HOMODERIVASI PADA RING SEMIGRUP

Tesis

Oleh

THOMAS JULIANSYAH
NPM. 2427031002

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

ABSTRACT

HOMODERIVATION ON SEMIGROUP RINGS

By

Thomas Juliansyah

Given a ring R . An additive mapping $\delta : R \to R$ is called a homoderivation if δ satisfies $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b) + \delta(a)\delta(b)$, for every $a, b \in R$. In this study, homoderivations on R are applied to the semigroup ring $R[S]$ to investigate their properties. This research begins by constructing homoderivations on the semigroup ring $R[S]$, investigating the connection between homoderivations on R and homoderivations on $R[S]$, and is followed by an investigate of their specific properties within the algebraic structure. Additionally, illustrative examples are presented to support the theories and theorems obtained. The concept of homoderivations expands our understanding of algebraic structures through its application to semigroup rings.

Keywords: semigroup rings, derivation, homoderivation.

ABSTRAK

HOMODERIVASI PADA RING SEMIGRUP

Oleh

Thomas Juliansyah

Diberikan ring R. Suatu pemetaan aditif $\delta : R \to R$ disebut homoderivasi jika δ memenuhi $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b) + \delta(a)\delta(b)$, untuk setiap $a, b \in R$. Dalam penelitian ini, homoderivasi pada R diterapkan pada ring semigrup $R[S]$ untuk menyelidiki sifat-sifatnya. Penelitian ini dimulai dengan mengkonstruksi homoderivasi pada ring semigrup $R[S]$, menyelidiki kaitan antara homoderivasi pada R dan homoderivasi pada $R[S]$ serta diikuti dengan menyelidiki sifat-sifat khususnya dalam struktur aljabar. Selain itu, diberikan contoh ilustrasi untuk mendukung teori dan teorema yang diperoleh. Konsep homoderivasi memperluas pemahaman tentang struktur aljabar melalui penerapannya pada ring semigrup.

Kata-kata kunci: ring semigrup, derivasi, homoderivasi

HOMODERIVASI PADA RING SEMIGRUP

THOMAS JULIANSYAH

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
MAGISTER MATEMATIKA

Pada

Program Studi Magister Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

Judul Tesis	:	**HOMODERIVASI PADA RING SEMIGRUP**
Nama Mahasiswa	:	*Thomas Juliansyah*
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2427031002**
Program Studi	:	**Magister Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**
NIP. 198406272006042001	NIP. 198002062003121003

2. Ketua Program Studi Magister Matematika

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP. 198406272006042001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	:	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Sekretaris	:	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**	....
	:	**Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

3. Direktur Program Pascasarjana

Prof. Dr. Ir. Murhadi, M.Si.
NIP. 196403261989021001

4. Tanggal Lulus Ujian Tesis: **22 April 2026**

PERNYATAAN TESIS MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Thomas Juliansyah**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2427031002**
Program Studi	:	**Magister Matematika**
Judul Tesis	:	**Homoderivasi pada Ring Semigrup**

Dengan ini menyatakan bahwa tesis ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa tesis ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 22 April 2026

Penulis,

Thomas Juliansyah

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Thomas Juliansyah lahir di Negarabatin pada tanggal 3 Juli 1992, sebagai anak pertama dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Maulid Latif dan Ibu Sarmanah.

Penulis menempuh pendidikan sekolah dasar di Madrasah Ibtidaiyah Nahdlatul Ulama (MI NU) Negarabatin pada tahun 1998-2004, kemudian melanjutkan pendidikan menengah pertama di MTs Negeri 1 Kota Agung pada tahun 2004-2007 dan melanjutkan pendidikan menengah atas di SMA Negeri 1 Kota Agung pada tahun 2007-2010.

Pada tanggal 25 Agustus tahun 2015, Penulis menyelesaikan Program Studi S1 Pendidikan Matematika di STKIP Muhammadiyah Pringsewu Lampung.

Pada tanggal 19 Agustus 2024, Penulis melanjutkan Pendidikan Magister di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Penulis bekerja sebagai guru bidang studi matematika di SMA Negeri 13 Bandar Lampung sampai dengan saat ini.

KATA INSPIRASI

“Jadikanlah sabar dan shalat sebagai penolongmu. Dan sesungguhnya yang demikian itu sungguh berat, kecuali bagi orang-orang yang khusyuk” (QS. Al-Baqarah [2]: 45).

”Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan.”
(Al-insyirah [94]: 5-6)

”Orang yang mampu bertahan adalah orang yang paling mampu beradaptasi dengan perubahan.”
(Thomas Juliansyah)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga tesis ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Istri dan Anakku

Dengan penuh rasa syukur, tesis ini kupersembahkan kepada istriku tercinta yang senantiasa setia mendampingi serta memberikan doa, dukungan, dan ketulusan tanpa henti. Kepada anakku tersayang yang menjadi sumber semangat, harapan, dan inspirasi dalam setiap langkahku. Terima kasih atas cinta dan pengorbanan yang tak ternilai hingga tesis ini dapat terselesaikan.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini yang berjudul ”Homoderivasi pada Ring Semigrup” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan tesis ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga tesis ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Orang tua tercinta (Bak Maulid dan Emak Sarmanah) atas doa tulus dan kasih sayangnya, kepada Istri tersayang (Restu Dwi Ariani) atas dukungan dan kesetiaannya, kepada anakku tercinta (Banyu Nadhif Assyauqie) yang menjadi sumber semangat, harapan dan inspirasi dan kepada Adik-adikku (Husnul Khotami dan Linda Puspa A) serta Ibu mertua (Eyang) yang selalu tulus mendoakan. Semoga tesis ini menjadi bentuk kecil dari bakti dan ungkapan terima kasih saya kepada keluarga tercinta.

2. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc., selaku Pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tesis ini.

3. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc., selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tesis ini.

4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Penguji I yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.

5. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si., selaku Penguji II yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
6. Ibu Dr. Fitriani S.Si., M.Sc., selaku Koordinator Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Ibu Dr.Khoirin Nisa, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing akademik.
9. Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
10. Prof. Dr. Ir. Murhadi, M.Si., selaku Direktur Pascasarjana Universitas Lampung.
11. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
12. Keluarga besar SMAN 13 Bandar Lampung yang telah memberi dukungan selama ini.
13. Teman-teman Magister Matematika angkatan 2024.

Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa tesis ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan tesis ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 22 April 2026

Thomas Juliansyah

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Konsep derivasi dalam kalkulus memiliki peranan penting dalam perkembangan matematika sampai di era modern saat ini. Konsep derivasi dalam kalkulus pertama kali diperkenalkan pada abad ke-17 oleh Isaac Newton yang mempelajari tentang gerak dan perubahan yang disebut sebagai *fluxion* dan menulis tentang turunan sebagai kecepatan perubahan. Sementara Gottfried Wilhelm Leibniz memunculkan notasi $\frac{dy}{dx}$ sebagai notasi turunan atau diferensial yang sering digunakan sampai saat ini. Lalu pada abad ke 18-19 Leonhard Euler dan Joseph-Louis Lagrange memperluas aplikasi turunan pada mekanika dan analisis, tidak hanya itu Augustin-Louis Cauchy memperkenalkan definisi limit sebagai turunan kemudian dikembangkan oleh Karl Weierstrass sebagai penyempurnaan definisi limit yang ketat yang mengubah cara pandang dari metode intuitif menjadi ilmu yang tepat, ketat dan logis.

