b_0) + r \cdot (a_1 + b_1)x^1 + \cdots \\ &= r \cdot a_0 + r \cdot b_0 + r \cdot a_1x^1 + r \cdot b_1x^1 + \cdots \\ &= (r \cdot a_0 + r \cdot a_1x^1 + \cdots) + (r \cdot b_0 + r \cdot b_1x^1 + \cdots) \\ &= r \cdot (a_0 + a_1x^1 + \cdots) + r \cdot (b_0 + b_1x^1 + \cdots) \\ &= r \cdot f(x) + r \cdot g(x). \end{aligned}$$

(ii) Diberikan sebarang $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ dan $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Berlaku

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2) \cdot f(x) &= (r_1 + r_2) \cdot (a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots) \\ &= (r_1 + r_2) \cdot a_0x^0 + (r_1 + r_2) \cdot a_1x^1 + \cdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (r_1 \cdot a_0x^0 + r_2 \cdot a_0x^0) + (r_1 \cdot a_1x^1 + r_2 \cdot a_1x^1) + \cdots \\
&= (r_1 \cdot a_0x^0 + r_1 \cdot a_1x^1 + \cdots) + (r_2 \cdot a_0x^0 + r_2 \cdot a_1x^1 + \cdots) \\
&= r_1 \cdot (a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots) + r_2 \cdot (a_0x^0 + a_1x_1 + \cdots) \\
&= r_1 \cdot f(x) + r_2 \cdot f(x).
\end{aligned}
$$

(iii) Diberikan sebarang $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ dan $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Berlaku:

$$
\begin{aligned}
(r_1r_2) \cdot f(x) &= (r_1r_2) \cdot (a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots) \\
&= (r_1r_2) \cdot a_0x^0 + (r_1r_2) \cdot a_1x^1 + \cdots \\
&= r_1 \cdot (r_2 \cdot a_0x^0) + r_1 \cdot (r_2 \cdot a_1x^1) + \cdots \\
&= r_1 \cdot (r_2 \cdot (a_0x^0) + r_2 \cdot (a_1x^1) + \cdots) \\
&= r_1 \cdot (r_2 \cdot (a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots)) \\
&= r_1 \cdot (r_2 \cdot f(x)).
\end{aligned}
$$

(iv) Pilih $1 \in \mathbb{Z}$ dan $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Berlaku:

$$
\begin{aligned}
1 \cdot f(x) &= 1 \cdot (a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots) \\
&= (a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots) \\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa $\mathbb{Z}[x]$ modul kiri atas ring $\mathbb{Z}$.

Berikut diberikan definisi modul kanan.

Definisi 2.4.3 Diberikan suatu himpunan tak kosong M dan suatu ring R. M disebut modul kanan atas ring R, atau $M : R-$modul kanan jika memenuhi aksioma berikut:

(i) $\langle M, + \rangle$ merupakan grup komutatif,

(ii) didefinisikan pemetaan

$$
\begin{aligned}
&\cdot : M \times R \to M \\
&\quad \cdot(m, r) \mapsto \cdot(m, r) = m \cdot r, \ \forall\, m \in M, \ r \in R
\end{aligned}
$$

dan memenuhi:

a) $(m_1 + m_2) \cdot r = m_1 \cdot r + m_2 \cdot r,$

b) $m \cdot (r_1 + r_2) = m \cdot r_1 + m \cdot r_2,$

c) $m \cdot (r_1 \cdot r_2) = (m \cdot r_1) \cdot r_2,$

d) $m \cdot 1_R = m,$

untuk setiap $r, r_1, r_2 \in R$, dan $m, m_1, m_2 \in M$ (Andari, 2015).

Berikut diberikan contoh modul kanan.

Contoh 2.4.4 Diberikan himpunan matriks berukuran 2×2 dengan entri-entri bilangan bulat $M_2(\mathbb{Z})$ dan ring $\mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan modul kanan atas ring $\mathbb{Z}$.
Pertama akan ditunjukkan $\langle M_2(\mathbb{Z}), + \rangle$ merupakan grup komutatif. Diberikan sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$, yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d, e, f, g, h, p, q, r, s \in \mathbb{Z}.$$

(i) Akan ditunjukkan $M_2(\mathbb{Z})$ tertutup terhadap operasi penjumlahan. Diberikan sebarang $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$. Berlaku:

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}).$$

Karena penjumlahan sebarang dua matriks berukuran 2×2 dengan entri-entri bilangan bulat menghasilkan matriks berukuran 2×2 dengan entri-entri bilangan bulat juga maka terbukti $M_2(\mathbb{Z})$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.

