DERIVASI JORDAN PADA RING SEMIGRUP

Skripsi

Oleh

APRIAL WAHYUDI PRATAMA
NPM. 2217031151

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

ABSTRACT

JORDAN DERIVATION ON THE SEMIGROUP RING

By

Aprial Wahyudi Pratama

Given a ring R. An additif mapping $d : R \to R$ is called a Jordan derivation if d satisfies $d(a^2) = d(a)a + ad(a)$, for every $a \in R$. In this study, Jordan derivation are applied to the semigroup ring $R[S]$ to investigate its properties. The study begins by constructing a Jordan derivation on the semigroup ring $R[S]$, followed by an exploration of its specific properties within the algebraic structure, as well as the relationship between Jordan derivation on R and those on $R[S]$. Additionally, illustrative axamples are provided to support the theories and theorems obtained. The concept of Jordan derivation broadens the understanding of algebraic structures through its application to semigroup rings.

Keywords: Semigroup ring, derivation, Jordan derivation.

ABSTRAK

DERIVASI JORDAN PADA RING SEMIGRUP

Oleh

Aprial Wahyudi Pratama

Diberikan ring R. Suatu Pemetaan aditif $d : R \to R$ disebut derivasi Jordan jika d memenuhi $d(a^2) = d(a)a + ad(a)$, untuk setiap $a \in R$. Dalam penelitian ini, derivasi Jordan diterapkan pada ring semigrup $R[S]$ untuk menyelidiki sifat-sifatnya. Penelitian ini dimulai dengan mengonstruksikan derivasi Jordan pada ring semigrup $R[S]$, dilanjutkan dengan menyelidiki sifat-sifat khususnya dalam struktur aljabar serta hubungan antara derivasi Jordan pada R dan derivasi Jordan pada $R[S]$. Selain itu, diberikan contoh ilustrasi yang mendukung teori dan teorema yang diperoleh. Konsep derivasi Jordan memperluas pemahaman tentang struktur aljabar melalui penerapan pada ring semigrup.

Kata kunci: Ring semigrup, derivasi, derivasi Jordan.

DERIVASI JORDAN PADA RING SEMIGRUP

APRIAL WAHYUDI PRATAMA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

Judul Skripsi	:	**DERIVASI JORDAN PADA RING SEMIGRUP**
Nama Mahasiswa	:	*Aprial Wahyudi Pratama*
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031151**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**
NIP 198002062003121003	NIP 198406272006042001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.** ....

Sekretaris : **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **15 April 2026**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Aprial Wahyudi Pratama**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031151**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Derivasi Jordan pada Ring Semigrup**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 15 April 2026

Penulis

Aprial Wahyudi Pratama

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Aprial Wahyudi Pratama yang lahir di Bandar Lampung pada tanggal 16 Juli 2004. Penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara, putra dari pasangan Dedi Afriyadi dan Maryuli.

Penulis menempuh pendidikan di SDN 2 Sumberejo pada tahun 2010 sampai tahun 2016. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan sekolah menengah pertama di SMPN 13 Bandar Lampung pada tahun 2016 sampai tahun 2019. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan sekolah menengah atas di SMAN 7 Bandar Lampung pada tahun 2019 sampai tahun 2022.

Pada tahun 2022, penulis diterima di program studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Pada akhir tahun 2024, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Dinas Perhubungan Kota Bandar Lampung selama 40 hari sampai dengan Februari 2025. Selain itu, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Kelurahan Kupang Teba, Kecamatan Teluk Betung Utara, Kota Bandar Lampung, sampai dengan Agustus 2025.

Selama masa perkuliahan, penulis aktif mengikuti Unit Kegiatan Mahasiswa (UKM) Saintek Universitas Lampung serta menjalani pemagangan di Humas Universitas Lampung sebagai seorang jurnalis, guna mengasah kemampuan menulis dan memperluas pengalaman di luar bidang akademik.