Selanjutnya pada abad ke-20 konsep derivasi diperluas dalam berbagai arah, salah satunya pada aljabar abstrak khususnya pada struktur aljabar yang didalamnya terdapat ring. Ring adalah suatu himpunan yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian. Dalam struktur aljabar, derivasi didefinisikan sebagai suatu pemetaan yang berlaku pada elemen-elemen dari ring dengan aturan yang mirip dengan aturan turunan dalam kalkulus. Sejalan dari itu, Jacobson (1956) menyatakan bahwa derivasi pada ring R adalah suatu fungsi $d : R \to R$ yang memenuhi dua sifat utama yaitu aturan linearitas dan aturan leibniz. Lebih lanjut Felzenszwalb dan Lanski (1983) menyatakan bahwa d adalah derivasi dari ring R jika bersifat aditif dan memenuhi aturan Leibniz.

Berbagai penelitian yang mengkaji konsep derivasi pada ring diantaranya Jensen (1995) yang membahas tentang derivasi nilpoten dalam sebuah ring prima tanpa batasan karakteristik dan menggeneralisasikan secara umum, Chung dan Kobayashi (1985) membahas sifat-sifat khusus dari derivasi nil dan bagaimana pengaruhnya terhadap struktur ideal dalam ring prima, Chuang dan Lee (2005) menganalisis secara terperinci tentang derivasi nilpoten dari ring-ring semiprima dan hasilnya dapat digeneralisisasi. Ernanto (2018) mengkaji sifat-sifat ring faktor yang dilengkapi dengan derivasi, Ashraf dkk.(2006) mengeksplolasi derivasi pada ring dan aplikasinya, Kaygorodov dan Popov (2014) membahas tentang aljabar alternatif yang mengizinkan derivasi dengan nilai yang *invertible* dan derivasi yang *invertible*. Selain itu, Filippis (2021) menjelaskan struktur dari ring prima R dengan derivasi g yang memenuhi identitas aljabar tertentu, Fitriani dkk. (2023) yang membahas derivasi-f pada modul polinomial dan mengaplikasikannnya pada ring semigrup. Selanjutnya, penelitian yang terbaru oleh Ali dkk.(2024) yang memberikan tinjauan yang komprehensif tentang berbagai jenis derivasi dalam ring.

Selanjutnya, berikut adalah penelitian yang mengkaji jenis derivasi pada suatu ring. Sayın dan Kuzucuoglu (2019) membahas derivasi Jordan dari subring khusus ring matriks, Leerawat dan Khun-in (2021) mengkaji karakterisasi *trace* dari simetris Bi-derivations pada ring, Kayiz dan Ozbal (2016) memperkenalkan konsep Bi-derivasi simetris dua arah dari sebuah aljabar-B dan menyelidiki sifat-sifatnya, Kuzucuoglu (2011) membahas tentang derivasi Jordan pada ring matriks segitiga, Ghosseiri (2007) yang membahas derivasi Jordan dari beberapa kelas ring matriks, Asahraf dkk. (2010) mengkaji tentang ideal Lie dan derivasi Jordan umum (θ, ϕ) dalam ring, Hvala (2007) yang mendefinisikan dan membuktikan derivasi Lie pada ring prima, Bergen dan Grzeszczuk (2012) menyelidiki kapan akar nol dan akar prima dari suatu aljabar tetap stabil terhadap derivasi Skew, Melaibari dkk. (2016) membahas mengenai homoderivasi pada ring dan hasil-hasil yang berkaitan dengan komutativitas ring dengan kondisi tertentu, Engin dan Aydin (2023) membahas homoderivasi pada ring prima. Lebih lanjut, penelitian yang terbaru Waluyo dkk. (2025) (σ, τ)- derivasi pada ring grup dan menelusuri sifat-sifatnya.

Salah satu jenis derivasi yang akan menjadi fokus dalam penelitian ini adalah homoderivasi. Pada tahun 2000, El Sofy memberikan konsep menarik mengenai penggabungan konsep homomorfisma dan derivasi yang diberi nama homoderivasi. Pada pemetaan homoderivasi, aturan Leibniz dikombinasikan dengan sifat perkalian pada homomorfisma pada ring didefinisikan sebagai $h(ab) = h(a)b + ah(b) + h(a)h(b)$ untuk setiap $a, b \in R$ (Ali dkk., 2024). Dalam konteks ring salah satu contoh ring yang sudah terkenal adalah ring polinomial $R[X]$ (Hungerford, 1980). Selanjutnya, Gilmer (1984) memperluas ring polinomial $R[X]$ dengan menggeneralisasi semigrup $\mathbb{N} \cup \{0\}$ menjadi sebarang ring semigrup S. Ring ini selanjutnya disebut ring semigrup dan dinotasikan sebagai $R[S]$.

Penelitian ini mengkaji homoderivasi pada ring semigrup $R[S]$ sebagai upaya untuk memperluas konsep homoderivasi yang telah dikenal pada ring R. Kajian ini menarik karena menggabungkan dua bentuk generalisasi dalam teori aljabar, yaitu generalisasi derivasi melalui homoderivasi dan perluasan struktur ring melalui semigrup. Penelitian ini bertujuan untuk menyelidiki hubungan antara homoderivasi pada R dan $R[S]$, serta memahami bagaimana sifat-sifat homoderivasi pada R dapat diperluas ke dalam ring semigrup $R[S]$. Hasil penelitian diharapkan dapat memperkaya teori ring dalam konteks generalisasi derivasi dan memberikan landasan bagi penerapan struktur aljabar non-komutatif pada bidang lain seperti teori kode, kriptografi, dan sistem dinamik berbasis aljabar.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. mengkonstruksi homoderivasi pada ring semigrup $R[S]$;
2. menyelidiki kaitan homoderivasi pada ring R dan ring semigrup $R[S]$.,
3. menyelidiki sifat-sifat homoderivasi pada ring semigrup $R[S]$.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang ingin diperoleh dari penelitian ini yaitu:

1. mengembangkan dan memperdalam pengetahuan ilmu matematika khususnya mengenai homoderivasi pada ring semigrup;
2. mengembangkan sifat-sifat homoderivasi pada ring semigrup;
3. menjadi referensi bagi penelitian lanjutan di bidang teori modul dan ring pada aljabar yang melibatkan homoderivasi.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Grup dan Semigrup

Sebelum membahas definisi grup, terlebih dahulu akan diperkenalkan konsep operasi biner sebagai komponen utama dalam pembentukan struktur grup.

Definisi 2.1.1 Suatu operasi biner $*$ yang didefinisikan pada himpunan S adalah fungsi dari $S \times S$ ke S. Untuk setiap $(j, l) \in S \times S,\ *(j, l)$ di S dinotasikan dengan $j * l$ (Fitriani dan Faisol, 2022).
Dengan kata lain, operasi $*$ pada himpunan S dikatakan operasi biner jika untuk setiap $j, l \in S$ berlaku $j * l \in S$.

Berikut ini akan diberikan contoh operasi biner pada suatu himpunan.

