

DERIVASI *TRIPLE* JORDAN PADA RING SEMIGRUP $R[S]$

Skripsi

Oleh

ZULFAKHRI DWIANTARA

NPM. 2217031092



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

ABSTRACT

TRIPLE JORDAN DERIVATION ON SEMIGRUP RING $R[S]$

By

Zulfakhri Dwiantara

Given a ring R . The additive mapping $d : R \rightarrow R$ is called derivation if d satisfies Leibniz's rule, i.e., $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ for every $a, b \in R$. Derivations and their generalizations play an important role in understanding the structural properties of rings and related algebraic systems. Among these generalizations, Jordan triple derivations have attracted considerable attention due to their close connection with Jordan algebras and various extensions of classical derivations. Although many studies have investigated Jordan triple derivations on rings and polynomial rings, the study of such derivations on semigroup rings has received relatively little attention. The main objective is to examine the relationship between Jordan triple derivations defined on a ring R and those defined on the corresponding semigroup ring $R[S]$. In particular, we analyze several structural properties of Jordan triple derivations and construct examples of such mappings on $R[S]$ induced by Jordan triple derivations on the base ring R . The results obtained provide further insight into the behavior of Jordan triple derivations on semigroup rings and contribute to the development of derivation theory in more general algebraic structures.

Keywords: Jordan derivation, triple Jordan derivation, linear combinations, polynomial ring, Semigroup ring.

ABSTRAK

DERIVASI *TRIPLE* JORDAN PADA RING SEMIGRUP $R[S]$

Oleh

Zulfakhri Dwiantara

Diberikan ring R . Pemetaan aditif $d : R \rightarrow R$ disebut derivasi jika d memenuhi aturan Leibniz, yaitu, $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ untuk setiap $a, b \in R$. Derivasi dan generalisasinya memainkan peran penting dalam memahami sifat-sifat struktural ring dan sistem aljabar terkait. Di antara generalisasi-generalisasi tersebut, derivasi *triple* Jordan telah menarik perhatian yang cukup besar karena hubungan eratnya dengan aljabar Jordan dan berbagai perluasan dari derivasi klasik. Meskipun banyak penelitian telah menyelidiki derivasi *triple* Jordan pada ring dan ring polinomial, studi tentang derivasi semacam itu pada ring semigrup relatif jarang mendapat perhatian. Tujuan utama adalah untuk mengkaji hubungan antara derivasi *triple* Jordan yang didefinisikan pada ring R dan yang didefinisikan pada ring semigrup yang sesuai $R[S]$. Secara khusus, dianalisis beberapa sifat struktural derivasi *triple* Jordan dan membangun contoh pemetaan semacam itu pada $R[S]$ yang diinduksi oleh derivasi *triple* Jordan pada ring dasar R . Hasil yang diperoleh memberikan wawasan lebih lanjut mengenai derivasi *triple* Jordan pada ring semigrup dan berkontribusi pada pengembangan teori derivasi dalam struktur aljabar yang lebih umum.

Kata-kata kunci: Derivasi Jordan, *triple* Jordan, kombinasi linear, ring polinomial, ring semigrup.

DERIVASI *TRIPLE* JORDAN PADA RING SEMIGRUP $R[S]$

ZULFAKHRI DWIANTARA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

Judul Skripsi : **DERIVASI TRIPLE JORDAN PADA RING SEMIGRUP $R[S]$**

Nama Mahasiswa : **Zulfakhri Dwiantara**

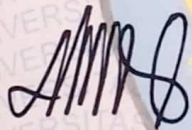
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031092**

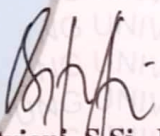
Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

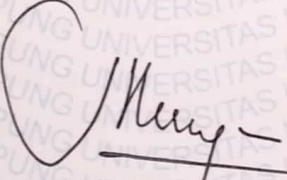


1. Komisi Pembimbing


Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.
NIP 198002062003121003


Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP 198406272006042001

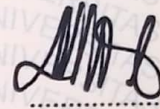
2. Ketua Jurusan Matematika


Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

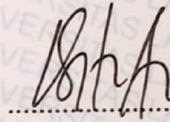
MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

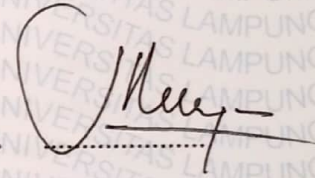
Ketua : Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.



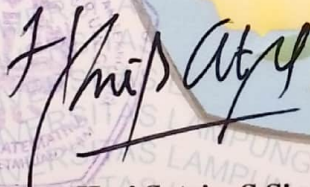
Sekretaris : Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.



**Penguji
Bukan Pembimbing : Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**



2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.

NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 14 April 2026

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Zulfakhri Dwiantara**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031092**

Jurusan : **Matematika**

Judul Skripsi : **Derivasi Trople Jordan pada Ring Semigrup
 $R[S]$**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 14 April 2026

Penulis,



Zulfakhri Dwiantara

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Zulfakhri Dwiatara yang lahir di Simpang Pematang pada tanggal 24 Mei 2004. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara, seorang anak tengah dari pasangan Salamuddin Julianto dan Ristiana yang tinggal dan bekerja sebagai nelayan di daerah Tulang Bawang.

Penulis memulai pendidikan formal di TK Dharma Wanita pada tahun 2009 dan menyelesaikannya pada tahun 2010. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di SD Negeri 1 Bumi Sentosa pada tahun 2010 sampai dengan 2016. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SMP N Satap 1 Rawajitu Timur pada tahun 2016 sampai dengan tahun 2019, dan menyelesaikan pendidikan di SMK Negeri 1 Rawajitu Timur dengan mengambil Jurusan Multimedia pada tahun 2022.

Pada tahun 2022, penulis diterima di Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Pada akhir tahun 2024 sampai dengan awal tahun 2025, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Perhimpunan Petambak Pembudidaya Udang Wilayah (P3UW) Provinsi Lampung selama 40 hari sampai dengan 31 Januari 2025. Selain itu, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis juga akan melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari pada Bulan Juli tahun 2025 mendatang.

Selama masa studi, penulis menunjukkan ketekunan dan dedikasi dalam menyelesaikan berbagai tugas akademik. Penulis berharap hasil dari penelitian ini dapat memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya di bidang Struktur Aljabar.

KATA INSPIRASI

”Barang siapa keluar untuk mencari sebuah ilmu, maka ia akan berada di jalan Allah hingga ia kembali.”

HR Tirmidzi

”Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya.”

QS. Al Baqarah: 286

”Pendidikan merupakan tiket menuju masa depan, hari esok hanya dimiliki oleh orang yang telah mempersiapkan diri sejak hari ini.”

Malcolm X

”Sampai dirimu menjadi bintang, milikilah kekuatan tuk mengejar mimpi. Kesempatan untuk bersinar pasti akan terlihat.”

Sampai Dirimu Menjadi Bintang: JKT48

”Mimpi adalah kunci, untuk kita menaklukkan dunia. Berlarilah tanpa lelah, sampai engkau meraihnya.”

Laskar Pelangi: Nidji

”Kehidupan tidak akan berubah menjadi lebih baik jika kita hanya berharap. Harus berusaha dengan semangat juang, pantang menyerah, kerja keras, dan punya tujuan yang jelas.”

PERSEMBAHAN

Alhadulillahirobbil'alamin

Dengan mengucapkan puji dan syukur atas kehadiran Allah Subhanahu Wata'ala karena limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya.

Tak lupa shalawat beserta salam selalu tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu Alaihi Wasallam.

Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Bapak dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada kedua orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Derivasi *Triple Jordan* pada ring semigrup $R[S]$ " dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sepanjang proses penyusunan skripsi ini.
2. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing 2 yang telah memberikan arahan, dukungan, serta doa sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam sekaligus Penguji yang telah bersedia memberikan saran, kritik, serta evaluasi yang membangun sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
4. Bapak Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku dosen Pembimbing Akademik atas segala bimbingan, arahan, ilmu, serta motivasi yang telah diberikan dari awal hingga selesainya studi ini.
5. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh guru TK, SD, SMP, dan SMA yang telah mengajarkan dan memberikan ilmu hingga penulis bisa menduduki bangku perkuliahan.

7. Bapak, ibu, serta kakak dan adik yang selalu memberikan dukungan dan doa dari awal masuk perkuliahan hingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Bang Ilham, bang Yusuf, bang Yudhi, bang Akbar, dan bang Klana yang selalu memberikan bantuan dan semangat kepada penulis pada saat pengerjaan skripsi.
9. Coky, Margo, Aprial, dan Martinez yang merupakan teman-teman seperjuangan penulis dalam menyelesaikan skripsi. Terimakasih atas pengalaman suka dan duka yang telah dilewati selama pengerjaan skripsi.
10. Insan, Arifin, Jue, Joseph, Penghuni kamar ujung kos Eunike, kelompok orang-orang dengan sebutan Wisma, dan kelompok orang-orang dengan sebutan Kudumain yang selalu memberikan tawa, lelucon, dan kenangan yang sudah di ciptakan bersama dalam keadaan apapun.
11. Teman-teman KKN Kelurahan Kedaton Jefri, Satria, Andin, Umay, Adel, Sabil, Dyah, dan Sofi serta teman-teman Pemberdayaan Masyarakat (PM) atas dukungan, dan doa yang tetap mengalir dari di tengah kesibukan masing-masing.
12. Teman-teman pimpinan HIMATIKA Unila periode 2024, dan bidang eksternal periode 2023 yang selalu memberikan semangat, doa, dan dukungan terus menerus yang tidak pernah berhenti mengalir.
13. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan laporan ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 14 April 2026

Zulfakhri Dwiantara

DAFTAR ISI

| | |
|--|-------------|
| DAFTAR ISI | xiii |
| DAFTAR GAMBAR | xiv |
| DAFTAR TABEL | xv |
| I PENDAHULUAN | 1 |
| 1.1 Latar Belakang Masalah | 1 |
| 1.2 Tujuan Penelitian | 3 |
| 1.3 Manfaat Penelitian | 3 |
| II TINJAUAN PUSTAKA | 4 |
| 2.1 Semigrup dan Grup | 4 |
| 2.2 Ring | 7 |
| 2.3 Jumlah langsung (<i>direct sum</i>) | 14 |
| 2.4 Ring Polinomial $R[x]$ | 15 |
| 2.5 Ring Semigrup $R[S]$ | 17 |
| 2.6 Derivasi | 20 |
| 2.6.1 Derivasi Jordan | 21 |
| 2.6.2 Derivasi <i>Triple</i> Jordan | 23 |
| III METODE PENELITIAN | 27 |
| 3.1 Waktu dan Tempat Penelitian | 27 |
| 3.2 Metode Penelitian | 27 |
| IV HASIL DAN PEMBAHASAN | 29 |
| 4.1 Derivasi <i>Triple</i> Jordan pada Ring $R[S]$ | 29 |
| 4.2 Derivasi <i>Triple</i> Jordan pada Ring $(\bigoplus_{i=1}^n R_i)[S]$ | 41 |
| V KESIMPULAN DAN SARAN | 49 |
| 5.1 Kesimpulan | 49 |
| 5.2 Saran | 50 |
| DAFTAR PUSTAKA | 51 |

DAFTAR GAMBAR

| | | |
|-----|---|----|
| 3.1 | Langkah-langkah penelitian | 28 |
| 4.1 | Ilustrasi pemetaan $\delta \circ f$ | 30 |

DAFTAR TABEL

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Konsep dasar kalkulus yang menjadi landasan bagi konsep derivasi, pada abad ke-17 pertama kali diperkenalkan oleh Newton (1736) dengan konsep *fluks* yang berjudul *The Method of Fluxions and Infinite Series; with its Application to the Geometry of Curve-Lines*. Seiring berjalannya waktu, pada abad ke-19 Reimann (1851) dan Weierstrass (1868) memberikan kontribusi signifikan dalam pengembangan teori fungsi kompleks, termasuk perluasan konsep derivasi. Kemudian, pada abad ke-20, konsep derivasi berhasil diabstraksikan dan diterapkan dalam struktur aljabar, khususnya dalam modul oleh Noether (1918). Ring merupakan himpunan yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian. Pada ring, Felzenswalb dan Lanski (1983) menyatakan bahwa d adalah derivasi dari ring R jika bersifat aditif dan memenuhi aturan Leibniz.

Perkembangan dari teori derivasi mengarah pada pengenalan derivasi Jordan, yang pertama kali diperkenalkan oleh Jordan (1934) dalam konteks aljabar non-asosiatif. Derivasi Jordan merupakan generalisasi dari turunan biasa, dengan aturan yang lebih kompleks, termasuk aturan elemen kuadrat. Studi tentang derivasi Jordan berkembang lebih luas, terutama dalam teori ring. Pada tahun 1980-an, beberapa peneliti sudah mulai melakukan penelitian terkait derivasi *triple*. Xiuhai dan Haifang (2021), menjadi salah satu peneliti yang telah mengembangkan penelitian terkait derivasi *triple* dengan membahas pemetaan yang bersifat nonlinear, *nonglobal*, dan *semi-Jordan triple derivable* yang didefinisikan pada *triangular algebra* yang bebas dari 2-torsi. Mereka berhasil membuktikan bahwa pemetaan semacam itu merupakan derivasi. Ai-qun dkk., (2022) membuktikan bahwa setiap derivasi Jordan *semi-triple* merupakan derivasi, serta setiap Jordan *centralizer* merupakan *centralizer* biasa.

Tidak hanya itu, penelitian terbaru juga berfokus pada bentuk *generalized Jordan triple derivations*. Khan dkk., (2024) mengkaji generalisasi dari konsep

derivasi klasik dengan memasukkan kombinasi operasi Jordan (simetris) dan *skew* (antisimetri). Kemudian pada tahun yang sama, Fei dkk., (2024) meneliti derivasi tingkat tinggi (*higher derivation*) yang berupa derivasi *triple* Jordan pada aljabar yang disebut *trivial extension algebra* menggunakan operasi (*).

Perkembangan derivasi *triple* Jordan masih terus dikembangkan hingga saat ini oleh beberapa peneliti. Ansari dkk., (2024) menyelidiki struktur generalisasi derivasi *triple* Jordan pada ring semiprima, dengan menambahkan elemen penting berupa endomorfisma ζ dan ξ . Penelitian ini menunjukkan bahwa, dengan kondisi yang tepat, pemetaan semacam ini dapat direduksi menjadi derivasi biasa. Ini memberikan kontribusi besar dalam memahami bagaimana struktur lebih kompleks dalam ring dapat menyederhanakan perilaku derivasi menjadi bentuk yang lebih mudah dianalisis. Sitompul (2025) melakukan penelitian terbaru mengenai derivasi Jordan pada ring polinomial $R[X]$.