(ii) Akan ditunjukkan operasi penjumlahan $+$ bersifat assosiatif di $M_2(\mathbb{Z})$. Diberikan sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$. Berlaku:

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & q \\ r & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a+e)+p & (b+f)+q \\ (c+g)+r & (d+h)+s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a+(e+p) & b+(f+q) \\ c+(g+r) & d+(h+s) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e+p & f+q \\ g+r & h+s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \right) \\
&= A + (B + C).
\end{aligned}
$$

Karena $(A + B) + C = A + (B + C)$, terbukti bahwa operasi penjumlahan $+$ bersifat assosiatif di $M_2(\mathbb{Z})$.

(iii) Terdapat elemen identitas yaitu, $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, sehingga untuk setiap $A \in M_2(\mathbb{Z})$. Berlaku:

$$
A + O = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A.
$$

Jadi, O merupakan elemen identitas terhadap operasi penjumlahan $+$ di $M_2(\mathbb{Z})$.

(iv) Untuk setiap $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, terdapat $-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$. Berlaku:

$$
\begin{aligned}
A + (-A) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Jadi, untuk setiap $A \in M_2(\mathbb{Z})$ memiliki invers terhadap operasi penjumlahan $+$ di $M_2(\mathbb{Z})$.

(v) Akan ditunjukkan operasi penjumlahan $+$ bersifat komutatif di $M_2(\mathbb{Z})$. Diberikan sebarang $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$. Berlaku:

$$
A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
&= B + A.
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa operasi penjumlahan $+$ bersifat komutatif di $M_2(\mathbb{Z})$.

Berdasarkan (i) sampai (v) dapat disimpulkan bahwa $\langle M_2(\mathbb{Z}), +\rangle$ merupakan grup komutatif.
Selanjutnya didefinisikan pemetaan

$$
\begin{aligned}
\cdot : M_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} &\to M_2(\mathbb{Z}) \\
\cdot(A, r) &\mapsto A \cdot r, \forall A \in M_2(\mathbb{Z}), r \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

(i) Diberikan sebarang $r \in \mathbb{Z}$ dan $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$. Berlaku:

$$
\begin{aligned}
(A+B) \cdot r &= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \cdot r \\
&= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \cdot r \\
&= \begin{bmatrix} (a+e) \cdot r & (b+f) \cdot r \\ (c+g) \cdot r & (d+h) \cdot r \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a \cdot r + e \cdot r) & (b \cdot r + f \cdot r) \\ (c \cdot r + g \cdot r) & (d \cdot r + h \cdot r) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot r + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot r \\
&= A \cdot r + B \cdot r.
\end{aligned}
$$

(ii) Diberikan sebarang $r, s \in \mathbb{Z}$ dan $A \in M_2(\mathbb{Z})$. Berlaku:

$$
A \cdot (r+s) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (r+s)
$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot r + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot s$$
$$= A \cdot r + A \cdot s.$$

(iii) Diberikan sebarang $r, s \in \mathbb{Z}$ dan $A \in M_2(\mathbb{Z})$. Berlaku:

$$\begin{aligned} A \cdot (r \cdot s) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (r \cdot s) \\ &= \begin{bmatrix} a \cdot r \cdot s & b \cdot r \cdot s \\ c \cdot r \cdot s & d \cdot r \cdot s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a \cdot r & b \cdot r \\ c \cdot r & d \cdot r \end{bmatrix} \cdot s \\ &= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot r \right) \cdot s \\ &= (A \cdot r) \cdot s. \end{aligned}$$

(iv) Pilih $1 \in \mathbb{Z}$ dan $A \in M_2(\mathbb{Z})$. Berlaku:

$$A \cdot 1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A.$$

Oleh karena itu, terbukti bahwa $M_2(\mathbb{Z})$ modul kanan atas ring $\mathbb{Z}$.

Berikut diberikan contoh lain dari modul kanan.

Contoh 2.4.5 Diberikan $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid a, c \in \mathbb{Z} \right\}$. Akan ditunjukkan M merupakan modul atas dirinya sendiri.
Pertama akan ditunjukkan $\langle M, + \rangle$ merupakan grup komutatif. Diberikan sebarang $A, B, C \in M$, yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix},\ \forall\, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}.$$

(i) Akan ditunjukkan M tertutup terhadap operasi penjumlahan $+$. Diberikan sebarang $A, B \in M$. Berlaku:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ c_1 + c_2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}.$$

Karena penjumlahan sebarang dua matriks dengan entri-entri bilangan bulat menghasilkan matriks M dengan entri-entri bilangan bulat juga, sehingga terbukti M tertutup terhadap operasi penjumlahan $+$.

(ii) Akan ditunjukkan operasi penjumlahan $+$ bersifat asosiatif di M. Diberikan sebarang $A, B, C \in M$. Berlaku:

$$\begin{aligned}
(A + B) + C &= \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ c_1 + c_2 & 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_2 + a_3 & 0 \\ c_2 + c_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= A + (B + C).
\end{aligned}$$

Karena $(A + B) + C = A + (B + C)$, terbukti bahwa operasi penjumlahan $+$ bersifat asosiatif di M.