Contoh 2.1.2 Diberikan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dan operasi $+$ adalah operasi biner pada $\mathbb{R}$ dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi dari $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yaitu untuk setiap $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ maka $a + b \in \mathbb{R}$. Hal ini karena penjumlahan dari dua bilangan real menghasilkan bilangan real pula. Dengan kata lain, operasi $+$ adalah operasi biner pada $\mathbb{R}$.

Selanjutnya diberikan definisi dan contoh semigrup sebagai berikut.

Definisi 2.1.3 Diberikan himpunan bilangan tak kosong S dan operasi biner

$$* : S \times S \to S$$

yang memasangkan setiap elemen $(x, y) \in S \times S$ dengan tepat satu kawan $*(x, y) \in S$. Pasangan S dan $*$ dinotasikan dengan $\langle S, * \rangle$ disebut grupoid. Jika relasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu $*(x, *(y, z)) = *(*(x, y), z)$ untuk sebarang $x, y, z \in S$ maka grupoid $\langle S, * \rangle$ disebut semigrup (Surodjo dan Susanti, 2023).

Contoh 2.1.4 Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang didefinisikan sebagai operasi biner $p \cdot q = p + q - pq$. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$ merupakan semigrup.

i. Diberikan sebarang $p, q \in \mathbb{Z}$ maka $p \cdot q = p + q - pq \in \mathbb{Z}$.

ii. Diberikan sebarang $p, q, r \in \mathbb{Z}$. Berlaku:

$$
\begin{aligned}
(p \cdot q) \cdot r &= (p + q - pq) \cdot r \\
&= (p + q - pq) + r - (p + q - pq)r \\
&= p + q - pq + r - (pr + qr - pqr) \\
&= p + q - pq + r - pr - qr + pqr \\
&= p + q + r - pq - pr - qr + pqr.
\end{aligned}
$$

Di sisi lain,

$$
\begin{aligned}
p \cdot (q \cdot r) &= p \cdot (q + r - qr) \\
&= p + (q + r - qr) - p(q + r - qr) \\
&= p + q + r - qr - (pq + pr - pqr) \\
&= p + q + r - qr - pq - pr + pqr \\
&= p + q + r - pq - pr - qr + pqr.
\end{aligned}
$$

Oleh karena sifat asosiatif terpenuhi yaitu $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$ untuk setiap $p, q, r \in \mathbb{Z}$ maka $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$ merupakan semigrup.

Setelah memahami definisi dan contoh semigrup. Berikut ini dijelaskan definisi grup.

Definisi 2.1.5 Sistem matematika $\langle G, * \rangle$ adalah grup jika memenuhi aksioma-aksioma berikut.

i. Operasi biner * bersifat assosiatif yaitu $(r * s) * t = r * (s * t)$ untuk setiap $r, s, t \in G$.

ii. Terdapat unsur identitas $e \in G$ untuk operasi biner $*$ sehingga untuk setiap $r \in G$ berlaku $e * r = r * e = r$.

iii. Untuk semua $r \in G$ terdapat elemen invers dari r di G, dinotasikan dengan r^{-1} sehingga $r^{-1} * r = r * r^{-1} = e$
(Fitriani dan Faisol, 2022).

Untuk memahami Definisi 2.1.5 berikut merupakan contoh dari suatu grup.

Contoh 2.1.6 Diberikan suatu himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi biner $r\triangle s = r + s - 1$ untuk setiap $r, s \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}, \triangle \rangle$ merupakan grup.

i. Untuk setiap $r, s, t \in \mathbb{Z}$, berlaku:

$$\begin{aligned} r\triangle(s\triangle t) &= r\triangle s\triangle t \\ &= r\triangle(s + t - 1) \\ &= r + (s + t - 1) - 1 \\ &= (r + s - 1) + t - 1 \\ &= (r\triangle s) + t - 1 \\ &= (r\triangle s)\triangle t. \end{aligned}$$

   Karena $r\triangle(s\triangle t) = (r\triangle s)\triangle t$, operasi $\triangle$ pada $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif.

ii. Terdapat $e = 1 \in \mathbb{Z}$ sehingga untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$ berlaku:

$$r\triangle e = r + e - 1 = r + 1 - 1 = r$$

   dan

$$e\triangle r = e + r - 1 = 1 + r - 1 = r.$$

   Jadi $\langle \mathbb{Z}, \triangle \rangle$ memiliki identitas yaitu 1.

iii. Diberikan $r \in \mathbb{Z}$. Terdapat $r^{-1} = 2 - r \in \mathbb{Z}$ sehingga berlaku:

$$\begin{aligned} r\triangle r^{-1} &= r + r^{-1} - 1 \\ &= r + (2 - r) - 1 \\ &= 1 \\ &= e. \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} r^{-1} \triangle r &= r^{-1} + r - 1 \\ &= (2 - r) + r - 1 \\ &= 1 \\ &= e. \end{aligned}$$

Karena aksioma-aksioma grup terpenuhi maka terbukti $\langle \mathbb{Z}, \triangle \rangle$ merupakan grup.

Selanjutnya, diberikan definisi grup komutatif.

Definisi 2.1.7 Grup G dikatakan grup komutatif jika operasi biner $*$ pada suatu grup G memenuhi hukum komutatif yaitu $x * y = y * x$, untuk setiap $x, y \in G$ (Noor, 2017).

Untuk memahami Definisi 2.1.7 berikut ini diberikan contoh grup komutatif.

Contoh 2.1.8 Berdasarkan Contoh 2.1.6 akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}, \triangle \rangle$ merupakan grup komutatif.
Diberikan sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} x \triangle y &= x + y - 1 \\ &= y + x - 1 \\ &= y \triangle x. \end{aligned}$$

Jadi $x \triangle y = y \triangle x$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$. Karena operasi $\triangle$ memenuhi hukum komutatif, $\langle \mathbb{Z}, \triangle \rangle$ merupakan grup komutatif.

Homomorfisma merupakan pemetaan antara dua struktur aljabar yang mempertahankan operasi yang didefinisikan pada struktur tersebut. Berikut ini diberikan definisi dan contoh homomorfisma.

Definisi 2.1.9 Diberikan grup G dan G'. Pemetaan $\phi : G \to G'$ dinamakan homomorfisma jika $\phi(vw) = \phi(v)\phi(w)$, untuk setiap $v, w \in G$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.10 Diberikan grup F yang terdiri dari semua fungsi kontinu dengan domain $[0, 1]$ terhadap operasi penjumlahan fungsi dan $\mathbb{R}$ adalah grup dari semua bilangan real terhadap operasi penjumlahan bilangan. Didefinisikan $\sigma : F \to \mathbb{R}$ dengan

$$\sigma(h) = \int_0^1 h(x)dx$$

untuk setiap $h \in F$. Akan ditunjukkan bahwa σ merupakan homomorfisma grup dari F ke $\mathbb{R}$.
Diberikan sebarang $h, l \in F$ berlaku:

$$\begin{aligned}\sigma(h + l) &= \int_0^1 (h + l)(x) \\ &= \int_0^1 (h(x) + l(x))dx \\ &= \int_0^1 h(x)dx + \int_0^1 l(x))dx \\ &= \sigma(h) + \sigma(l).\end{aligned}$$

Karena $\sigma(h + l) = \sigma(h) + \sigma(l)$, untuk setiap $h, l \in F$ sehingga σ merupakan homomorfisma grup.