Dengan adanya penelitian mengenai derivasi Jordan pada ring polinomial $R[X]$, maka penelitian ini mengarah untuk mengembangkan kajian lebih lanjut ke arah yang lebih umum, yaitu derivasi *triple* Jordan pada ring semigrup $R[S]$. Karena masih sedikit penelitian tentang derivasi pada ring semigrup $R[S]$ dan belum ada peneliti yang membahas tentang derivasi *triple* Jordan pada ring semigrup $R[S]$. Oleh karena itu, penelitian ini akan membahas mengenai hubungan antara derivasi *triple* Jordan pada ring dan derivasi *triple* Jordan pada ring semigrup $R[S]$. Selain itu, dalam penelitian ini juga akan diselidiki sifat-sifat derivasi *triple* Jordan, baik pada ring secara umum maupun pada ring semigrup $R[S]$. Perluasan penelitian ke ring semigrup diharapkan dapat memberikan hasil yang lebih luas dan mendalam dalam memahami sifat-sifat derivasi *triple* Jordan pada struktur aljabar yang lebih umum berdasarkan pengembangan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. menyelidiki hubungan sifat-sifat derivasi *triple* Jordan pada ring dan pada ring semigrup;
2. mengkontruksi contoh-contoh derivasi *triple* Jordan pada ring semigrup berdasarkan derivasi *triple* Jordan pada ring.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang ingin diperoleh dari penelitian ini yaitu:

1. mengetahui sifat-sifat derivasi *triple* Jordan pada ring semigrup;
2. menambah referensi penelitian selanjutnya mengenai derivasi *triple* Jordan pada ring semigrup.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, akan diuraikan konsep dasar yang menjadi landasan teori untuk mendukung pembahasan pada bagian selanjutnya.

2.1 Semigrup dan Grup

Grup dan semigrup merupakan dua struktur dasar dalam struktur aljabar, dimana grup memenuhi empat aksioma sedangkan semigrup hanya mensyaratkan sifat tertutup dan asosiatif. Pemahaman terhadap keduanya menjadi landasan penting untuk mempelajari struktur aljabar yang lebih kompleks.

Jika pada grup terdapat empat aksioma yang harus dipenuhi, maka pada semigrup hanya dua aksioma saja yang berlaku. Berikut ini disajikan definisi dari semigrup.

Definisi 2.1.1 Diberikan himpunan tak kosong S dan operasi biner

$$* : S \times S \rightarrow S$$

yang memasangkan setiap elemen $(x, y) \in S \times S$ dengan tepat satu kawan $*(x, y) \in S$. Pasangan S dan $*$, dinotasikan dengan $\langle S, * \rangle$ disebut grupoid. Jika relasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu $*(x, *(y, z)) = (*(x, y), z)$ untuk sebarang $x, y, z \in S$ maka grupoid $\langle S, * \rangle$ disebut semigrup (Surodjo dan Susanti, 2024).

Definisi 2.1.2 Semigrup S disebut semigrup komutatif atau semigrup Abel jika operasi biner S bersifat komutatif, yaitu jika berlaku $xy = yx$ untuk sebarang $x, y \in S$ (Surodjo dan Susanti, 2024).

Contoh 2.1.1 Pasangan semua himpunan bilangan asli \mathbb{N} dengan operasi penjumlahan bilangan $+$ merupakan semigrup sekaligus semigrup komutatif.

Definisi 2.1.3 Diberikan sebarang semigrup S . Himpunan bagian $\emptyset \neq S' \subseteq S$ disebut subsemigrup di dalam S , dinotasikan dengan $S' \leq S$ jika S' tertutup terhadap operasi biner S , yaitu $S'S' \subseteq S$. Dalam hal ini, semigrup S disebut supsemigrup dari S' (Surodjo dan Susanti, 2024).

Contoh 2.1.2 Himpunan $\{2n | n \in \mathbb{N}\}$, yaitu himpunan semua bilangan asli genap, membentuk subsemigrup di dalam semigrup $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ terhadap operasi $+$. Akan tetapi, walaupun pasangan $\langle \{2n | n \in \mathbb{N}\}, \cdot \rangle$ juga merupakan semigrup, $\langle \{2n | n \in \mathbb{N}\}, \cdot \rangle$ bukanlah subsemigrup $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ karena operasi yang digunakan berbeda sehingga tidak tertutup terhadap operasi biner yang digunakan.

Salah satu langkah penting untuk mendalami konsep-konsep yang lebih kompleks dalam teori aljabar adalah memahami struktur dasar dalam struktur aljabar, yaitu grup.

Definisi 2.1.4 Operasi biner $*$ pada himpunan S merupakan fungsi dari $S \times S$ ke S . Untuk setiap $(a, b) \in S \times S$, $*(a, b)$ di S dinotasikan dengan $a * b$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berikut diberikan contoh operasi biner.

Contoh 2.1.3 Misalkan $M(R)$ merupakan himpunan semua matriks dengan entri-entri bilangan real. Operasi penjumlahan matriks pada $M(R)$ bukan merupakan operasi biner karena penjumlahan dua matriks $A + B$ tidak dapat didefinisikan jika kedua matriks tersebut mempunyai ukuran yang sama.

Struktur aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu dinamakan grup.

Definisi 2.1.5 Suatu grup $\langle G, * \rangle$ terdiri dari himpunan G bersama operasi biner $*$ yang didefinisikan pada G dan memenuhi aksioma berikut:

1. operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$;
2. terdapat elemen identitas e , yaitu untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$;
3. untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen invers $a' \in G$ sehingga berlaku $a * a' = a' * a = e$

(Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.4 Himpunan \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , dan \mathbb{R} merupakan grup terhadap operasi penjumlahan. himpunan \mathbb{R}^* (himpunan bilangan real yang tak nol), \mathbb{Q}^* (himpunan bilangan rasional yang tak nol), \mathbb{C}^* (himpunan bilangan kompleks yang tak nol) merupakan grup terhadap operasi perkalian.

Apabila operasi biner pada suatu grup bersifat komutatif, maka dapat didefinisikan grup komutatif atau biasa disebut grup Abel sebagai berikut.

Definisi 2.1.6 Grup G dikatakan grup komutatif (grup Abel) jika operasi biner $*$ bersifat komutatif, yaitu $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in G$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.5 Himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ yang dapat dibalik (*invertible*) merupakan grup terhadap operasi perkalian matriks. Grup ini dinamakan *general linear group* berderajat n dan dinotasikan dengan $GL(n, \mathbb{R})$. Karena operasi perkalian matriks tidak bersifat komutatif, maka $GL(n, \mathbb{R})$ bukan merupakan grup komutatif.

Contoh 2.1.6 Diberikan himpunan bilangan bulat $4\mathbb{Z} = \{4n | n \in \mathbb{Z}\}$. Akan ditunjukkan $4\mathbb{Z}$ merupakan grup.

1. Diberikan sebarang $a, b, c \in 4\mathbb{Z}$, dengan $a = 4x, b = 4y$, dan $c = 4z$, untuk suatu bilangan bulat x, y, z . Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}(a + b) + c &= (4x + 4y) + 4z \\ &= 4x + (4y + 4z) \\ &= a + (b + c).\end{aligned}$$

2. Diberikan sebarang $a \in 4\mathbb{Z}$, dengan $a = 4x$, untuk suatu $x \in \mathbb{Z}$. Terdapat $0 \in 4\mathbb{Z}$ sehingga,

$$\begin{aligned}a + 0 &= 4x + 0 \\ &= 4x \\ &= a, \\ 0 + a &= 0 + 4x \\ &= 4x \\ &= a.\end{aligned}$$

Jadi, terdapat elemen identitas, yaitu $0 \in 4\mathbb{Z}$.

3. Diberikan sebarang $a \in 4\mathbb{Z}$, dengan $a = 4x$, untuk suatu $x \in \mathbb{Z}$. Terdapat $-a = -4x \in 4\mathbb{Z}$ sehingga,

$$a + (-a) = 4x + (-4x) = (-a) + a = (-4x) + 4x = 0.$$

Jadi, setiap $a \in 4\mathbb{Z}$ mempunyai elemen invers terhadap operasi penjumlahan.

Dari (1), (2), dan (3), terbukti bahwa $\langle 4\mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup.

Subgrup secara umum merupakan himpunan bagian dari suatu grup yang juga memenuhi aksioma-aksioma grup terhadap operasi yang sama. Berikut definisi dari subgrup.