KATA INSPIRASI

”Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya.”
(Al-baqarah [2]: 286)

”Sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan”
(Al-insyirah [94]: 6)

”It does not matter how slowly you go as long as you do not stop”
(Conficious)

”Ingatkan terus aku makna cukup”
(Tulus)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin
Dengan memanjatkan puji dan syukur ke hadirat Allah Subhanahu wa Ta'ala karena limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya.
Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu Alaihi Wasallam.
Dengan rasa syukur dan bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Ibuku Tercinta

Terima kasih kepada orang tuaku atas segala perjuangan, pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terima kasih selalu mengusahakan dan memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasi, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Derivasi Jordan pada Ring Semigrup” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktu untuk memberikan arahan, motivasi, saran, masukan serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sepanjang proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika sekaligus Penguji yang telah bersedia memberikan arahan, saran, dan evaluasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
4. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung
5. Teristimewa, untuk Ayah, Bunda, uni Salwa, dan Anin yang selalu memberikan dukungan, memotivasi, dan doa kepada penulis.
6. Untuk April, Cyntia, Najiya, Valens, Zahra, Fika, Karina, Puan, Vira, Salsa, Hana, dan Tri. Terima kasih telah menjadi bagian dari perjalanan ini. Kalian

bukan sekadar teman, tetapi tempat berbagi cerita, tawa, dan perjuangan. Kehadiran kalian membuat hari-hari di kampus terasa lebih berwarna dan bermakna. Semoga kebersamaan ini selalu menjadi kenangan yang hangat untuk diingat.

7. Untuk Razki, Jena, Made, Jo, Safira, Athalah, Fajar, Melati, dan Nadya. Terima kasih atas kebersamaan sejak masa sekolah menengah atas yang terus terjaga hingga saat ini. Di tengah proses penyusunan skripsi yang tidak selalu mudah, kalian selalu hadir memberikan dukungan, hiburan, dan semangat kepada penulis. Setiap cerita, tawa, dan perhatian sederhana dari kalian menjadi penguat yang membuat perjalanan ini terasa lebih ringan. Kebersamaan ini akan selalu menjadi kenangan berharga yang tidak terlupakan.

8. Untuk Coky, Margo, Zulfakhri, Shieffa, Desi, Rafael, Khoirul, dan bang Thomas. Terima kasih telah menjadi teman seperbimbingan dan seperjuangan dalam proses ini. Setiap diskusi, kebingungan, dan usaha yang kita lalui bersama menjadi bagian penting dalam menyelesaikan skripsi ini. Kehadiran kalian membuat perjalanan ini terasa lebih ringan dan penuh semangat. Semoga semua usaha yang telah kita jalani bersama membuahkan hasil terbaik.

9. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Imelda, Azzahra, Dhea, dan Cinta, sahabat penulis sejak SMP yang kembali dipertemukan di masa penyusunan skripsi ini.

10. Untuk Shalu, Mas Bagus, Raissa, Cindy, Vera, Mifta, Dimas, Alsya, Navisya, Kak Daffa, dan Kak Andri. Terima kasih atas kebersamaan dan bimbingan selama magang di Humas Unila. Kehadiran kalian memberikan pengalaman dan kenangan berharga dalam perjalanan ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 15 April 2025

Aprial Wahyudi Pratama

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Konsep umum derivasi pertama kali diperkenalkan oleh Newton dan Leibniz pada abad ke-17 sebagai dasar fundamental dalam analisis matematika. Seiring perkembangan ilmu pengetahuan, konsep derivasi mulai dikembangkan pada struktur aljabar yang lebih kompleks, khususnya melalui kajian derivasi pada ring dan aljabar. Derivasi dipandang sebagai suatu pemetaan aditif yang memenuhi aturan Leibniz, yaitu $d(xy) = d(x)y + xd(y)$, dan merupakan generalisasi langsung dari konsep turunuan dalam kalkulus (Herstein, 1968). Pada ring semigrup, derivasi ini diterapkan untuk melihat bagaimana elemen-elemen dalam ring berubah dibawah suatu transformsi melalui operasi diferensial.