Selanjutnya diberikan sifat-sfat homomorfisma grup.

Teorema 2.1.11 Diberikan grup G, G' dan homomorfisma grup $\phi : G \to G'$.

i. Jika $e \in G$ adalah elemen identitas, maka berlaku $\phi(e)$ adalah elemen identitas di G' sehingga $\phi(e) = e'$.

ii. Jika $u \in G$, maka $\phi(u^{-1}) = (\phi(u))^{-1}$
(Fitriani dan Faisol, 2022).

Bukti:

i. Karena $\phi : G \to G'$ adalah homomorfisma grup, maka berlaku:

$$\phi(u) = \phi(ue) = \phi(u)\phi(e).$$

Dengan mengoperasikan kedua ruas dengan $\phi(u)^{-1}$ dari kiri diperoleh

$$\begin{aligned}(\phi(u))^{-1}\phi(u) &= (\phi(u))^{-1}\phi(u)\phi(e)\\ e' &= e'\phi(e)\\ e' &= \phi(e).\end{aligned}$$

Jadi, $\phi(e)$ adalah elemen identitas e' di G'.

ii. Perhatikan bahwa

$$e' = \phi(e) = \phi(uu^{-1}) = \phi(u)\phi(u^{-1}).$$

Hasil ini menunjukkan bahwa invers dari $\phi(u)$ adalah $(\phi(u))^{-1}$. Secara singkat $\phi(u^{-1}) = (\phi(u))^{-1}$.

2.2 Ring

Pada subbab ini dibahas tentang konsep struktur aljabar dengan dua operasi biner yang disebut ring, berikut diberikan definisi dan contohnya.

Definisi 2.2.1 Diberikan R adalah himpunan tak kosong dengan operasi biner $+$ (penjumlahan) dan $\cdot$ (perkalian). Himpunan R disebut ring jika terhadap kedua operasi tersebut memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\langle R, +\rangle$ adalah grup komutatif;
2. Operasi $\cdot$ pada R memenuhi asosiatif yaitu:

$$(k \cdot l) \cdot m = k \cdot (l \cdot m)$$

untuk setiap $k, l, m \in R$;

3. Operasi penjumlahan dan perkalian pada R memenuhi sifat-sifat berikut:

   a. Distributif kiri, yaitu:

$$k \cdot (l + m) = (k \cdot l) + (k \cdot m),$$

   untuk setiap $k, l, m \in R$;

b. Distributif kanan, yaitu:

$$(k+l)\cdot m = (k\cdot m) + (l\cdot m),$$

untuk setiap $k, l, m \in R$. (Wahyuni dkk., 2021)

Untuk memahami Definisi 2.2.1 berikut ini diberikan contoh ring.

Contoh 2.2.2 Misalkan $T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ adalah himpunan semua fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$. Pada himpunan ini didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian. Untuk setiap $v, w \in T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dan $r \in \mathbb{R}$ didefinisikan:

$$(v+w)(r) = v(r) + w(r)$$

dan

$$(v\cdot w)(r) = v(r)\cdot w(r).$$

Akan ditunjukkan bahwa $\langle T(\mathbb{R},\mathbb{R}), +, \cdot\rangle$ merupakan ring. Untuk menunjukkan bahwa $T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ merupakan ring, maka $T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ harus memenuhi aksioma-aksioma ring.

1 Akan ditunjukkan $\langle T(\mathbb{R},\mathbb{R}), +\rangle$ grup komutatif.

a. Diberikan sebarang $v, w \in T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dengan $r \in \mathbb{R}$ maka

$$(v+w)(r) = v(r) + w(r).$$

Karena $v(r)+w(r) \in \mathbb{R}$ maka $T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan.

b. Diberikan sebarang $v, w, t \in T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dengan $r \in \mathbb{R}$. Berlaku:

$$\begin{aligned}(v+(w+t))(r) &= v(r) + (w+t)(r)\\ &= v(r) + [w(r)+t(r)]\\ &= [v(r)+w(r)] + t(r)\\ &= (v+w)(r) + t(r)\\ &= ((v+w)+t)(r).\end{aligned}$$

Jadi, operasi penjumlahan pada $T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bersifat asosiatif.

c. Diberikan sebarang $v, w, t \in T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dan $r \in \mathbb{R}$. Berlaku:

$$\begin{aligned}(v+w)(r) &= v(r) + w(r)\\ &= w(r) + v(r)\\ &= (w+v)(r).\end{aligned}$$

Jadi, operasi penjumlahan pada $T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bersifat komutatif.

d. Diberikan $r \in \mathbb{R}$ didefinisikan fungsi $0(r) = O_{\mathbb{R}}$. Jelas 0 merupakan fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ yang berati $0 \in \mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ karena operasi penjumlahan bersifat komutatif maka $v + 0 = 0 + v$ untuk sebarang $v \in T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Selanjutnya untuk setiap $r \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$\begin{aligned}(v+0)(r) &= v(r) + 0(r)\\ &= v(r) + 0\\ &= v(r).\end{aligned}$$

Jadi, terdapat $0 \in T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sehingga $v + 0 = 0 + v = v$ untuk setiap $v \in T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

e. Untuk setiap $r \in \mathbb{R}$ dan $v \in T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ didefinisikan fungsi $(-v)(r) = -v(r)$. Karena $-v$ merupakan fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ maka $-v \in T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Karena operasi penjumlahan bersifat komutatif maka $v+(-v) = (-v)+v$. Selanjutnya untuk setiap $r \in \mathbb{R}$ maka:

$$\begin{aligned}(v+(-v))(r) &= v(r) + (-v)(r)\\ &= v(r) + (-v(r))\\ &= 0\\ &= 0(r).\end{aligned}$$

Jadi untuk setiap $v \in T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ terdapat fungsi $-v \in T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sehingga $v + (-v) = (-v) + v = 0$.

Oleh karena (a) sampai dengan (e) terpenuhi maka $\langle T(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, *\rangle$ grup komutatif.

2. Akan ditunjukkan operasi $\cdot$ di $T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bersifat asosiatif.
   Diberikan sebarang $v, w, t \in T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dan $r \in \mathbb{R}$. Berlaku:

$$\begin{aligned} ((v.w).t)(r) &= ((v.w)(r).t(r) \\ &= [v(r).w(r)].t(r) \\ &= v(r).[w(t).t(r)] \\ &= v(r).(w.t)(r) \\ &= (v.(w.t))(r). \end{aligned}$$

   karena $(v.w).t = v.(w.t)$ jadi operasi $\cdot$ di $T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bersifat asosiatif.