(iii) Terdapat elemen identitas yaitu, $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, sehingga untuk setiap $A \in M$. Berlaku:

$$A + O = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

Jadi, O merupakan elemen identitas terhadap operasi penjumlahan $+$ di M.

(iv) Untuk setiap $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \in M$ terdapat $-A = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 \\ -c_1 & 0 \end{bmatrix}$. Berlaku:

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_1 & 0 \\ -c_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jadi, untuk setiap $A \in M$ memiliki invers terhadap operasi penjumlahan $+$ di M.

(v) Akan ditunjukkan operasi penjumlahan $+$ bersifat komutatif di M. Diberikan sebarang $A, B \in M$. Berlaku:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ c_1 + c_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_2 + a_1 & 0 \\ c_2 + c_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= B + A. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa operasi penjumlahan $+$ bersifat komutatif di M.

Berdasarkan (i) sampai (v) dapat disimpulkan bahwa $\langle M, + \rangle$ merupakan grup komutatif.
Selanjutnya didefinisikan pemetaan

$$\begin{aligned} \cdot : M \times M &\to M \\ \cdot(A, B) &\mapsto A \cdot B, \ \forall\, A, B \in M. \end{aligned}$$

(i) Diberikan sebarang $A, B, C \in M$. Berlaku:

$$\begin{aligned} (A + B) \cdot C &= \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ c_1 + c_2 & 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a_1 + a_2) \cdot a_3 & 0 \\ (c_1 + c_2) \cdot a_3 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$
\begin{aligned}
A \cdot C + B \cdot C &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1a_3 & 0 \\ c_1a_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2a_3 & 0 \\ c_2a_3 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1a_3 + a_2a_3 & 0 \\ c_1a_3 + c_2a_3 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a_1 + a_2) \cdot a_3 & 0 \\ (c_1 + c_2) \cdot a_3 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Terbukti $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

(ii) Diberikan sebarang $A, B, C \in M$. Berlaku:

$$
\begin{aligned}
A \cdot (B + C) &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} a_2 + a_3 & 0 \\ c_2 + c_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} a_1 \cdot (a_2 + a_3) & 0 \\ c_1 \cdot (a_2 + a_3) & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Di sisi lain,

$$
\begin{aligned}
A \cdot B + A \cdot C &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_2 & 0 \\ c_1 \cdot a_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_3 & 0 \\ c_1 \cdot a_3 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3 & 0 \\ c_1 \cdot a_2 + c_1 \cdot a_3 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 \cdot (a_2 + a_3) & 0 \\ c_1 \cdot (a_2 + a_3) & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Terbukti $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

(iii) Diberikan sebarang $A, B, C \in M$. Berlaku:

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot C) &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 \cdot a_3 & 0 \\ c_2 \cdot a_3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 & 0 \\ c_1 \cdot a_2 \cdot a_3 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C &= \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ c_1 a_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 & 0 \\ c_1 \cdot a_2 \cdot a_3 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Terbukti $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

(iv) Pilih $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M$ dan $A \in M$. Berlaku:

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= A. \end{aligned}$$

Terbukti $A \cdot 1_R = A$.

Oleh karena itu, terbukti bahwa M merupakan modul kanan atas M itu sendiri.

Setelah membahas modul kiri dan modul kanan atas ring, serta aksioma-aksioma yang harus terpenuhi, berikut akan dijelaskan tentang homomorfisma modul. Secara umum homomorfisma modul menggunakan konsep yang sama dengan homomorfisma grup dan ring, namun pada modul ada pemetaan elemen ring yang kalikan dengan elemen modul, yang membedakan homomorfisma modul dengan homomorfisma grup dan ring yang sudah dijelaskan sebelumnya.

Definisi 2.4.6 Diberikan M, N modul atas ring R. Pemetaan $f : M \to N$ disebut homomorfisma modul atas ring R jika memenuhi:

(1) $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2),\ \forall m_1, m_2 \in M,$

(2) $f(am) = af(m),\ \forall a \in R$ dan $m \in M,$

(Adkins & Weintraub, 2012).

Jika $M = N$, maka pemetaan f disebut endomorfisma modul.

Berikut diberikan contoh homomorfisma modul yang sekaligus endomorfisma modul.

Contoh 2.4.7 Diberikan $R[x]$ modul atas ring R. Didefinisikan pemetaan $\psi : R[x] \to R[x]$ dengan $\psi(f(x)) = f'(x)$.
Akan ditunjukkan ψ merupakan homomorfisma modul. Diberikan sebarang $f(x), g(x) \in R[x]$ dan $r \in R$. Berlaku:

1. $\psi(f(x) + g(x)) = (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) = \psi(f(x)) + \psi(g(x)),$
2. $\psi(r \cdot f(x)) = (rf(x))' = rf'(x) = r\psi(f(x)).$

Jadi terbukti ψ merupakan homomorfisma modul. Selanjutnya, karena domain dan kodomain ψ merupakan modul $R[x]$ yang sama, terbukti bahwa ψ merupakan endomorfisma modul.