Salah satu pengembangan teori derivasi meliputi pengenalan derivasi Jordan yang pertama kali dikenalkan pada tahun 1934 oleh Pascual Jordan sebagai struktur non-asosiatif untuk memodelkan besaran fisika dalam mekanika kuantum (Jordan dkk., 1934). Derivasi Jordan adalah generalisasi dari turunan biasa yang didefinisikan melalui syarat khusus pada elemen kuadrat, yaitu $d(a^2) = d(a)a + ad(a)$. Pada tahun 1957, Herstein mengenalkan konsep derivasi Jordan melalui pengembangan aljabar Jordan yang bertujuan untuk melihat sifat-sifat struktural baru pada ring non-komutatif dengan menggeneralisasi konsep derivasi klasik (Herstein, 1957). Di periode yang sama, Posner mengkaji sifat-sifat derivasi pada ring semiprima dan berhasil membuktikan bahwa hasil selisih antara dua derivasi yang diterapkan secara berurutan juga membentuk suatu derivasi (Posner, 1957). Lebih lanjut, pada tahun 1969, Martindale memperluas hasil Posner ke ring semiprima. Pada penelitiannya, ia menunjukkan bahwa terdapat hasil mengenai derivasi pada ring prima yang diterapkan pada struktur semiprima yang lebih umum melalui metode yang diperluas dan lebih teliti (Martindale, 1969). Brešar pada tahun 1988 menunjukkan bahwa derivasi Jordan pada banyak kelas ring otomatis akan menjadi derivasi biasa (Brešar, 1988).

Konsep derivasi Jordan berkembang pesat terutama dalam teori ring dan aljabar. Pada tahun 2016, Vishki dkk. mengkaji mengenai sifat derivasi Jordan tingkat tinggi pada aljabar ekstensi trivial serta memberikan konstruksi eksplisit dan contoh kontra untuk derivasi Jordan tingkat tinggi (Vishki dkk., 2016). Alkenani dkk. pada tahun 2017 membahas tentang aljabar segitiga serta jenis pemetaan tertentu yang disebut turunan Jordan yang diperumum dan multiplikatif untuk menunjukkan bahwa setiap pemetaan tertentu pada dasarnya merupakan turunan yang diperumum dan adatif (Alkenani dkk., 2017). Do Kim membahas mengenai derivasi Jordan pada ring semiprima serta komponen fundmentalnya di dalam aljabar Banach (Do Kim, 2018). Kim pada tahun 2019 mengkaji mengenai sifat-sifat khusus derivasi Jordan pada dua jenis struktur matematika, yaitu ring semiprima dan aljabar Banach (Kim, 2019). Ferreira dkk. pada tahun 2020 secara spesifik membuktikan bahwa derivasi Jordan yang diperumum pada ring semiprima dengan kondisi tertentu sebenarnya memiliki cakupan yang lebih luas dari definisinya (Ferreira dkk., 2020).

Pada tahun 2021, Liang mengkaji derivasi Jordan n-generalisasi dengan unsur satuan dan unsur idempoten yang tidak trivial memiliki sifat yang lebih kuat dari definisi awalnya (Liang, 2021). Di sisi lain, Bhushan dkk. mengkaji derivasi Jordan yang diperluas secara sentral dan diaplikasikan pada ring prima non-komutatif serta membuktikan bahwa ring tersebut merupakan aljabar sederhana sentral (Bhushan dkk., 2022), sedangkan Ghosh dan Prakash membahas karakteristik derivasi Jordan pada aljabar matriks dan aljabar matriks segitiga atas (Ghosh & Prakash, 2023). Selain itu, Zivari-Kazempour dalam penelitiannya mendefinisikan derivasi Jordan sebagai pemetaan linear yang memenuhi aturan khusus untuk kuadrat elemen (Zivari-Kazempour, 2024). Penelitian dilanjutkan oleh Leerawat dan Toka yang menemukan kondisi-kondisi pada ring prima atau ring semiprima yang hanya memenuhi pemetaan nol sebagai satu-satunya derivasi Jordan (Leerawat & Toka, 2024).