3. Akan ditunjukkan operasi penjumlahan dan perkalian di $T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bersifat distributif kiri dan distributif kanan.

   a. Diberikan sebarang $v, w, t \in T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Berlaku:

$$\begin{aligned} (v.(w+t))(r) &= v(r).(w+t)(r) \\ &= v(r).[w(r)+t(r)] \\ &= v(r).w(r)+v(r).t(r) \\ &= (v.w)(r)+(v.t)(r) \\ &= ((v.w)+(v.w))(r). \end{aligned}$$

   Karena $v.(w+t) = (v.w) + (v.t)$ untuk setiap $v, w, t \in T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ jadi operasi penjumlahan dan perkalian di $T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bersifat distributif kiri.

   b. Diberikan sebarang $v, w, t \in T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Berlaku:

$$\begin{aligned} ((v+w).t))(r) &= (v+w)(r).(t)(r) \\ &= [v(r)+w(r)].t(r)] \\ &= v(r).w(r)+w(r).t(r) \\ &= (v.w)(r)+(w.t)(r) \\ &= ((v.w)+(w.t))(r). \end{aligned}$$

   Karena $(v+w).t = (v.w) + (w.t)$ untuk setiap $v, w, t \in T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ jadi operasi penjumlahan dan perkalian di $T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bersifat distributif kanan.

Berdasarkan 1-3 terbukti $\langle T(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

2.3 Homomorfisma Ring

Homomorfisma ring merupakan suatu pemetaan dari suatu ring R_1 ke R_2 yang bersifat mengawetkan kedua operasi biner yaitu operasi $(+, \cdot)$ dari ring tersebut. Berikut ini disajikan definisi dan contoh homomorfisma ring.

Definisi 2.3.1 Diberikan suatu ring $\langle R_1, +_1, \cdot_1 \rangle$ dan $\langle R_2, +_2, \cdot_2 \rangle$ serta suatu pemetaan $\omega : R_1 \to R_2$. Pemetaan ω disebut homomorfisma ring jika

$$\omega(x +_1 y) = \omega(x) +_2 \omega(y) \text{ dan } \omega(x \cdot_1 y) = \omega(x) \cdot_2 \omega(y)$$

untuk setiap $x, y \in R_1$ (Wahyuni dkk., 2021).

Ada beberapa jenis homomorfisma terkait dengan sifat pemetaannya. Suatu homomorfisma ω dari ring R_1 ke ring R_2 disebut:

i) monomorfisma jika ω merupakan pemetaan injektif;

ii) epimorfisma jika ω merupakan pemetaan surjektif; dan

iii) isomorfisma jika ω merupakan pemetaan bijektif.

Berikut akan diberikan contoh homomorfisma ring dan memenuhi sifat-sifat homomorfisma ring.

Contoh 2.3.2 Diberikan $R = \left\{ \begin{bmatrix} r & t \\ -t & r \end{bmatrix} \mid r, t \in \mathbb{R} \right\}$. Himpunan R merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks dan pemetaan φ dari ring $\mathbb{C}$ ke ring R. Didefinisikan:

$$\varphi(r + ti) = \begin{bmatrix} r & t \\ -t & r \end{bmatrix},$$

untuk setiap $r + ti \in \mathbb{C}$. Akan ditunjukkan pemetaan φ merupakan homomorfisma ring dan apakah φ merupakan isomorfisma ring atau bukan.

Akan ditunjukkan pemetaan φ merupakan homomorfisma ring.
Diberikan sebarang $x = r + ti, y = p + qi \in \mathbb{C}$ dengan $r, t, p, q \in \mathbb{R}$ maka

i. $\varphi(x + y) = \varphi((r + ti) + (p + qi))$
$= \varphi(r + p + (t + q)i)$

$$= \begin{bmatrix} r+p & t+q \\ -(t+q) & r+p \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} r & t \\ -t & r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix}$$
$$= \varphi(x) + \varphi(y).$$

ii. $\varphi(x.y) = \varphi((r+ti)(p+qi))$
$$= \varphi(rp + rqi + pti + tqi^2)$$
$$= \varphi(rp - tq + (rq+pt)i)$$
$$= \begin{bmatrix} rp-tq & rq+pt \\ -(rq+pt) & rp-tq \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} r & t \\ -t & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix}$$
$$= \varphi(x)\varphi(y).$$

Berdasarkan (i) dan (ii) maka φ merupakan homomorfisma ring.

Selanjutnya akan diselidiki apakah φ merupakan isomorfisma ring atau bukan.

i. Akan diselidiki apakah φ merupakan pemetaan injektif.
   Diberikan sebarang $x = r + ti, y = p + qi \in \mathbb{C}$ dengan $r, t, p, q \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\varphi(r + ti) = \varphi(p + qi)$
   $$\begin{bmatrix} r & t \\ -t & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix}.$$
   Karena $\varphi(x) = \varphi(y)$ berakibat $r = p$ dan $t = q$ maka φ bersifat injektif.

ii. Akan diselidiki apakah φ merupakan pemetaan surjektif.
   Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} r & s \\ -s & r \end{bmatrix} \in R$ yang berarti $r, s \in \mathbb{R}$. Misalkan $z = r + si$ maka jelas $z \in C$. Perhatikan bahwa $\varphi(z) = \varphi(r + si) = A$. Oleh karena itu, φ bersifat surjektif.

iii. Akan diselidiki apakah φ merupakan pemetaan bijektif.
   Kerena φ merupakan homomorfisma ring yang bersifat injektif dan surjektif maka φ merupakan homomorfisma ring yang bersifat bijektif atau dengan kata lain φ isomorfisma.

2.4 Pemetaan Ortogonal

Dalam kajian struktur aljabar, khususnya pada teori ring dan pemetaan aditif, sering digunakan asumsi tambahan untuk mengatur bagaimana suatu pemetaan berinteraksi dengan operasi perkalian. Salah satu konsep yang digunakan adalah pemetaan ortogonal, yaitu pemetaan yang memiliki sifat bahwa hasil kali dari citra elemen-elemen tertentu bernilai nol.
Diberikan ring R. Dua pemetaan aditif $f_1, f_2 : R \to R$ disebut pemetaan ortogonal (*orthogonal maps*) apabila untuk setiap $x, y \in R$ memenuhi:

$$f_1(x)f_2(y) + f_2(x)f_1(y) = 0$$

(Bresar, 2004). Untuk memperjelas konsep pemetaan ortogonal, berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.4.1 Diberikan ring $T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & m \\ n & 0 \end{bmatrix} \mid m, n \in \mathbb{R} \right\}$. Didefinisikan pemetaan aditif $f_1, f_2 : T \to T$ dengan:

$$f_1\left(\begin{bmatrix} 0 & m \\ n & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -m \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dan

$$f_2\left(\begin{bmatrix} 0 & m \\ n & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -n & 0 \end{bmatrix}.$$

Untuk setiap $X = \begin{bmatrix} 0 & m_1 \\ n_1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $Y = \begin{bmatrix} 0 & m_1 \\ n_1 & 0 \end{bmatrix} \in T$ berlaku :

$$f_1(X)f_2(Y) + f_2(X)f_1(Y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh f_1 dan f_2 pemetaan ortogonal.

2.5 Ring Polinomial

Pada struktur aljabar, polinomial digeneralisasikan menjadi ring polinomial. Berikut ini disajikan definisi dan contoh dari ring polinomal.