Definisi 2.1.7 Diberikan himpunan bagian H dari grup G yang tertutup terhadap operasi biner pada G . Himpunan H dikatakan subgrup G jika terhadap operasi biner yang sama pada G , H merupakan grup. Selanjutnya, H subgrup G dinotasikan dengan $H \leq G$ atau $H < G$ yang berarti H subgrup G , tetapi $H \neq G$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Untuk lebih jelasnya, berikut diberikan contoh subgrup dari suatu grup.

Contoh 2.1.7 Himpunan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan subgrup $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ karena memenuhi semua syarat subgrup.

2.2 Ring

Sebelum dilanjutkan pembahasan mengenai derivasi *triple* Jordan, terlebih dahulu perlu diketahui beberapa konsep dasar dalam teori ring. Berikut akan dijelaskan definisi ring dan sifat-sifatnya.

Definisi 2.2.1 Diberikan suatu himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi yakni $+$ (operasi penjumlahan) dan \cdot (operasi perkalian). Struktur $\langle R, +, \cdot \rangle$ dinamakan ring jika memenuhi aksioma:

1. $\langle R, + \rangle$ grup Abel, yaitu:

- (a) untuk setiap $a, b \in R, a + b \in R$;
- (b) untuk setiap $a, b, c \in R, (a + b) + c = a + (b + c)$;
- (c) terdapat $e \in R$, sehingga untuk setiap $a \in R, a + e = e + a = a$;
- (d) untuk setiap $a \in R$, terdapat $a^{-1} \in R, a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$ sehingga (a^{-1} dinamakan invers dari a);
- (e) untuk setiap $a, b \in R, a + b = b + a$.

2. $\langle R, \cdot \rangle$ semigrup, yaitu:

- (a) untuk setiap $a, b \in R, a \cdot b \in R$;
- (b) untuk setiap $a, b, c \in R, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

3. Sifat distributif kiri dan distributif kanan, yakni untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku:

- (a) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
- (b) $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

(Rasiman, 2018).

Contoh 2.2.1 Akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4 \rangle$ merupakan suatu ring dengan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$.

1. $\langle \mathbb{Z}_4, +_4 \rangle$ merupakan grup Abel

2. $\langle \mathbb{Z}_4, \cdot_4 \rangle$ semigrup, yaitu:

- (a) untuk setiap $f, g \in \mathbb{Z}_4$ dan $s \in \mathbb{Z}$, berlaku:

$$(fg)(s) = f(s)g(s) \in \mathbb{Z},$$

sehingga, operasi \cdot bersifat tertutup di \mathbb{Z}_4 ;

(b) untuk setiap $f, g, h \in \mathbb{Z}_4$ dan $s \in \mathbb{Z}$, berlaku:

$$\begin{aligned}
 ((fg)h)(s) &= (fg)(s)h(s) \\
 &= (f(s)g(s))h(s) \\
 &= f(s)g(s)h(s) \\
 &= f(s)(g(s)h(s)) \\
 &= f(s)(gh(s)) \\
 &= (f(gh))(s)
 \end{aligned}$$

jadi, $((fg)h)(s) = (f(gh))(s)$ artinya operasi \cdot bersifat asosiatif;

3. untuk setiap $f, g, h \in \mathbb{Z}_4$ dan $s \in \mathbb{Z}$, berlaku:

$$\begin{aligned}
 (f(g+h))(s) &= f(s)(g(s) + h(s)) \\
 &= f(s)g(s) + f(s)h(s) \\
 &= ((fg) + (fh))(s);
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 ((f+g)h)(s) &= (f(s) + g(s))h(s) \\
 &= f(s)h(s) + g(s)h(s) \\
 &= ((fh) + (gh))(s).
 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\langle \mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4 \rangle$ merupakan suatu ring.

Definisi 2.2.2 Dalam suatu ring R , operasi $n \cdot a$ berarti elemen a dari ring tersebut dijumlahkan dengan dirinya sendiri sebanyak n kali. Secara formal, definisi operasi ini dapat dijelaskan sebagai berikut.

1. jika $n > 0$, maka $n \cdot a$ didefinisikan:

$$n \cdot a = \underbrace{a + a + a + a + \cdots + a}_n$$

yang menunjukkan bahwa elemen a dioperasikan dengan dirinya sendiri sebanyak n kali.

2. jika $n = 0$, maka $n \cdot a$ didefinisikan:

$$n \cdot a = 0$$

3. jika $n < 0$, maka $n \cdot a$ didefinisikan:

$$n \cdot a = \underbrace{(-a) + (-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_n$$

yang menunjukkan bahwa elemen $-a$ yaitu invers aditif dari a dijumlahkan sebanyak n kali

(Rasiman, 2018).

Contoh 2.2.2 Dalam ring matriks $M_2(\mathbb{R})$, yaitu himpunan matriks berukuran 2×2 dengan entri berupa bilangan real. Diberikan sebarang matriks A di $M_2(\mathbb{R})$ sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Jika $n = 3$, maka operasi $n \cdot a$ didefinisikan sebagai penjumlahan matriks A sebanyak 3 kali, yang dapat dituliskan secara matematis sebagai:

$$3 \cdot A = A + A + A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{bmatrix}.$$

Jadi, operasi $n \cdot a$ dalam ring matriks mempresentasikan penjumlahan a dengan dirinya sendiri sebanyak n kali.

Berikut akan dibahas tentang karakteristik ring.

Definisi 2.2.3 Karakteristik ring R yang dinotasikan dengan $\text{char}(R)$ adalah bilangan bulat positif terkecil n yang memenuhi $n \cdot 1_R = 0$ dengan 1_R adalah elemen identitas perkalian di R dan $n \cdot 1_R$ adalah penjumlahan 1_R sebanyak n kali. Jika tidak ada bilangan bulat positif n yang memenuhi kondisi tersebut, maka karakteristik ring R didefinisikan sebagai 0 (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berikut diberikan contoh karakteristik ring.

Contoh 2.2.3 Ring modulo $n(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ merupakan ring dengan karakteristik n karena $n \cdot 1_R = 0$.

Berikut akan dibahas definisi tentang ring komutatif.

Definisi 2.2.4 Suatu ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ dikatakan ring komutatif jika R komutatif terhadap perkalian yaitu berlaku $a \cdot b = b \cdot a$, untuk setiap $a, b \in R$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berikut diberikan contoh pada ring komutatif.

Contoh 2.2.4 Ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$, dan $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$, masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.

Dalam teori aljabar, ideal dari suatu ring R adalah himpunan bagian $I \subseteq R$ yang memenuhi sifat-sifat tertentu sehingga I kompatibel dengan struktur aljabar dari R . Ideal dibedakan menjadi dua jenis, yaitu ideal kiri dan ideal kanan, tergantung pada sisi perkalian yang digunakan dalam definisinya. Berikut ini disajikan definisi formal dari ideal.

Definisi 2.2.5 Diberikan ring R dan himpunan tak kosong I yang merupakan himpunan bagian dari R . Himpunan I disebut ideal kiri dari R jika:

1. untuk setiap $a, b \in I$, berlaku $a - b \in I$;
2. untuk setiap $a \in I, r \in R$, berlaku $ra \in I$.

Definisi 2.2.6 Diberikan ring R dan himpunan tak kosong I yang merupakan himpunan bagian dari R . Himpunan I disebut ideal kanan dari R jika:

1. untuk setiap $a, b \in I$, berlaku $a - b \in I$;
2. untuk setiap $a \in I, r \in R$, berlaku $ar \in I$.

Jika himpunan bagian I dan R merupakan ideal kiri sekaligus ideal kanan maka I disebut ideal atau ideal dua sisi dari ring R (Rasiman, 2018).