Berikut akan dibahas mengenai annihilator.

Definisi 2.4.8 Diberikan modul M atas ring R dengan elemen satuan.

(i) $r \in R$ disebut pengenol dari $m \in M$ jika $rm = 0_m$.

(ii) $r \in R$ disebut pengenol dari himpunan tak kosong $X \subseteq M$ jika $rx = 0_m$, untuk setiap $x \in X$.

Selanjutnya, himpunan semua pengenol dari $X \subseteq M$ disebut annihilator dari X dan dinotasikan dengan

$$Ann_R\{X\} = \{r \in R |\ rx = 0_m, \forall x \in X\}.$$

Sedangkan himpunan semua pengenol dari $m \in M$ dinotasikan dengan

$$Ann_R(m) = \{r \in R |\ rm = 0_m\},$$

(Adkins & Weintraub, 2012).

Berikut diberikan contoh annihilator.

Contoh 2.4.9 Diberikan modul $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ atas $\mathbb{Z}$. Modul $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ merupakan modul faktor dari $\mathbb{Z}$. Annihilator $X = \{2 + 8\mathbb{Z}, 6 + 8\mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ adalah...

$$\begin{aligned} Ann_{\mathbb{Z}}(X) &= \{r \in \mathbb{Z} |\ r(2 + 8\mathbb{Z}) = 0 + 8\mathbb{Z} \text{ dan } r(6 + 8\mathbb{Z}) = 0 + 8\mathbb{Z}\} \\ &= \{r \in \mathbb{Z} |\ 2r + 8\mathbb{Z} = 0 + 8\mathbb{Z} \text{ dan } 6r + 8\mathbb{Z} = 0 + 8\mathbb{Z}\} \\ &= \{r \in \mathbb{Z} |\ 2r \in 8\mathbb{Z} \text{ dan } 6r \in 8\mathbb{Z}\} \\ &= \{r \in \mathbb{Z} |\ 2r = 8k \text{ dan } 6r = 8l, \text{untuk } k, l \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{r \in \mathbb{Z} |\ r = 4k, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= 4\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Kemudian akan dijelaskan tentang *direct sum*.

Definisi 2.4.10 Misalkan $R_1, R_2, ..., R_n$ adalah kumpulan ring dan R adalah hasil kali kartesian pada himpunan R_i, dan didefinisikan operasi pada R "secara komponen", yaitu:

(i) $(r_1, r_2, ..., r_n) + (s_1, s_2, ..., s_n) = (r_1 + s_1, r_2 + s_2, ..., r_n + s_n)$.

(ii) $-(r_1, r_2, ..., r_n) = (-r_1, -r_2, ..., -r_n)$.

(iii) $(r_1, r_2, ..., r_n)(s_1, s_2, ..., s_n) = (r_1 s_1, r_2 s_2, ..., r_n s_n)$.

Dengan $(0, 0, ..., 0)$ sebagai elemen nol atau identitas. R disebut jumlahan langsung eksternal dari $R_1, R_n, ..., R_n$ dan dinotasikan sebagai:

$$\bigoplus_{i=1}^{n} R_i = R_1 \bigoplus R_2 \bigoplus ... \bigoplus R_n,$$

(Side, 2021).

2.5 Modul Polinomial $M[x]$

Modul polinomial adalah salah satu struktur aljabar yang terdiri dari semua fungsi $m(x)$, dengan $m(x)$ disebut polinomial jika dapat dituliskan sebagai $m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, dengan n merupakan bilangan bulat positif dan $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ merupakan koefisien fungsi $m(x)$, yaitu elemen-elemen dari suatu modul M, dan variabel x.

Berikut diberikan definisi modul polinomial.

Definisi 2.5.1 Diberikan M modul kanan atas ring R. Diberikan $R[x]$ ring polinomial dan didefinisikan

$$M[x] = \left\{ \sum_{j=0}^{l} m_jx^i \mid l \in \mathbb{Z}^+, m_j \in M \right\}.$$

Kemudian untuk $\sum_{i=0}^{k} r_ix^i \in R[x]$ dan $\sum_{j=0}^{l} m_jx^j \in M[x]$ perkalian skalar didefinisikan sebagai berikut:

$$\left(\sum_{j=0}^{l} m_jx^j \right) \left(\sum_{i=0}^{k} r_ix^i \right) = \left(\sum_{\mu=0}^{k+l} c_\mu x^\mu \right),$$

dengan $c_\mu = \sum_{i+j=\mu} m_jr_i$. Dengan operasi ini, $M[x]$ disebut modul polinomial atas ring polinomial $R[x]$ (Fitriani dkk., 2025).