Definisi 2.5.1 Diberikan ring R. Himpunan $R[x]$ dinotasikan sebagai himpunan semua barisan tak hingga $(r_0, r_1, r_2, ...)$ dengan $r_i \in R, i = 0, 1, 2, ...$, dan terdapat bilangan bulat non negatif n sehingga untuk setiap $k \geq n, r_k = 0$. Elemen-elemen dari $R[x]$ disebut polinomial atas R. Selanjutnya, didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian pada $R[x]$ sebagai berikut:
Untuk setiap $(r_0, r_1, r_2, ...), (t_0, t_1, t_2, ...) \in R[x]$.

i. Penjumlahan

$$(r_0, r_1, r_2, ...) + (t_0, t_1, t_2, ...) = (r_0 + t_0, r_1 + t_1, r_2 + t_2, ...)$$

ii. Perkalian

$$(r_0, r_1, r_2, ...) \cdot (t_0, t_1, t_2, ...) = (u_0, u_1, u_2, ...)$$

dengan $u_k = \sum\limits_{i=0}^{k} r_i t_{k-i}$ dan $k = 0, 1, 2, ...$

Dapat disimpulkan bahwa $\langle R[x], +, \cdot \rangle$ merupakan ring dengan elemen netral terhadap operasi $+$ adalah $(0, 0, ...)$ dan invers terhadap $+$ dari $(r_0, r_1, r_2, ...)$ adalah $(-r_0, -r_1, -r_2, ...)$. Ring $R[x]$ disebut ring polinomial (Wahyuni dkk., 2021).

Selanjutnya, jika didefinisikan notasi yang lebih ringkas dan lebih dikenal sebagai berikut:

$$\begin{gathered}(r, 0, 0, 0...) \text{ dinotasikan } r = rX^0 \\ (0, r, 0, 0, ...) \text{ dinotasikan } rX = rX^1 \\ (0, 0, r, 0, ...) \text{ dinotastikan } rX^2 \\ \vdots\end{gathered}$$

Berdasarkan definisi operasi penjumlahan suku banyak, untuk sebarang suku banyak $(r_0, r_1, ..., r_n, 0, 0, ...) \in R[x]$ dapat ditulis

$$\begin{aligned}(r_0, r_1, ..., r_n, 0, 0) &= (r_0, 0, 0, ...) + (0, r_1, 0, ...) + ... + (0, ..., 0, r_n, 0, ...) \\ &= r_0 + r_1X + r_2X^2 + ... + r_nX^n.\end{aligned}$$

Simbol x disebut *indeterminate* atas R dan elemen-elemen $r_0, r_1, r_2, ..., r_n$ disebut koefisien dari $r_0 + r_1X + r_2X^2 + ... + r_nX^n$.
Jika diberikan ring R, ring polinomial dapat dituliskan sebagai himpunan::

$$R[X] = \left\{ \sum_{i=0}^{p} r_i x^i | p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, r_i \in R \right\}$$

Dengan operasi penjumlahan dan perkalian $R[X]$ dapat didefinsikan:

$$\sum_{i=0}^{n} r_i x^i + \sum_{i=0}^{n} t_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (r_i + t_i) x^i$$

$$(\sum_{i=0}^{p} r_i x^i)(\sum_{j=0}^{q} t_j x^j) = (\sum_{\mu=0}^{p+q} s_\mu x^\mu)$$

untuk setiap $r_i, t_i \in R$ dan $s_\mu = \sum_{i+j=\mu} r_i t_j$.
Polinomial $r_0 + r_1 X + r_2 X^2 + ... + r_n X^n$ dapat dipandang sebagai fungsi

$$f : \mathbb{Z}^{\geq 0} \to R$$

yang dapat dinotasikan dengan $f(x)$.
Selanjutnya $\mathbb{Z}^{\geq 0}$ dapat dinotasikan $\mathbb{N} \cup \{0\}$ sehingga ring polinomial dapat ditulis:

$$R[X] = \{f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to R | f(n) \neq 0\}$$

dengan penjumlahan dan perkalian didefinisikan dalam $R[X]$ yaitu:

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

$$(fg)(n) = \sum_{u+v=n} f(u)g(v)$$

dengan $(u, v) \in R$.

Contoh 2.5.2 Diberikan $R = \langle \mathbb{Z}_5, +, \cdot \rangle$ ring bilangan modulo 5 maka diperoleh ring polinomial

$$\mathbb{Z}_5[X] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in \mathbb{Z}_5, i = 0, 1, 2, ..., n \right\}$$

yang beranggotakan semua polinomial dengan koefisien di $\mathbb{Z}_5$.

2.6 Ring Semigrup

Perumuman dari ring polinomial $R[X]$ dikenal sebagai ring semigrup $R[S]$ dengan R adalah ring dan S adalah semigrup. Jika $S = \mathbb{N} \cup \{0\}$ maka ring semigrup $R[S]$ merupakan ring polinomial $R[X]$ (Gilmer, 1984). Definisi dan contoh ring semigrup disajikan sebagai berikut.

Definisi 2.6.1 Diberikan ring R dan semigrup S terhadap operasi penjumlahan sehingga dapat dikonstruksi ring semigrup $R[S]$ yaitu himpunan

$$R[S] = \{f : S \to R \mid \text{supp } (f) \text{ berhingga}\}$$

dengan supp $(f) = \{s \in S \mid f(s) \neq 0\}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan fungsi:

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s)$$

dan operasi konvolusi

$$(fg)(s) = \sum_{x+y=s} f(x)g(y)$$

untuk setiap $s \in S, f, g \in R[S]$ (Gilmer, 1984).

Contoh 2.6.2 Diberikan ring $\mathbb{Z}_6$ dan $\mathbb{Z}_5$ serta semigrup $\mathbb{Z}_3$ dan $\mathbb{Z}_2$terhadap operasi penjumlahan sehingga dapat dikontruksi ring semigrup $\mathbb{Z}_6[\mathbb{Z}_3]$ dan $\mathbb{Z}_5[\mathbb{Z}_2]$, yaitu himpunan

$$\mathbb{Z}_6[\mathbb{Z}_3] = \{f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_6 \mid \text{supp}(f) \text{ berhingga}\}$$

dan

$$\mathbb{Z}_5[\mathbb{Z}_2] = \{\alpha : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_5 \mid \text{supp}(\alpha) \text{ berhingga}\}.$$

2.7 Derivasi

Di awal pembelajaran kalkulus, konsep turunan, aturan-aturannya, serta berbagai aplikasinya yang luas mulai diperkenalkan. Tidak hanya dalam bidang matematika, turunan juga memiliki peran penting dalam ilmu lain seperti fisika, teknik, dan ekonomi, yang membuktikan kegunaannya yang sangat luas.

Definisi 2.7.1 Sifat-sifat fungsi turunan, terutama aturan Leibniz yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{d}{dx}(fg) = (\frac{d}{dx}f)g + f(\frac{d}{dx}g)$$

untuk setiap dua fungsi yang berbeda f dan g (Ali dkk., 2024).

Selama bertahun-tahun, ide aturan Leibniz telah banyak digunakan namun dengan notasi yang berbeda, namun idenya tetap sama. Seperti notasi yang digunakan oleh Issac Newton adalah

$$(\dot{fg}) = \dot{f}g + f\dot{g}$$

dan oleh Lagrange,

$$(fg)^{'} = f^{'}g + fg^{'}$$

Untuk lebih memahami tentang derivasi. Berikut diberikan beberapa contoh derivasi.