Pada penelitian terbaru, Yanti dan Wijayanti menggeneralisasi konsep derivasi dan derivasi Jordan pada sebuah struktur aljabar yaitu modul (Yanti & Wijayanti, 2025). Sitompul dkk. secara umum membahas derivasi Jordan pada ring polinomial $R[x]$ selalu merupakan derivasi biasa sehingga dalam struktur ring polinomial tidak terdapat derivasi Jordan yang berbeda dari derivasi klasik (Sitompul dkk., 2025). Melalui pengembangan ini, penerapan derivasi Jordan pada ring semigrup membuka peluang untuk mengkaji struktur aljabar melalui bentuk pemetaan yang lebih luas, sehingga mampu mempresentasikan interaksi yang kompleks antar elemen dalam ring.

Berdasarkan berbagai pengembangan mengenai derivasi Jordan yang telah dilakukan sebelumnya, belum ada penelitian mengenai derivasi Jordan pada ring semigrup. Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan mengkaji mengenai hubungan derivasi Jordan pada ring dan derivasi Jordan pada ring semigrup. Selain itu, akan diselidiki sifat-sifat derivasi Jordan pada ring semigrup pada penelitian ini.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. menyelidiki sifat-sifat derivasi Jordan pada ring semigrup;
2. mengonstruksi contoh-contoh derivasi Jordan pada ring semigrup;
3. menyelidiki hubungan antara derivasi Jordan pada ring R dengan derivasi Jordan pada ring semigrup.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. mengetahui sifat-sifat derivasi Jordan pada ring semigrup;
2. mengetahui hubungan antara derivasi Jordan pada ring R dengan derivasi Jordan pada ring semigrup;
3. menambah referensi penelitian selanjutnya mengenai derivasi Jordan pada ring semigrup.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas berbagai definisi dan konsep dasar yang berperan sebagai landasan teori serta menjadi acuan dalam proses analisis dan penyelesaian penelitian ini.

2.1 Grup dan Semigrup

Pada hakikatnya, grup adalah suatu himpunan yang memiliki struktur tertentu, yang dibangun melalui keberadaan sebuah operasi biner. Dengan demikian, sebelum mendalami definisi grup, perlu terlebih dahulu dipahami konsep dasar mengenai operasi biner.

Definisi 2.1.1 Operasi biner $*$ pada himpunan S merupakan fungsi dari $S \times S$ ke S. Untuk setiap $(a, b) \in S \times S$, $*(a, b)$ di S dinotasikan dengan $a * b$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berikut diberikan contoh operasi biner.

Contoh 2.1.1 Diberikan himpunan

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Akan ditunjukkan bahwa perkalian matriks merupakan operasi biner pada H.

Diberikan sebarang dua matriks

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \in H.$$

Diperoleh:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & ae+bf \\ 0 & cf \end{bmatrix}.$$

Karena $ad, ae+bf, cf \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{bmatrix} ad & ae+bf \\ 0 & cf \end{bmatrix} \in H.$$

Jadi, perkalian matriks merupakan operasi biner pada H.

Berdasarkan konsep operasi biner yang telah dijelaskan sebelumnya, dapat dibentuk suatu struktur aljabar dengan menetapkan aksioma-aksioma tertentu pada operasi tersebut. Struktur yang memenuhi sifat-sifat tersebut disebut grup.