Berikut diberikan contoh modul polinomial atas ring polinomial.

Contoh 2.5.2 Diberikan $\mathbb{Z}[x]$ ring polinomial dengan koefisien bilangan bulat. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}[x]$ modul polinomial atas ring polinomial $\mathbb{Z}[x]$. Pertama akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}[x], + \rangle$ merupakan grup komutatif. Diberikan sebarang $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$, yaitu

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i,$$

$$g(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{n} b_jx^j,$$

$$h(x) = c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k.$$

berdasarkan Contoh 2.4.2 terbukti bahwa $\langle \mathbb{Z}[x], + \rangle$ merupakan grup komutatif. Selanjutnya diberikan pemetaan

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{Z}[x] \times \mathbb{Z}[x] &\to \mathbb{Z}[x] \\ \cdot(f(x), g(x)) &\mapsto f(x)g(x), \ \forall\, f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x], \end{aligned}$$

yang memenuhi:

1. $f(x) \cdot (g(x) + h(x)) = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x)$,
2. $(f(x) + g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h(x)$,
3. $(f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x))$,
4. $1 \cdot f(x) = f(x)$.

Terbukti bahwa $\mathbb{Z}[x]$ modul polinomial atas ring polinomial $\mathbb{Z}[x]$.

2.6 Derivasi

Derivasi merupakan generalisasi dari konsep turunan dalam kalkulus ke dalam konteks aljabar abstrak. Dalam teori ring, derivasi adalah suatu pemetaan yang menggambarkan perubahan elemen-elemen dalam ring, yang mengikuti sifat-sifat tertentu seperti linearitas dan aturan Leibniz.

Berikut diberikan definisi derivasi.

Definisi 2.6.1 Diberikan ring R. Pemetaan $d : R \to R$ disebut derivasi jika memenuhi sifat berikut:

(i) $d(x + y) = d(x) + d(y)$, untuk setiap $x, y \in R$;

(ii) $d(xy) = d(x)y + xd(y)$, untuk setiap $x, y \in R$,

(Ali dkk., 2024).

Berikut diberikan contoh derivasi pada suatu ring.

Contoh 2.6.2 Diberikan ring $M_2(\mathbb{Z})$. Akan ditunjukkan fungsi d merupakan derivasi dan didefinisikan sebagai:

$$d \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}.$$

Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Berlaku:

$$\begin{aligned} d(A+B) &= d\left(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(b+f) \\ c+g & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -f \\ g & 0 \end{bmatrix} \\ &= d(A) + d(B). \end{aligned}$$

Jadi, $d(A+B) = d(A) + d(B)$, untuk setiap $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$.

$$\begin{aligned} d(AB) &= d\left(\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(af+bh) \\ ce+dg & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} d(A)B + Ad(B) &= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -f \\ g & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -bg & -bh \\ ce & cf \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bg & -af \\ dg & -cf \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(bh+af) \\ ce+dg & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(af+bh) \\ ce+dg & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jadi, $d(AB) = d(A)B + ad(B)$, untuk setiap $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$.
Dengan demikian, terbukti bahwa d derivasi di ring $M_2(\mathbb{Z})$.

2.7 Derivasi-(α, β)

Derivasi-(α, β) adalah konsep dalam aljabar abstrak yang memperluas ide derivasi biasa dengan menerapkan aturan endomorfisma.

Berikut diberikan definisi dari derivasi-(α, β).

Definisi 2.7.1 Diberikan ring R. Didefinisikan suatu pemetaan $d : R \to R$ dan dua endomorfisma $(\alpha, \beta) : R \to R$, disebut derivasi-$(\alpha, \beta)$ jika memenuhi:

$$d(xy) = d(x)\alpha(y) + \beta(x)d(y),$$

untuk setiap $x, y \in R$ (Ali dkk., 2024).

Berikut diberikan contoh derivasi-(α, β).

Contoh 2.7.2 Diberikan ring $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Didefinisikan suatu pemetaan $d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan dua endomorfisma $\alpha\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\beta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dengan $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$.

Akan ditunjukkan d merupakan derivasi-(α, β).

Selanjutnya akan ditunjukkan : $d(AB) = d(A)\alpha(B) + \beta(A)d(B)$

$$\begin{aligned} d(AB) &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -a_1a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
d(A)\alpha(B)+\beta(A)d(B) &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\alpha\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&\quad + \beta\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) d\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a_1a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -a_1a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Karena $d(AB) = d(A)\alpha(B) + \beta(A)d(B)$, maka d merupakan derivasi-(α, β).

Berikut diberikan contoh lain dari derivasi-(α, β).