Contoh 2.2.5 Diberikan ring bilangan bulat \mathbb{Z} dan himpunan bagian tak kosong $2\mathbb{Z}$ yang merupakan himpunan semua bilangan bulat kelipatan dari 2, yaitu:

$$2\mathbb{Z} = \{3k | k \in \mathbb{Z}\}$$

Akan dibuktikan bahwa $2\mathbb{Z}$ adalah ideal di \mathbb{Z} .

1. Diberikan sebarang $a = 2k$ dan $b = 2m$ dengan $k, m \in \mathbb{Z}$, berlaku:

$$a - b = 2k - 2m = 2(k - m) \in \mathbb{Z},$$

karena $k - m$ juga merupakan bilangan bulat.

2. Diberikan sebarang $a \in \mathbb{Z}$ dan $a = 2k \in 2\mathbb{Z}$, berlaku:

$$x \cdot a = x \cdot 2k = 2(x \cdot k);$$

$$a \cdot x = 2k \cdot x = 2(k \cdot x);$$

karena $x \cdot k$ dan $k \cdot x$ adalah bilangan bulat sehingga $x \cdot a$ dan $a \cdot x \in 2\mathbb{Z}$.

Berdasarkan i) dan ii), terbukti bahwa $2\mathbb{Z}$ adalah ideal di \mathbb{Z} .

Dalam teori aljabar, khususnya dalam konteks ring, kombinasi linear merujuk pada ekspresi yang melibatkan penjumlahan elemen-elemen dari ring yang dikalikan dengan koefisien yang juga berasal dari ring tersebut. Konsep ini memainkan peran penting dalam pembentukan ideal dan struktur lainnya dalam ring. Berikut ini adalah definisi formal dari kombinasi linear dalam ring.

Definisi 2.2.7 Diberikan ring R . Jika r_1, r_2, \dots, r_n adalah elemen-elemen dari ring R dan a_1, a_2, \dots, a_n adalah koefisien dalam ring R , maka kombinasi linear dari elemen-elemen r_1, r_2, \dots, r_n dengan koefisien elemen dari R yang didefinisikan sebagai berikut.

$$a_1r_1 + a_2r_2 + \dots + a_nr_n$$

(Artin, 2011).

Berikut contoh kombinasi linear pada ring.

Contoh 2.2.6 Diberikan ring $6\mathbb{Z}$ dengan elemen-elemen dalam ring ini yaitu $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, dan operasi yang dilakukan yaitu perkalian modulo 6. Pilih $r_1 = \bar{2}$ dan $r_2 = \bar{3} \in 6\mathbb{Z}$, lalu pilih koefisien $a_1 = 4$ dan $a_2 = 5$.

Kombinasi linear dari r_1 dan r_2 dengan koefisien a_1 dan a_2 adalah:

$$\begin{aligned} a_1 r_1 + a_2 r_2 &= 4 \cdot \bar{2} + 5 \cdot \bar{3} \\ &= 8 + 15 \\ &= 23 \pmod{6} \\ &= \bar{5}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, kombinasi linear $4 \cdot \bar{2} + 5 \cdot \bar{3}$ di ring $6\mathbb{Z}$ adalah $\bar{5}$.

Definisi 2.2.8 Misalkan R dan R' adalah ring. Suatu fungsi $f : R \rightarrow R'$ disebut homomorfisma jika untuk setiap $a, b \in R$ berlaku:

1. $f(a + b) = f(a) + f(b)$;
2. $f(ab) = f(a)f(b)$.

Suatu homomorfisma ring yang bijektif disebut isomorfisma ring (Rasiman, 2018).

Contoh 2.2.7 Diberikan suatu ring \mathbb{Z} . Didefinisikan suatu pemetaan $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dengan

$$f(a) = a, \text{ untuk } a \in \mathbb{Z}$$

Akan ditunjukkan bahwa f merupakan isomorfisma ring. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$

1. Akan ditunjukkan $f(a + b) = f(a) + f(b)$.

$$\begin{aligned} f(a + b) &= ((a) + (b)) \\ &= (a) + (b) \\ &= f(a) + f(b). \end{aligned}$$

2. Akan ditunjukkan $f(ab) = f(a)f(b)$.

$$\begin{aligned} f(ab) &= (ab) \\ &= (a)(b) \\ &= f(a)f(b). \end{aligned}$$

3. Akan ditunjukkan f bersifat bijektif.

(a) Untuk setiap $f(a) = f(b)$ berlaku $a = b$.

(b) Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, terdapat $b \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(a) = f(b) = b$.

Dengan demikian, terbukti f isomorfisma ring.

Suatu elemen a dalam ring R disebut elemen torsi apabila terdapat bilangan bulat tak nol $n \in \mathbb{Z}$ sehingga $na = 0$. Ring R dikatakan bebas torsi apabila satu-satunya elemen torsi dalam R adalah elemen nol. Sebagai kasus khusus, ring R disebut bebas 2-torsi apabila tidak terdapat elemen tak nol $a \in R$ yang memenuhi $2a = 0$. Dengan kata lain, kondisi $2a = 0$ hanya dapat terjadi apabila $a = 0$. Definisi formalnya diberikan sebagai berikut

Definisi 2.2.9 Suatu ring R disebut bebas 2-torsi jika untuk setiap $a \in R$, $2a = 0$ maka $a = 0$ (Bresar, 1988).

Berikut diberikan contoh yang bukan ring bebas 2-torsi.

Contoh 2.2.8 Diberikan ring \mathbb{Z}_2 dengan operasi penjumlahan dan perkalian modulo 2. Diberikan $a = \bar{1} \in \mathbb{Z}_2$, diperoleh $2a = 2 \cdot \bar{1} = \bar{2} = \bar{0} \pmod{2}$. Pada ring \mathbb{Z}_2 terdapat elemen tak nol a , yaitu $a = \bar{1}$ yang memenuhi $2a = \bar{0}$. Dengan demikian, \mathbb{Z}_2 bukan ring bebas 2-torsi, atau ring bertorsi-2.

2.3 Jumlah langsung (*direct sum*)

Berikut diberikan definisi hasil jumlah langsung (*direct sum*) pada ring.

Definisi 2.3.1 Diberikan ring R_1, R_2, \dots, R_n . R adalah hasil kali kartesian pada himpunan R_i , dengan didefinisikan operasi pada R secara komponen demi komponen, yaitu:

1. $(a_1, a_2, \dots, a_i) + (b_1, b_2, \dots, b_i) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_i + b_i)$,
2. $(a_1, a_2, \dots, a_i) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_i) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_i \cdot b_i)$,
3. $-(a_1, a_2, \dots, a_i) = (-a_1, -a_2, \dots, -a_i)$.

(Hartley dan Hawkes, 1970).

Berikut diberikan sebuah contoh yang menggambarkan penerapannya.

Contoh 2.3.1 Diberikan sebarang ring \mathbb{Z}_2 dan \mathbb{Z}_3 , dengan $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. Jumlahan langsung dari \mathbb{Z}_2 dan \mathbb{Z}_3 adalah: $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}\} \oplus \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2})\}$.

2.4 Ring Polinomial $R[x]$

Sebelum membahas ring polinomial, akan didefinisikan notasi untuk polinomial atas suatu ring R .

Definisi 2.4.1 Diberikan ring R dan $R[x]$ merupakan himpunan semua urutan elemen-elemen dari $R(a_0, a_1, \dots)$ sedemikian sehingga $a_i = 0$ untuk semua kecuali sejumlah terbatas dari indeks i .