Contoh 2.7.2 Turunan dari polinomial $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ adalah $f^{'}(x) = 3x^2 + 4x + 3$.

Contoh 2.7.3 Diberikan fungsi $f(x) = x^3 + 3x + 1$ dan $h(x) = x + 5$. Turunan dari $(f \cdot h)(x)$ adalah

$$\begin{aligned}(f \cdot h)^{'}(x) &= f^{'}(x)h(x) + f(x)h^{'}(x) \\ &= (3x^2 + 3)(x + 5) + (x^3 + 3x + 1)(1) \\ &= 3x^3 + 15x^2 + 3x + 15 + x^3 + 3x + 1 \\ &= 4x^3 + 15x^2 + 6x + 16.\end{aligned}$$

2.7.1 Derivasi pada Ring

Gagasan derivasi tidak hanya pada kalkulus dan lainnya. Namun, konsep derivasi juga berlaku pada struktur aljabar seperti ring. Berikut ini diberikan definisi dan contoh derivasi pada ring.

Definisi 2.7.4 Diberikan ring R. Pemetaan $d : R \to R$ disebut derivasi pada R jika memenuhi:

i. $d(a + b) = d(a) + d(b)$

ii. $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ untuk semua $a, b \in R$,
dengan peta d disebut sebagai derivasi pada R (Ali dkk., 2024).

Berdasarkan Definisi 2.7.4 jelas bahwa pemetaan nol merupakan derivasi yang selanjutnya disebut derivasi nol. Definisi dan contoh derivasi pada ring diberikan sebagai berikut.

Contoh 2.7.5 Diberikan ring

$$R = M_{2\times 2}(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \mid r, s, t, u \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Didefinisikan $d : R \to R$ dengan

$$d\left(\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -s \\ t & 0 \end{bmatrix}, \text{untuk setiap } \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \in R.$$

Akan ditunjukkan bahwa d merupakan derivasi pada ring R.

i. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} \in R.$

   Berlaku:

$$\begin{aligned} d\left(\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}\right) &= d\left(\begin{bmatrix} r+m & s+n) \\ t+o & u+p \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(s+n) \\ t+o & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -s-n \\ t+o & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -s \\ t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -n \\ o & 0 \end{bmatrix} \\ &= d\left(\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\right) + d\left(\begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

ii. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} \in R.$

Berlaku:

$$d\left(\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}\right) = d\left(\begin{bmatrix} rm+so & rn+sp \\ tm+uo & tn+up \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -(rn+sp) \\ tm+uo & 0 \end{bmatrix}$$

Di sisi lain,

$$d\left(\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -s \\ t & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -n \\ o & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -so & -sp \\ tm & tn \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} so & -rn \\ uo & -tn \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -(sp+rn) \\ tm+uo & 0 \end{bmatrix}.$$

Jadi,

$$d\left(\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}\right) = d\left(\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}\right).$$

Oleh karena i) dan ii) terpenuhi maka d merupakan derivasi pada ring R. Selanjutnya diberikan contoh yang bukan derivasi.

Contoh 2.7.6 Misalkan $R = \mathbb{Z}$ yaitu ring bilangan bulat dan didefinisikan fungsi $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sebagai:

$$h(x) = 2x^3 \text{ untuk setiap } x \in \mathbb{Z}.$$

Akan ditunjukkan bahwa fungsi h bukan derivasi.
Pilih $x = 1$ dan $y = 2$ diperoleh:

$$h(1+2) = h(3) = 2(3)^3 = 2(27) = 54$$
$$h(1) + h(2) = 2(1)^3 + 2(2)^3 = 2(1) + 2(8) = 2 + 16 = 18$$

Karena $54 \neq 18$ maka $h(x+y) \neq h(x)+h(y)$. Karena tidak memenuhi salah satu aksioma yaitu aditif, fungsi $h(x) = 2x^3$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ bukan derivasi.

2.7.2 Homoderivasi pada Ring

Pada tahun 2000, El Sofy memberikan konsep menarik mengenai penggabungan konsep homomorfisma dan derivasi yang diberi nama homoderivasi. Ia menunjukkan bahwa pemetaan tersebut bukanlah homomorfisma maupun derivasi.

Definisi 2.7.7 Diberikan ring R. Pemetaan aditif h dari sebuah ring R ke dirinya sendiri yang memenuhi kondisi:

$$h(ab) = h(a)b + ah(b) + h(a)h(b), \forall a, b \in R$$

disebut sebagai homoderivasi pada R (Ali dkk., 2024).

Contoh 2.7.8 Diberikan ring

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & y \\ z & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Didefinisikan $h : R \to R$ dengan

$$h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & y \\ z & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{untuk setiap} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & y \\ z & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R.$$

Akan ditunjukkan bahwa h merupakan homoderivasi pada ring R.

i. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & y \\ z & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & q \\ r & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$. Berlaku:

$$\begin{aligned} h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & y \\ z & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & q \\ r & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x+p & 0 & y+q \\ z+r & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x+p & 0 & 0 \\ z+r & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0) \\ -x-p & 0 & 0 \\ -z-r & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 0 \\ -z & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \end{bmatrix} + \left(-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & y \\ z & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & q \\ r & 0 & 0 \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

ii. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & y \\ z & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & q \\ r & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$.

Berlaku:

$$\begin{aligned} h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & y \\ z & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & q \\ r & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ yr & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ yr & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$
\begin{aligned}
&h\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\x&0&y\\z&0&0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}0&0&0\\p&0&q\\r&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\x&0&y\\z&0&0\end{bmatrix}h\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\p&0&q\\r&0&0\end{bmatrix}\right)\\
&+h\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\x&0&y\\z&0&0\end{bmatrix}\right)h\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\p&0&q\\r&0&0\end{bmatrix}\right)\\
&=-\begin{bmatrix}0&0&0\\x&0&0\\z&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\p&0&q\\r&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\x&0&y\\z&0&0\end{bmatrix}\left(-\begin{bmatrix}0&0&0\\p&0&0\\r&0&0\end{bmatrix}\right)\\
&\quad+\left(-\begin{bmatrix}0&0&0\\x&0&0\\z&0&0\end{bmatrix}\right)\left(-\begin{bmatrix}0&0&0\\p&0&0\\r&0&0\end{bmatrix}\right)\\
&=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\-yr&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\\
&=-\begin{bmatrix}0&0&0\\yr&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Jadi,

$$
\begin{aligned}
h\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\x&0&y\\z&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\p&0&q\\r&0&0\end{bmatrix}\right)&=h\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\x&0&y\\z&0&0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}0&0&0\\p&0&q\\r&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\x&0&y\\z&0&0\end{bmatrix}\\
&\quad h\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\p&0&q\\r&0&0\end{bmatrix}\right)+h\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\x&0&y\\z&0&0\end{bmatrix}\right)\\
&\quad h\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\p&0&q\\r&0&0\end{bmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

Oleh karena i) dan ii) terpenuhi maka h merupakan homoderivasi pada ring R.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dan analisis teoretis, melalui pengumpulan referensi berupa jurnal, artikel ilmiah, buku, dan sumber-sumber lain yang berkaitan dengan penelitian ini. Secara umum langkah-langkah penelitian ini sebagai berikut:

1. mempelajari materi terkait teori semigrup, grup, ring, ring semigrup, derivasi dan homoderivasi;
2. mengkonstruksi homoderivasi pada ring semigrup;
3. memberikan contoh ilustrasi homoderivasi pada ring semigrup;
4. menyelidiki kaitan homoderivasi pada ring R dan ring semigrup $R[S]$.
5. menyelidiki sifat-sifat homoderivasi pada ring semigrup;
6. memberikan contoh ilustasi dari sifat-sifat homoderivasi pada ring semigrup yang sudah diperoleh.