Contoh 2.7.3 Diberikan ring $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Didefinisikan suatu pemetaan $d(x, y) = (0, x)$ dan dua endomorfisma $\alpha(x, y) = (x, 0)$, $\beta(x, y) = (y, x)$. Akan ditunjukkan d merupakan derivasi-(α, β) dengan $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2)$.
Selanjutnya akan ditunjukkan,

$$d((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = d(x_1, y_1)\alpha(x_2, y_2) + \beta(x_1, y_1)d(x_2, y_2)$$

$$\begin{aligned}
d((x_1, y_1)(x_2, y_2)) &= d(x_1x_2, y_1y_2) \\
&= (0, x_1x_2).
\end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
d(x_1, y_1)\alpha(x_2, y_2) + \beta(x_1, y_1)d(x_2, y_2) &= (0, x_1)(x_2, 0) + (y_1, x_1)(0, x_2) \\
&= (0, 0) + (0, x_1x_2) \\
&= (0, x_1x_2).
\end{aligned}$$

Karena $d((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = d(x_1, y_1)\alpha(x_2, y_2) + \beta(x_1, y_1)d(x_2, y_2)$, maka d merupakan derivasi-(α, β).

2.8 Derivasi pada Modul M atas Ring R

Derivasi pada modul merupakan perluasan dari konsep derivasi pada ring. Secara umum, derivasi pada modul M atas ring R bertujuan untuk mempelajari bagaimana operator diferensial dapat diterapkan pada struktur modul yang memiliki aksi skalar dari ring. Meskipun pembahasan formal mengenai derivasi pada modul masih terbatas, beberapa penelitian sebelumnya telah mengembangkan konsep ini, salah satunya yaitu derivasi-f pada modul polinomial yang mengkaji bagaimana sifat-sifat derivasi dapat berinteraksi dengan struktur modul.

Berikut diberikan definisi derivasi-f.

Definisi 2.8.1 Diberikan modul kanan M, N atas ring R.

(i) Pemetaan aditif $\delta : R \to R$ disebut derivasi pada jika memenuhi $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ untuk setiap $a, b \in R$.

(ii) Jika δ derivasi pada R dan $f : M \to N$ pemetaan yang linear terhadap aksi skalar dari ring R, maka pemetaan linear $d : M \to N$ disebut derivasi-f jika memenuhi $d(xa) = d(x)a + f(x)\delta(a)$ untuk setiap $x \in M$ dan $a \in R$.

(Fitriani dkk., 2025).

Berikut diberikan contoh derivasi-f.

Contoh 2.8.2 Diberikan $\mathbb{Z}$ modul atas $\mathbb{Z}$. Diberikan δ derivasi pada ring dengan pemetaan $\delta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dan $\delta(r) = 0$ untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$. Didefinisikan suatu pemetaan $d : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $d(m) = m$ untuk setiap $m \in \mathbb{Z}$. Serta endomorfisma $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(m) = 2m$ untuk setiap $m \in \mathbb{Z}$.

Akan ditunjukkan d merupakan derivasi-f. Diberikan sebarang $m, r \in \mathbb{Z}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan: $d(mr) = d(m)r + f(m)\delta(r)$. Berlaku:

$$d(mr) = mr.$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} d(m)r + f(m)\delta(r) &= (m)r + (2m)(0) \\ &= mr. \end{aligned}$$

Karena $d(mr) = d(m)r + f(m)\delta(r)$, maka d merupakan derivasi-f.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