- (i) $R[x]$ adalah ring dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan oleh:

$$(a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$$

dan

$$(a_0, a_1, \dots)(b_0, b_1, \dots) = (c_0, c_1, \dots)$$

dengan

$$C_n = \sum_{i=0}^n a_{n-i}b_i = a_n b_0 + a_{n-1}b_1 + \dots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n = \sum_{k+j=n} a_k b_j.$$

- (ii) Jika R komutatif (atau ring dengan identitas, atau ring tanpa pembagi nol, atau domain integral), maka $R[x]$ juga demikian.
- (iii) Pemetaan $R \rightarrow R[x]$ yang diberikan oleh $r \rightarrow (r, 0, 0, \dots)$ adalah monomorfisma ring.

(Hungerford, 1974).

Selanjutnya, akan dibahas notasi yang lebih umum untuk polinomial.

Definisi 2.4.2 Diberikan ring R dengan elemen satuan dan sebarang $(0, 1_R, 0, 0, \dots) \in R[x]$ dinotasikan dengan x sehingga diperoleh:

- (i) $x^n = (0, 0, \dots, 0, 1_R, 0, \dots)$, dengan 1_R adalah suku ke $n + 1$
- (ii) jika $r \in R$ maka untuk setiap $n \geq 0$, berlaku $rx^n = x^n r = (0, \dots, 0, r, 0, \dots)$, dengan r adalah suku ke $n + 1$
- (iii) untuk setiap $f(x) \in R[x]$, terdapat $n \in \mathbb{N}$ dan $a_0, \dots, a_n \in R$ sehingga $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$, dengan $a_i \in R$

(Hungerford, 1974).

Apabila ring R mempunyai elemen satuan, maka $x^0 = 1_R$. Kemudian polinomial $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$ dapat ditulis menjadi $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Dalam notasi ini, operasi penjumlahan dan perkalian di $R[x]$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i$$

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^m a_j x^j \right) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k$$

dengan,

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Jika $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in R[x]$, maka $a_i \in R$ adalah koefisien dari $f(x)$ dan a_0 adalah konstanta. Elemen dari R yang dapat dituliskan dengan $r = (r, 0, 0, \dots) = rx^0$ disebut polinomial konstan. Jika $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$, dengan $a_n \neq 0$, maka a_n disebut koefisien utama dari $f(x)$.

Tentu saja, sejauh mana $R[X]$ berfungsi sebagai model yang wajar bagi $R[X; S]$ sebagian bergantung pada sifat-sifat yang dimiliki S yang sama dengan \mathbb{Z}_0 . Sebagai contoh $R[X]$ berfungsi sebagai model yang baik untuk digeneralisasi ke $R[X_1, \dots, X_n]$ dalam beberapa persoalan teori ring, tetapi merupakan model yang

kurang baik untuk persoalan lainnya. Namun demikian, setiap ring polinomial $R[\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}]$ atas R dalam peubah yang saling komutatif Y_λ dapat dengan mudah dilihat sebagai isomorfik dengan suatu ring semigrup di atas R , seperti berikut. Misalkan $F = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Z}_\lambda$, di mana $\mathbb{Z}_\lambda = \mathbb{Z}_0$ untuk setiap λ , dan misalkan $\{e_\lambda\}$ menjadi basis bebas standar bagi F —yaitu, koordinat ke $-\lambda$ dari e_λ bernilai 1 dan semua koordinat lainnya 0.

2.5 Ring Semigrup $R[S]$

Konsep ring semigrup merupakan pengembangan dari ide klasik ring polinomial. Pada awalnya, ring polinomial $R[X]$ dibangun dengan memandang setiap polinomial sebagai fungsi dari himpunan pangkat-pangkat tak negatif bilangan bulat \mathbb{N}_0 ke ring koefisien R , dengan hanya sejumlah berhingga nilai tak nol.

Banyak sifat penting dari ring polinomial dapat diperluas ke kasus yang lebih umum, di mana eksponen polinomial bukan lagi bilangan bulat tak negatif, melainkan unsur dari semigrup komutatif S . Dengan demikian, ring semigrup $R[X; S]$ menjadi generalisasi langsung dari ring polinomial, di mana $R[X]$ adalah kasus khusus dengan $S = \mathbb{N}_0$.

Teorema 2.5.1 Misalkan R adalah ring komutatif dan S serta T adalah semigrup Abel aditif, maka

$$R[X; S \oplus T] \cong U = (R[X; S])[X; T],$$

yakni, ring semigrup dari T atas ring semigrup dari S atas R (Gilmer, 1978).

Bukti. Anggap elemen dari suatu ring semigrup sebagai fungsi dengan jumlah tak nol dari semigrup ke dalam ring. Dapat didefinisikan pemetaan

$$\phi : U \longrightarrow R[X; S \oplus T].$$

Jika $f \in U$ dan $(s, t) \in S \oplus T$, maka

$$[\phi(f)](s, t) = [f(t)](s).$$

Pemetaan ϕ ini terdefinisi dengan baik karena setiap elemen U merupakan fungsi yang terdefinisi dengan baik dari T ke dalam $R[X; S]$.

Lebih lanjut, ϕ bersifat surjektif, sebab jika $h \in R[X; S \oplus T]$, maka terdapat elemen $f \in U$ yang didefinisikan oleh

$$[f(t)](s) = h(s, t),$$

sehingga $\phi(f) = h$. Jika $f \neq g$, maka terdapat $t \in T$ sedemikian sehingga $f(t) \neq g(t)$. Diperoleh $[f(t)](s) \neq [g(t)](s)$ untuk beberapa $s \in S$, dan karenanya $\phi(f) \neq \phi(g)$.

Untuk melengkapi pembuktian, akan ditunjukkan bahwa ϕ adalah homomorfisma ring. Diberikan sebarang $f, g \in U$ dan $(s, t) \in S \oplus T$, berlaku:

$$\begin{aligned} [\phi(f + g)](s, t) &= [(f + g)(t)](s) \\ &= [f(t) + g(t)](s) \\ &= [f(t)](s) + [g(t)](s) \\ &= [\phi(f)](s, t) + [\phi(g)](s, t) \\ &= [\phi(f) + \phi(g)](s, t), \end{aligned}$$

sehingga

$$\phi(f + g) = \phi(f) + \phi(g).$$

Lebih lanjut,

$$\begin{aligned} [\phi(fg)](s, t) &= [fg(t)](s) \\ &= \sum_{a+b=t} f(a)g(b)(s) \\ &= \sum_{a+b=t} \sum_{c+d=s} [f(a)](c) \cdot [g(b)](d) \\ &= \sum_{(c,a)+(d,b)=(s,t)} [\phi(f)](c, a)[\phi(g)](d, b) \\ &= [\phi(f)\phi(g)](s, t), \end{aligned}$$

dan hal ini menunjukkan bahwa

$$\phi(fg) = \phi(f)\phi(g).$$

Oleh karena itu, ϕ adalah isomorfisma ring. ■

Definisi 2.5.1 Diberikan ring R dan semigrup T dan terhadap operasi penjumlahan sehingga dapat di kontruksi ring semigrup $R[T]$, yaitu himpunan

$$R[T] = \{f : T \rightarrow R \mid \text{supp}(f) \text{ berhingga}\}$$

dengan $\text{supp}(f) = \{t \in T \mid f(t) \neq 0\}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan fungsi

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t)$$

dan operasi perkalian fungsi

$$(fg)(t) = \sum_{x+y=t} f(x)g(y),$$

untuk setiap $t \in T, f, g \in R[T]$ (Gilmer, 1978).

Berikut diberikan contoh ring semigrup.