Definisi 2.1.2 Suatu himpunan tak kosong G dikatakan grup terhadap operasi biner $*$, jika operasi tersebut memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. himpunan G tertutup terhadap operasi biner $*$, yaitu untuk setiap $a, b \in G$, berlaku $a * b \in G$;
2. operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$, berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$;
3. terdapat elemen identitas e di G yang memenuhi $a * e = e * a = a$, untuk setiap $a \in G$;
4. untuk setiap $a \in G$, terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga berlaku $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, dengan a^{-1} disebut invers dari a.

(Dummit & Foote, 2004).

Berikut diberikan contoh grup.

Contoh 2.1.2 Diberikan himpunan bilangan real tak nol $\mathbb{R}^*$ dan operasi perkalian bilangan $\cdot$ yang merupakan operasi biner pada $\mathbb{R}^*$. Berikut akan ditunjukkan $\langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$ merupakan grup.

1. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}^*$, berlaku $a \cdot b \in \mathbb{R}^*$. Oleh karena itu, $\mathbb{R}^*$ tertutup terhadap operasi $\cdot$.

2. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}^*$, berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$. Oleh karena itu, $\mathbb{R}^*$ bersifat asosiatif terhadap operasi $\cdot$.

3. Terdapat $e = 1$, sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{R}^*$ berlaku $a \cdot e = a \cdot 1 = a = 1 \cdot a = e \cdot a$. Oleh karena itu, 1 adalah elemen identitas terhadap operasi $\cdot$ di $\mathbb{R}^*$.

4. Untuk setiap $a \in \mathbb{R}^*$, terdapat $a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}^*$, sehingga $a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a = a^{-1} \cdot a$. Oleh karena itu, setiap elemen a memiliki invers terhadap operasi $\times$.

Karena $\langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$ memenuhi semua aksioma grup, maka $\langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$ merupakan grup.

Jika pada grup setiap elemen memiliki invers dan terdapat elemen identitas, maka pada struktur yang lebih sederhana hal tersebut tidak selalu berlaku. Struktur yang hanya menekankan sifat asosiatif dari operasi binernya disebut semigrup.

Definisi 2.1.3 Suatu himpunan tak kosong S terhadap operasi biner $*$ disebut semigrup jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. operasi $*$ bersifat tertutup di S, untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a * b \in S$;

2. operasi biner $*$ bersifat asosiatif, untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.

(Whitelaw, 1978).

Berikut diberikan contoh semigrup.

Contoh 2.1.3 Diberikan suatu himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan operasi penjumlahan bilangan $+$. Berikut akan ditunjukkan $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ merupakan semigrup.

1. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{N}$ berlaku $a + b \in \mathbb{N}$. Oleh karena itu, $\mathbb{N}$ tertutup pada operasi $+$.

2. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{N}$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$. Oleh karena itu, $\mathbb{N}$ bersifat asosiatif pada operasi $+$.

Karena $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ memenuhi semua aksioma semigrup, maka $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ merupakan semigrup.

Setelah memahami definisi semigrup, berikut diberikan definisi semigrup idempoten dan semigrup reguler.

Definisi 2.1.4 Diberikan semigrup S. Elemen $x \in S$ disebut elemen idempoten jika $xx = x$. Himpunan semua elemen idempoten di dalam S dinotasikan dengan $E(S)$. Semigrup S disebut sebagai semigrup idempoten jika setiap elemen S merupakan elemen idempoten. Elemen $x \in S$ disebut elemen reguler jika terdapat $y \in S$ sehingga $xyx = x$. Semigrup S disebut semigrup reguler jika setiap elemennya merupakan elemen reguler. Himpunan semua elemen reguler di dalam S dinotasikan dengan $Reg(S)$ (Surodjo dan Susanti, 2023).

Berikut diberikan contoh semigrup yang memuat elemen reguler dan elemen idempoten.