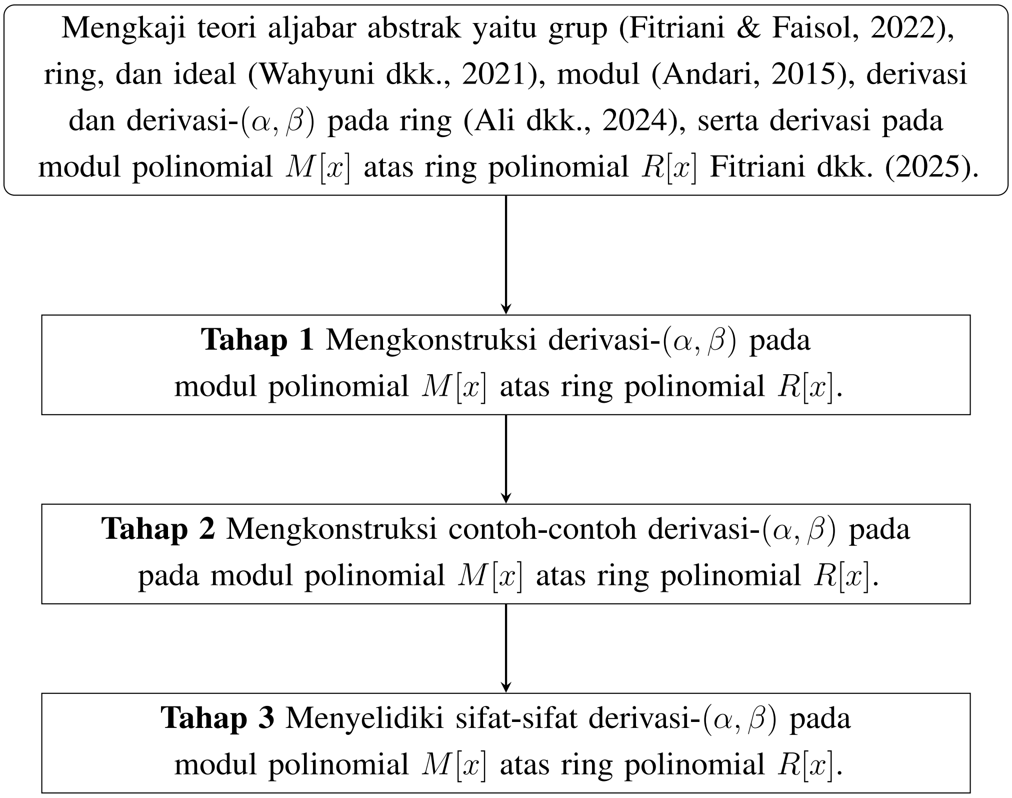
Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 di jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamat di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan penulis adalah studi literatur, yang diperoleh dari mengumpulkan dan mengolah bahan penelitian berdasarkan referensi terkait seperti jurnal, buku, dan artikel yang berkaitan dengan penelitian ini serta mengkaji definisi dan teorema yang berhubungan dengan permasalahan penelitian ini. Secara umum langkah-langkah penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mempelajari materi terkait derivasi pada modul polinomial $M[x]$ atas ring polinomial $R[x]$.
2. Mengkonstruksi derivasi-(α, β) pada modul polinomial $M[x]$ atas ring polinomial $R[x]$.
3. Menyelidiki sifat-sifat derivasi-(α, β) pada modul polinomial $M[x]$ atas ring polinomial $R[x]$.
4. Memberikan contoh ilustrasi dari sifat-sifat derivasi-(α, β) pada modul polinomial $M[x]$ atas ring polinomial $R[x]$.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan di dalam penelitian ini dapat dilihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Langkah-langkah Penelitian

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah diperoleh, dapat disimpulkan bahwa untuk setiap derivasi-(α, β) pada modul M atas ring R dengan α endomorfisma di R dan β endomorfisma di M, terdapat derivasi-$(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ pada modul polinomial $M[x]$ atas ring polinomial $R[x]$ dengan $\hat{\alpha}$ endomorfisma di $R[x]$ dan $\hat{\beta}$ endomorfisma di $M[x]$. Dari penelitian ini juga dapat ditunjukkan bahwa derivasi merupakan kasus khusus dari derivasi-(α, β) dengan α dan β pemetaan identitas.

Penelitian ini juga mengkaji sifat-sifat derivasi-(α, β) pada modul atas ring, khususnya berkaitan dengan operasi aljabar seperti, kombinasi linier, penjumlahan, dan penjumlahan langsung (*direct sum*). Kombinasi linier dan penjumlahan menunjukkan bahwa jika d_1 dan d_2 merupakan derivasi-(α, β) pada modul atas ring yang sama, maka kombinasi linier dan penjumlahan dari keduanya juga tetap merupakan derivasi-(α, β). Hal serupa yang terjadi pada operasi penjumlahan langsung, dimana untuk setiap komponen yang dipetakan secara komponen-*wise* melalui *direct sum* merupakan derivasi-(α, β) pada modul atas ring. Dari penelitian ini dapat disimpulkan bahwa derivasi-(α, β) tetap mempertahankan struktur aljabar seperti pada kombinasi linier, penjumlahan, dan penjumlahan langsung (*direct sum*).

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, belum dilakukan pengkajian sifat komposisi pada derivasi-(α, β) pada modul atas ring. Oleh karena itu, disarankan untuk mengkaji sifat komposisi dan sifat-sifat aljabar yang lain sehingga tetap memenuhi syarat sebagai derivasi-(α, β).

DAFTAR PUSTAKA

Abbaspour, G., Moslehian, M. S., & Niknam, A. 2005. Generalized Derivations on Modules. *arXiv preprint math/0503618*.

Adkins, W. A., & Weintraub, S. H. 2012. *Algebra: an approach via module theory (Vol. 136)*. Springer Science & Business Media.

Al-Omary, R. M., & Nauman, S. K. 2021. Generalized Derivations on Prime Rings Satisfying Certain Identities. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 36(2), 229-238.