Selanjutnya, langkah-langkah penelitian dapat dilihat pada diagram berikut:

Mempelajari teori semigrup, grup, ring, homomorfisma ring, ring polinomial, ring semigrup, derivasi, derivasi pada ring dan homoderivasi pada ring

↓

Tahap 1 Mengkonstruksi homoderivasi pada ring semigrup;

↓

Tahap 2 Memberikan contoh ilustrasi homoderivasi pada ring semigrup;

↓

Tahap 3 Menyelidiki kaitan homoderivasi pada ring R dan ring semigrup $R[S]$;

↓

Tahap 4 Menyelidiki sifat-sifat homoderivasi pada ring semigrup;

↓

Tahap 5 Memberikan contoh ilustrasi dari sifat-sifat homoderivasi pada ring semigrup yang sudah diperoleh.

Gambar 3.1 Diagram tahapan penelitian

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, homoderivasi pada ring semigrup merupakan perluasan dari homoderivasi pada ring biasa. Penelitian ini menunjukkan bahwa konsep homoderivasi dapat dikonstruksikan dengan baik pada ring semigrup sebagai pengembangan dari homoderivasi pada ring. Selanjutnya telah ditunjukkan beberapa sifat homoderivasi pada ring semigrup. Di antaranya, himpunan konstanta dari suatu homoderivasi pada ring semigrup membentuk struktur $R[S]$ modul sehingga memiliki sifat aljabar yang teratur dan konsisten.

Selanjutnya, dalam kajian terhadap operasi antar homoderivasi diperoleh bahwa jumlah langsung antara pemetaan-pemetaan homoderivasi pada ring semigrup masing-masing membentuk suatu pemetaan homoderivasi. Selain itu, penjumlahan dua pemetaan homoderivasi pada ring semigrup juga menghasilkan pemetaan homoderivasi pada ring semigrup dengan syarat kedua pemetaan homoderivasi saling ortogonal. Dalam penelitian ini juga menunjukkan adanya struktur aljabar yang terbentuk dari himpunan pemetaan-pemetaan homoderivasi yang saling ortogonal yaitu monoid.

5.2 Saran

Penelitian selanjutnya disarankan untuk memperluas kajian mengenai homoderivasi pada kelas semigrup tertentu serta meneliti keterkaitan dengan pemetaan aljabar lainnya, sehingga diperoleh pemahaman yang lebih mendalam mengenai struktur dan sifat homoderivasi.

DAFTAR PUSTAKA

Ali, S., Rafiquee, N. N., & Varshney, V. (2024). Certain types of derivations in rings: Asurvey. *J. Indones. Math. Soc., 30(02), 256-306*.

Andari, A. (2017). *Ring, Field dan Daerah Integral*. Universitas Brawijaya, Malang.

Asahraf, M., Ali, S., & Mozumder, M. R. (2010). On Lie Ideals And Generalized Jordan (θ, ϕ) Derivations In Ring. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*., 65(4), 461-465.

Ashraf, M., Ali, S., & Haetinger, C. (2006). On Derivations in Rings and Their Applications. *The Aligaph Bull. of Math*., 25(2), 79-107.

Bergen, J & Grzeszczuk, P. (2012). Skew Derivations And The Nil And Prime Radicals. *Colloquium Mathematicum*., 128(2012), 229-236.

Budi Surdodjo, & Yeni Susanti. (2023). *Teoru Semigrup*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Bresar. (2004). Commuting Maps: A Survey. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 8(3), 361-397.

Chung, L. O., & Kobayashi, Y. (1985). Nil derivations and chain conditions in primerings. *Proceedings of the American Mathematical Society* , 94(2), 201-205.

Chuang, C. L., & Lee, T.K. (2005). Nilpotent derivations. *Journal of Algebra*, 287,381-401.

Engin, A., & Aidin, N. (2023). Homoderivations in Prime Rings. *Journal of New Theory*, 43(2023), 23-33.

Ernanto, I. (2018). Sifat-sifat ring faktor yang dilengkapi derivasi. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 1(1), 12-21.

Felzenszwalb, B.,& Lanski, C. (1983). On the Centralizers of Ideals and Nil Derivations. *Journal of Algebra* , 83(1), 520-530.

Filippis, V, D. (2021). Generalized g-derivations on prime rings. *Journal of Algebra*, 22(2), 2350037-1-18.

Fitriani, & Ahmad Faisol. (2022). *Grup*. Matematika Yogyakarta.

Fitriani, F., Faisol A., Wijayanti,E.I., Ali,S. (2023). On f-derivations on Polynomial Modules. *Journal of Algebra and Its Applications*, 2550155, 1-14.

Ghosseiri, N.M. (2007). Jordan Derivations of Some Classes of Matrix Rings. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 11(2), pp. 51-62.

Gilmer, R. (1984). Commutative Semigroup Rings. Chicago dan London: The University of Chicago.

Hungerford, T.W. (1980). Algebra. New York: Springer-Verlag New York.

Hvala, B. (2007). Generalized Lie Derivations in Prime Rings. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 11(5), 1425-1430.

Jacobson, N. (1956). *Structure of Rings*. American Mathematical Society, NewYork.

Jensen, D, W. (1995). Nilpotency of Derivations In Prime Rings. *Proceedings of The American Mathematical Society*, 123(9), 2633-2636.

Kaygorodov, I. B., & Popov, Y. S. (2014). Alternative algebras admitting derivations with invertible values and invertible derivations. I*zv. Math*, 78(5), 922-936.

Kayis, S.A., & Ozbal, S. A. (2016). On Symmetric Bi-Derivations of B-Algebras. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 31(2), 209-216.

Kuzucuoglu, F. (2011). Jordan Derivations on Strictly Triangular Matrix Rings. *Algebra Colloquium*, 18(3), 519-522.

Leerawat , U., & Khun-in, S. (2021). On Trace of Symmetric Bi-derivations on Rings. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 16(2), 743-752.

Melaibari, A., Muthana, N., & Al-Kenani, A. (2016). Homoderivations on Rings. *General Mathematics Notes*, 35(1), 1-8.

Noor, H.(2017). *Cara Mudah Memahami Struktur Aljabar*. Malang: UB Press.

Sayin, U., & Kuzucuoglu, F. (2019). Jordan Derivations of Special Subrings of Matrix Rings. *Algebra Colloquium*, 26(1), 83-92.

Schmitt, A. (2013). Algebra I: Commutative Algebra (Preliminary version).

Wahyuni, S., Wijayanti,I.E., Yuwaningsih, D.A., Hartanto, A.D. (2021). *Teori Ring dan Modul*. Uinversitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Waluyo, R., Faisol, A., & Fitriani. (2025).(σ, τ)-Derivasi pada Ring Grup. *Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, 13(2), 142-147.