Contoh 2.1.4 Himpunan $S = \{a, b, c, d, e\}$ dilengkapi dengan operasi biner $*$ yang didefinisikan seperti tabel berikut:

Tabel 2.1 Tabel Cayley dengan operasi biner $*$

$*$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	a	b	c	d	e
c	c	c	c	c	c
d	c	c	c	c	c
e	c	c	c	c	c

Dari Tabel 2.1, elemen a, b, c merupakan elemen idempoten karena memenuhi $a * a = a, b * b = b$, dan $c * c = c$. Selain itu, elemen c juga reguler dengan memilih $y = c$ sehingga $c * c * c = c$.

2.2 Ring Semigrup

Setelah memahami konsep semigrup sebagai struktur aljabar dengan satu operasi biner yang bersifat asosiatif, selanjutnya diperkenalkan struktur yang memiliki dua operasi biner sekaligus, yaitu penjumlahan dan perkalian. Struktur tersebut disebut ring, yang menjadi dasar dalam pembahasan mengenai ring semigrup.

Definisi 2.2.1 Diberikan suatu himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi yakni + (operasi penjumlahan) dan $\cdot$ (operasi perkalian). Struktur $\langle R, +, \cdot \rangle$ dinamakan ring , jika memenuhi aksioma:

1. $\langle R, +\rangle$ grup Abelian, yaitu:
   (a) untuk setiap $a, b \in R, a + b \in R$,
   (b) untuk setiap $a, b, c \in R$, $(a + b) + c = a + (b + c)$,
   (c) terdapat elemen identitas, yakni $0 \in R$, sehingga untuk setiap $a \in R, a + 0 = 0 + a = a$,
   (d) untuk setiap $a \in R$, terdapat $-a \in R$, sehingga $a + -a = -a + a = e$ untuk selanjutnya $-a$ dinamakan invers dari a,
   (e) untuk setiap $a, b \in R, a + b = b + a$.
2. $\langle R, \cdot\rangle$ semigrup, yaitu:
   (a) untuk setiap $a, b \in R, a \cdot b \in R$,
   (b) untuk setiap $a, b, c \in R, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. Untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku:
   (a) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$,
   (b) $(a + b) \cdot c) = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

(Rasiman, 2018).

Berikut diberikan contoh ring.

Contoh 2.2.1 Diberikan A yang merupakan himpunan semua fungsi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Untuk setiap $f, g \in A$ dan $n \in \mathbb{Z}$, didefinisikan:

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

dan

$$(fg)(n) = f(n)g(n).$$

Akan ditunjukkan bahwa $\langle A, +, \cdot\rangle$ merupakan ring.

1. $\langle A, +\rangle$ merupakan grup Abel.
2. Untuk setiap $f, g \in A$ dan $n \in \mathbb{Z}$, berlaku:

   $$(fg)(n) = f(n)g(n) \in \mathbb{Z}.$$

   Jadi, operasi $\cdot$ bersifat tertutup di A.

3. Untuk setiap $f, g, h \in A$ dan $n \in \mathbb{Z}$, berlaku:

$$\begin{aligned}((fg)h)(n) &= (fg)(n)h(n) \\ &= f(n)g(n))h(n) \\ &= f(n)(g(n)h(n)) \\ &= (f(gh))(n).\end{aligned}$$

   Jadi, $((fg)h)(n) = (f(gh))(n)$ artinya operasi $\cdot$ bersifat asosiatif.

4. Untuk $f, g, h \in A$ dan $n \in \mathbb{Z}$ berlaku:

$$\begin{aligned}(f(g+h))(n) &= f(n)(g(n)+h(n)) \\ &= f(n)g(n)+f(n)h(n) \\ &= ((fg)+(fh))(n).\end{aligned}$$

   dan

$$\begin{aligned}((f+g)h)(n) &= (f(n)+g(n))h(n) \\ &= f(n)h(n)+g(n)h(n) \\ &= ((fh)+(gh))(n).\end{aligned}$$

   Jadi berlaku hukum distributif kiri dan distributif kanan pada A.

Berdasarkan pernyataan 1-4, terbukti bahwa $\langle A, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

Setelah memahami definisi ring, berikut diberikan definisi ring polinomial.