Ali, S., Rafiquee, N. N., & Varshney, V. 2024. Certain Types of Derivations in Rings: A Survey. *Journal Indonesia Mathematics Society*, 30(2), 256-306.

Alwi, W. 2021. *Struktur Aljabar - Teori Ring*. Jawa Barat: Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia.

Andari, A. 2015. *Pengantar Teori Modul*. Universitas Brawijaya Press.

Archibald, T., Fraser, C., & Grattan-Guinness, I. 2005. The History of Differential Equations, 1670-1950. *Oberwolfach reports*, 1(4), 2729-2794.

Argac, N., Kaya, A., & Kisir, A. 1987. (σ, τ)-Derivations in Prime Rings. *Mathematical Journal of Okayama University*, 29(1), 173-177.

Artin, M. 2011. *Algebra 2^{nd} Edition*. Boston, MA: Pearson Education.

Ashraf, M., Ali, S., & Haetinger, C. 2006. On Derivations in Rings and Their Applications. *Aligarh Bull. Math*, 25(2), 79-107.

Aydin, N. 1997. Notes on (α, β)-Derivarions. *International Journal Mathematics and Mathematics Science*, 20(4), 813-816.

Chiu, C., & Macarro, L. N. 2023. Higher Derivations of Modules and The Hasse–Schmidt Module. *Michigan Mathematical Journal*, 73(3), 473-487.

De Filippis, V., Tiwari, S. K., & Singh, S. K. 2023. Generalized g-Derivations on Prime Rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, 22(02), 2350037.

Dummit, D. S., & Foote, R. M. 2004. *Abstract Algebra* 3^{rd} *Edition*. Hoboken, NJ: Wiley.

Ernanto, I. 2018. Sifat-sifat Ring Faktor yang Dilengkapi Derivasi. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 1(1), 12-21.

Fitriani & Faisol, A. 2022. *Grup*. Matematika, Yogyakarta, 132 hlm.

Fitriani, Wijayanti, I. E., Faisol, A., & Ali, S. 2025. On f-Derivations on Polynomial Modules. *Journal of Algebra and its Applications*, 24(06), 2550155.

Garg, C., & Sharma, R. K. 2016. Multiplicative (Generalized)-(α, β)-Derivations in Prime and Semiprime Rings. *International Journal of Applied Physics and Mathematics*, 6(2), 66.

Golan, J. S. 2021. *The Theory of Rings (2nd ed.)*. Springer, Berlin.

Grønbæk, N. 1989. Commutative Banach Algebras, Module Derivations, and Semigroups. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(1), 137-157.

Hejazian, S., & Niknam, A. 1996. Modules, Annihilators and Module Derivations of JB*-algebras. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 27.

Herstein, I. N. 1978. A note on Derivations. *Canadian Mathematical Bulletin*, 21(3), 369-370.

Hongan, M. 2017. Remarks on generalized (α, β)-derivations in semiprime rings. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 32(3), 535-542.

Khalaf, A. A., Artemovych, O. D., & Taha, I. 2018. Derivations in Differentially Prime Rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, 17(07), 1850129.

Kuzucuoğlu, F., & Sayın, U. 2017. Derivations of Some Classes of Matrix Rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, 16(02), 1750027.

Muthana, N., & Alkhamisi, Z. 2020. On Centrally-Extended Multiplicative (Generalized)-(α, β)-Derivations in Semiprime Rings. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 49(2), 578-585.

Posner, E. C. 1957. Derivations in Prime Rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 8(6), 1093-1100.

Rasiman, Rubowo, M. R., & Pramasdyahsari, A. S. 2018. *Teori Ring*. Semarang: Univ PGRI Semarang Press.

Roman, S. 2008. *Advance Linier Algebra, Third Edition*. Newyork: Springer Science $+$ Bussines Media.

Side, S., Abdy, M., & Uniarti, A. 2021. Jumlahan Langsung pada Ring. *JmathCos(Journal of Mathematics, Computations, and Statistics)*, 4, 39-46.

Suryanti, S. 2017. *Teori Grup (Struktur Aljabar 1)*. Universitas Muhammadiyah, Gresik Sub-CPMK (Kemampuan akhir yang direncanakan) Bahan Kajian.

Syaharani, N. A., Fitriani, Chasanah, S. L., & Faisol, A. 2026. $(\alpha', \beta')-$Derivation on the Polynomial Ring $\mathcal{K}[x]$. *Journal of the Indonesian Algebra Society*, 1(1), 17-29.

Teymouri, A., Bodaghi, A., & Bagha, D. E. 2021. Derivations on The Module Extension Banach Algebras. *Ukrainian Mathematical Journal*, 73, 661-673.

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. 2021. *Teori ring dan Modul*. UGM PRESS.

Waluyo, R., Faisol, A., & Fitriani, F. 2025. (σ, τ)-derivasi pada Ring Grup. *Euler: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, 13(2), 142-146.