Contoh 2.5.1 Diberikan ring \mathbb{Z}_6 dan semigrup \mathbb{Z}_3 terhadap operasi penjumlahan sehingga dapat dikonstruksi ring semigrup $\mathbb{Z}_6[\mathbb{Z}_3]$, yaitu himpunan

$$\mathbb{Z}_6[\mathbb{Z}_3] = \{f : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_6 \mid \text{supp}(f) \text{ berhingga}\}$$

Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_6$. Didefinisikan $f : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_3$, dengan:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = a, \\ 1, & x = b, \\ 0, & \text{untuk } x \in \mathbb{Z}_6 / \{a, b\}. \end{cases}$$

Karena hanya terdapat dua elemen pada domain \mathbb{Z}_6 yang dipetakan ke nilai tak nol, maka *support* dari f yaitu

$$\text{supp}(f) = \{x \in \mathbb{Z}_6 \mid f(x) \neq 0\} = \{a, b\}.$$

Dengan demikian, $\text{supp}(f)$ merupakan himpunan berhingga sehingga fungsi f merupakan elemen dari $\mathbb{Z}_6[\mathbb{Z}_3]$.

2.6 Derivasi

Sebelum membahas lebih dalam, berikut akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai derivasi.

Definisi 2.6.1 Diberikan ring R , suatu fungsi $d : R \rightarrow R$ disebut derivasi pada R jika:

1. $d(a + b) = d(a) + d(b)$;
2. $d(ab) = d(a)b + ad(b)$

untuk setiap $a, b \in R$ (Ali dkk., 2024).

Berikut contoh derivasi.

Contoh 2.6.1 Diberikan $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Didefinisikan $d : R \rightarrow R$ sebagai berikut:

$$d \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan d merupakan derivasi.

Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.

1. Akan ditunjukkan d bersifat aditif, yaitu $d(A + B) = d(A) + d(B)$

$$\begin{aligned} d(A + B) &= d \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= d \left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(a_1 + a_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -a_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= d(A) + d(B). \end{aligned}$$

Karena $d(A + B) = d(A) + d(B)$, terbukti d bersifat aditif.

2. Akan ditunjukkan d memenuhi aturan Leibniz, yaitu $d(AB) = d(A)B + Ad(B)$

$$\begin{aligned} d(AB) &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(a_1a_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} d(A)B + Ad(B) &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -a_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -(a_1a_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(a_1a_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Karena $d(AB) = d(A)B + Ad(B)$, terbukti d memenuhi aturan Leibniz.

Karena kedua sifat terpenuhi, terbukti d merupakan derivasi pada $M_2(\mathbb{Z})$.

Berikut diberikan contoh derivasi pada ring.

Contoh 2.6.2 Untuk sebarang ring R bilangan bulat dengan didefinisikan $d : R \rightarrow R$ dengan aturan $d(a) = 0$ untuk semua $a \in R$. Jelas d adalah derivasi trivial.

2.6.1 Derivasi Jordan

Herstein menunjukkan ketertarikannya terhadap hubungan antara ring asosiatif dan struktur Jordan (Lie). Dalam usahanya menelusuri hubungan ini, ia mendefinisikan konsep yang kini dikenal sebagai turunan Jordan. Dimulai dari suatu ring R , ia mengonstruksi ring baru dengan operasi perkalian yang didefinisikan sebagai hasil

kali Jordan, yaitu $a \circ b = ab + ba$. Selanjutnya, ia mendefinisikan turunan Jordan d sebagai pemetaan aditif pada $\langle R, +, \circ \rangle$ yang memenuhi sifat berikut:

Definisi 2.6.2 Diberikan ring R . Pemetaan aditif $d : R \rightarrow R$ disebut derivasi Jordan jika memenuhi:

$$d(a^2) = d(a)a + ad(a).$$

Untuk setiap $a, b \in R$ (Herstein, 1957).

Selanjutnya, diberikan contoh derivasi Jordan.

Contoh 2.6.3 Diberikan ring $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Didefinisikan $d : R \rightarrow R$ sebagai berikut:

$$d \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan d merupakan derivasi Jordan.

Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Diperoleh

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \\ d(A^2) &= d \left(\begin{bmatrix} a^2 & ab \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & a^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} d(A)A + Ad(A) &= d \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jadi, $d(A^2) = d(A)A + Ad(A)$.

Terbukti d merupakan derivasi Jordan pada $M_2(\mathbb{Z})$.

2.6.2 Derivasi *Triple Jordan*

Derivasi *triple Jordan*, diperkenalkan sebagai pendekatan untuk menyelidiki struktur algebra melalui bentuk simetris dari komposisi elemen, yaitu ekspresi dalam bentuk aba . Berikut akan diberikan definisi derivasi *triple Jordan*.

Definisi 2.6.3 Diberikan ring R . Pemetaan aditif $d : R \rightarrow R$ disebut sebagai derivasi *triple Jordan* jika:

$$d(aba) = d(a)ba + ad(b)a + abd(a)$$

untuk setiap $a, b \in R$ (Najati dan Ardabil, 2008).

Contoh 2.6.4 Diberikan $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Didefinisikan $d : R \rightarrow R$ sebagai berikut:

$$d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan d merupakan derivasi *triple Jordan*.

Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.

1. Akan ditunjukkan $d(A + B) = d(A) + d(B)$.

$$\begin{aligned} d(A + B) &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a + e & b + f \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(a + e) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -e \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= d(A) + d(B). \end{aligned}$$

Terbukti $d(A + B) = d(A) + d(B)$.

2. Akan ditunjukkan $d(ABA) = d(A)BA + Ad(B)A + ABd(A)$.

$$\begin{aligned}
 d(ABA) &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
 &= d\left(\begin{bmatrix} ae & af \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
 &= d\left(\begin{bmatrix} aea & aeb \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -(aea) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
 d(A)BA + Ad(B)A + ABd(A) &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad + Ad(B)A + ABd(A) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad + ABd(A) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -(aea) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -(aea) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Karena kedua sifat terpenuhi, maka terbukti d merupakan derivasi *triple* Jordan pada $M_2(\mathbb{Z})$.

Contoh 2.6.5 Diberikan $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Didefinisikan $d : R \rightarrow R$ sebagai berikut:

$$d \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan d merupakan derivasi *triple* Jordan.

Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Berlaku:

1. Akan ditunjukkan $d(A + B) = d(A) + d(B)$.

$$\begin{aligned} d(A + B) &= d \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= d \left(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b+f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= d(A) + d(B). \end{aligned}$$

Terbukti $d(A + B) = d(A) + d(B)$.

2. Akan ditunjukkan $d(ABA) = d(A)BA + Ad(B)A + ABd(A)$.

$$\begin{aligned} d(ABA) &= d \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= d \left(\begin{bmatrix} ae & af \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= d \left(\begin{bmatrix} aea & aeb \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & aeb \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
 d(A)BA + Ad(B)A + ABd(A) &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad + Ad(B)A + ABd(A) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad + ABd(A) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & aeb \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & aeb \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Karena kedua sifat terpenuhi, maka terbukti d merupakan derivasi *triple* Jordan pada $M_2(\mathbb{Z})$.