Definisi 2.2.2 Diberikan ring R dan $R[x]$ merupakan himpunan semua barisan elemen-elemen dari R, dengan $(a_0, a_1, \ldots), (b_0, b_1, \ldots) \in R[x]$ dan $a_i, b_i \in R$. Selanjutnya, $R[x]$ adalah ring dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan dengan $(a_0, a_1, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots)$ dan $(a_0, a_1, \ldots) \cdot (b_0, b_1, \ldots) = (c_0, c_1, \ldots)$, dengan $c_n = \sum_{i=0}^{n}(a_{n-i}b_i) = a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + \ldots + a_1b_{n-1} + a_0b_n = \sum_{k+j=n}(a_kb_j)$ (Hungerford, 1980).

Ring $R[x]$ pada Definisi 2.2.2, disebut sebagai ring polinomial atas R. Dalam definisi tersebut, R dapat dipandang sebagai R pemetaan di $R[x]$, sehingga bentuk $(r, 0, 0, ...)$ dapat disederhanakan menjadi r, dan berlaku $r(a_0, a_1, ...) =$

$(ra_0, ra_1, ...)$. Selanjutnya, akan diperkenalkan notasi yang lebih umum untuk menyatakan polinomial.

Definisi 2.2.3 Diberikan ring R dengan elemen satuan dan sebarang $(0, 1_R, 0, 0, \ldots) \in R[x]$ dinotasikan dengan x sehingga diperoleh:

1. $x^n = (0, 0, \ldots, 0, 1_R, 0, \ldots)$, dengan 1_R adalah suku ke $n+1$;
2. Jika $r \in R$ maka untuk setiap $n \geq 0$, berlaku $rx^n = x^n r = (0, \ldots, 0, r, 0, \ldots)$, dengan r adalah suku ke $n+1$;
3. Untuk setiap $f(x) \in R[x]$, terdapat $n \in \mathbb{N}$ dan $a_0, \ldots, a_n \in R$ sehingga $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n$, dengan $a_i \in R$.

(Hungerford, 1980).

Apabila ring R mempunyai elemen satuan, maka berlaku $x^0 = 1_R$. Selanjutnya polinomial $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n$ dapat dinyatakan dalam bentuk $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$. Dengan menggunakan notasi ini, operasi penjumlahan dan perkalian di $R[x]$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i;$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k, \quad \text{dengan } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Jika $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$, maka $a_i \in R$ adalah koefisien dari $f(x)$ dan a_0 adalah konstanta. Elemen dari R yang dapat dituliskan dengan $r = (r, 0, 0, \ldots) = rx^0$ disebut *polinomial konstan*. Jika $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$, dengan $a_n \neq 0$, maka a_n disebut koefisien utama dari $f(x)$.

Definisi 2.2.4 Diberikan ring R dan $R[X_1, ..., X_n]$ merupakan himpunan semua fungsi $f : \mathbb{N}^n \to R$ sehingga $f(u) \neq 0$, untuk setiap $u \in \mathbb{N}^n$. $R[x_1, ..., x_n]$ adalah ring dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan dengan

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u)$$

dan

$$(f \cdot g)(u) = \sum_{v+w=u} f(v) \cdot g(w),$$

untuk $f, g \in R[x_1, ..., x_n]$ dan $v, w, u \in N^n$ (Hungerford, 1980).

Suatu fungsi $f(x)$ disebut polinomial jika dapat dituliskan sebagai $f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$, dengan a_i adalah koefisien dari $f(x)$ yang merupakan elemen-elemen dari suatu himpunan. Jika $x^n \neq 0$ maka derajat dari $f(x)$ adalah n dan jika $n = 0$ maka derajat $f(x)$ adalah nol (Mas'oed, 2013).