BAB III

METODE PENELITIAN

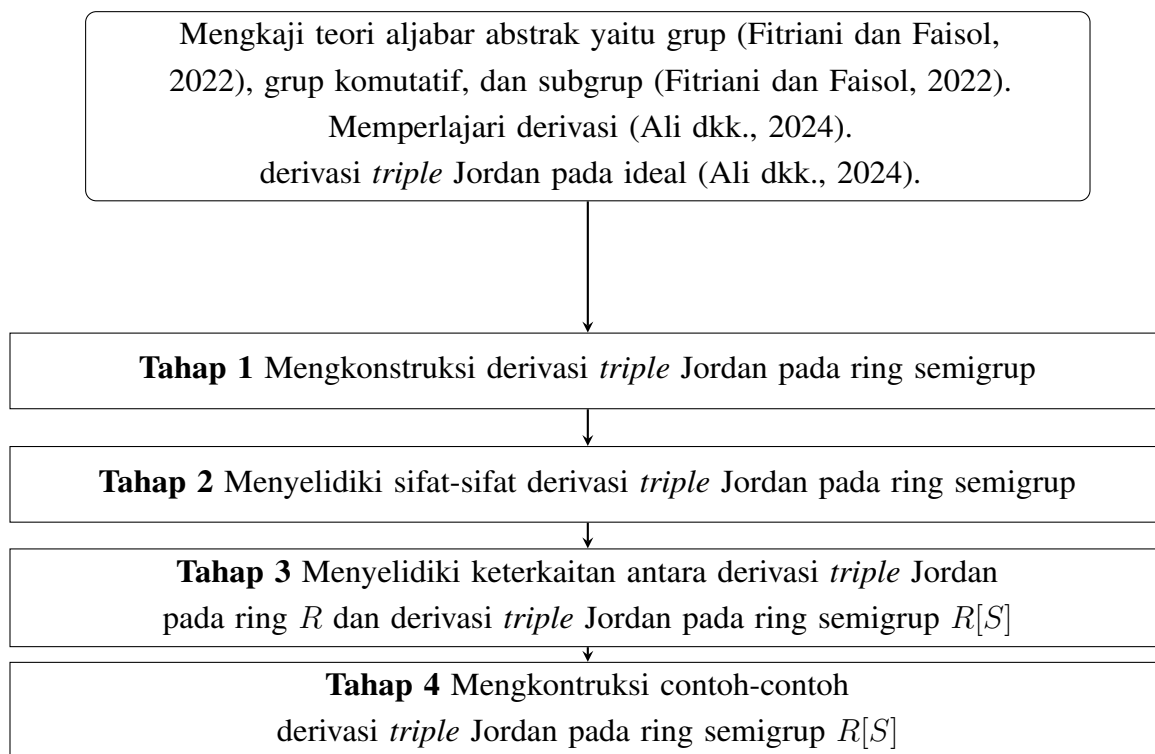
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 di Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur dan analisis teoritis, dengan mengumpulkan referensi seperti jurnal, artikel ilmiah, buku, dan sumber lainnya yang terkait dengan penelitian ini.

Secara umum langkah-langkah penelitian ini sebagai berikut.



Gambar 3.1 Langkah-langkah penelitian

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan mengenai derivasi *triple* Jordan pada ring semigrup $R[S]$, dapat disimpulkan bahwa sifat-sifat derivasi *triple* Jordan pada ring dapat diperluas ke dalam struktur aljabar yang lebih umum, yaitu ring semigrup. jika δ merupakan suatu derivasi *triple* Jordan, maka pemetaan $\bar{\delta}$ merupakan derivasi *triple* Jordan pada ring semigrup $R[S]$. Pada penelitian ini telah ditunjukkan bahwa pemetaan derivasi *triple* Jordan pada ring semigrup $R[S]$ tetap memenuhi sifat-sifat dasar derivasi *triple* Jordan pada ring.

Sifat derivasi *triple* Jordan pada ring juga dapat diperluas ke dalam penjumlahan langsung (*direct sum*) pada ring semigrup. Jika δ_i merupakan suatu derivasi *triple* Jordan, maka pemetaan $\hat{\delta}$ merupakan derivasi *triple* Jordan pada ring semigrup $\bigoplus R_i[S]$, telah ditunjukkan pula bahwa pemetaan derivasi *triple* Jordan pada ring semigrup $\bigoplus R_i[S]$ tetap memenuhi sifat-sifat dasar derivasi *triple* Jordan pada ring. Selain itu, pada penelitian ini juga berhasil dikonstruksi contoh-contoh derivasi *triple* Jordan pada ring semigrup $R[S]$. Dengan demikian, hasil penelitian ini menunjukkan bahwa konsep derivasi *triple* Jordan tidak hanya berlaku pada ring, tetapi juga dapat diterapkan pada ring semigrup sebagai bentuk pengembangan dari struktur aljabar yang lebih umum.

5.2 Saran

Penelitian ini masih terbatas pada pembahasan derivasi triple Jordan pada ring semigrup $R[S]$. Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya disarankan agar kajian mengenai derivasi triple Jordan dapat dikembangkan pada struktur aljabar lainnya yang lebih umum. Selain itu, penelitian selanjutnya juga dapat mengkaji bentuk generalisasi dari derivasi triple Jordan atau mengembangkan penelitian ini pada jenis ring yang berbeda sehingga dapat memperluas kajian mengenai derivasi dalam teori ring. Diharapkan penelitian selanjutnya dapat memberikan hasil yang lebih luas serta menambah referensi dalam bidang struktur aljabar, khususnya yang berkaitan dengan derivasi triple Jordan.

DAFTAR PUSTAKA

- Ai-qun M., Chen L., & Qin Z. (2022). Jordan semi-triple derivations and Jordan centralizers on generalized quaternion algebras. *AIMS Mathematics*, 8(3): 6026–6035
- Ansari A. Z., Shujat F., Mozumder M. R., & Ahmed W. (2024). Generalized Jordan Triple (ζ, ξ) -Derivation on Semiprime Rings. *Journal of Mahani Mathematical Research*, 13(5): 41-49
- Ali S., Rafique N. N., & Varshney V. (2024). Certain types of derivations in rings: A survey. *Indones. Math.soc*, 30(02), 256-306
- Artin, M. 2011. *Algebra 2nd Edition*. Boston, MA: Pearson Education
- Bresar, M. 1988. Jordan derivations on semiprime rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 104(4), 1003–1006.
- Fei X., Wang Z., Lu C., & Zhang H. (2024). Higher Jordan triple derivations on $*$ -type trivial extension algebras. *AIMS Mathematics*, 09(3), 6933-6950
- Felzenszwalb, B., & Lanski, C. (1983). On the Centralizers of Ideals and Nil Derivations. *Journal of Algebra*, 83(1), 520-530.
- Fitriani, & Faisol, A. (2022). *Grup*. Matematika, Yogyakarta.
- Gilmer R. (1978). *Commutative Semigroup Rings*. Chicago Lectures in Mathematics
- Hartley, B., & Hawkes, T.O. 1970. *Rings, Modules, and Linear Algebra*. Inggris: Cambridge University Press.
- Herstein N. (1957). Jordan Derivation of Prime Rings. *Yale University and University of Pennsylvania*, 1104-1110
- Hungerford T. W. (1974) *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York.

- Jordan P., Neumann J. V., & Wigner E. (1934). On an Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism. *Mathematics Department, Princeton University*, 35(01), 29-64
- Khan A. N., Darvish V., & Nouri M. (2024). A result on mixed skew and n-Jordan triple derivations on prime* -algebras. *Filomat*, 38(7), 2351–2359
- Najati A., & Ardabil, (2008). On Generalized Jordan Derivations of Lie Triple Systems. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 60 (135), 541–547
- Newton I., (1736). The Method of Fluxions and Infinite Series; with its Application to the Geometry of Curve-Lines. *London : printed by Henry Woodfall*
- Noether E., & Schmeidler W. (1918). Modules in Non-commutative Domains, especially Those Composed of Differential and Difference Expressions *Springer*, 1, 1–35
- Rasiman (2018). Teori Ring. *Universitas PGRI Semarang press*, Semarang.
- Riemann B., (1851). thesis on the theory of functions of a complex variable *Landmark Writings in Western Mathematics*.
- Sitompul D. E., (2025). Jordan Derivation on Module Polynimial Ring $R[x]$. *Integra:Journal on Integrated Mathematics and Computer Science*, 2(2), 41-47
- Surodjo B., & Susanti, Y. (2024). *Teori Semigrup*. Gadjah Mada University Press, Yogyakarta.
- Weierstrass K.,(1868). On the Theory of Bilinear and Quadratic Forms. (Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen). *Berl. Monatsber*
- Xiuhai F. & Haifang Z., (2021). A Class of Nonlinear Nonglobal Semi-Jordan Triple Derivable Mappings on Triangular Algebras. *Hindawi Journal of Mathematics*, 2021(1), 1-7