Definisi 2.2.5 Diberikan ring R. Himpunan $R[x]$, dinotasikan sebagai semua himpunan barisan tak hingga $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, dengan $a_i \in R$, untuk setiap $i = 1, 2, 3, \ldots$ dan terdapat $n \in \mathbb{Z}^+$, sehingga untuk $k \geq n$ berlaku $a_k = 0$. Elemen-elemen $R[x]$ disebut polinomial atas ring.

Operasi penjumlahan dan perkalian pada $R[x]$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} + \ &: R[x] \times R[x] \to R[x] \\ &(a_0, a_1, a_2, \ldots) + (b_0, b_1, b_2, \ldots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \ &: R[x] \times R[x] \to R[x] \\ &(a_0, a_1, a_2, \ldots)(b_0, b_1, b_2, \ldots) = (c_0, c_1, c_2, \ldots), \end{aligned}$$

dengan $c_j = \sum_{i=0}^{j} a_ib_{j-i}$ untuk $j = 0, 1, 2, \ldots$

Dengan dua operasi tersebut, $R[x]$ merupakan ring yang disebut ring polinomial (Dummit & Foote, 2004).

Berikut diberikan contoh ring polinomial.

Contoh 2.2.2 Diberikan ring polinomial $R[x]$, yang merupakan himpunan semua polinomial dengan koefisien dari bilangan real dan variabel x.
akan ditunjukan $R[x]$ adalah ring polinomial.

1. Diberikan sebarang dua polinomial:

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$
$$q(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0$$

penjumlahan keduanya adalah:

$$
\begin{aligned}
p(x) + q(x) &= (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) \\
&\quad + (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0)
\end{aligned}
$$

hasil dari penjumlahan ini tetap merupakan polinomial dengan koefisien bilangan real, sehingga $R[x]$ tertutup terhadap penjumlahan.

2. Diberikan sebarang polinomial $p(x), q(x) \in R[x]$, maka perkaliannya adalah:

$$
\begin{aligned}
p(x) \cdot q(x) &= (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) \\
&\quad \cdot (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0) \\
&= (c_{n+m}x^{n+m} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0.
\end{aligned}
$$

Hasil kali dua polinomial juga merupakan polinomial dengan koefisien bilangan real, sehingga $R[x]$ tertutup terhadap perkalian.

3. Diberikan sebarang dua polinomial $p(x)$ dan $q(x)$, penjumlahan harus bersifat komutatif:

$$p(x) + q(x) = q(x) + p(x).$$

Karena penjumlahan koefisien bilangan real bersifat komutatif, maka penjumlahan polinomial di $R[x]$ juga bersifat komutatif.
Polinomial nol, $\theta(x) = 0$, adalam elemen identitas aditif dalam $R[x]$. Untuk setiap polinomial $p(x)$ berlaku:

$$p(x) + \theta(x) = p(x).$$

Dengan demikian, $\theta(x)$ merupakan elemen identitas di $R[x]$ terhadap operasi $+$.
Setiap polinomial $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ memiliki invers aditif, yaitu $-p(x) = -a_n x^n - \cdots - a_1 x - a_0$, sehingga:

$$p(x) + (-p(x)) = 0 = \theta(x).$$

Invers aditif ini juga diperoleh dari sifat invers aditif di ring R.
Perkalian dalam $R[x]$ harus bersifat asosiatif. Diberikan sebarang tiga

polinomial $p(x), q(x), r(x) \in R[x]$, berlaku:

$$(p(x) \cdot q(x)) \cdot r(x) = p(x) \cdot (q(x) \cdot r(x)).$$

Perkalian polinomial harus bersifat distributif terhadap penjumlahan, yaitu:

$$p(x) \cdot (q(x) + r(x)) = p(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot r(x).$$

Karena $R[x]$ memenuhi semua aksioma yang membentuk suatu ring, maka $R[x]$ adalah ring polinomial.

Setelah memahami konsep ring polinomial yang dibangun dari suatu ring dasar dengan memperkenalkan peubah formal, pembahasan dapat diperluas dengan mempertimbangkan struktur yang dibentuk melalui semigrup. Konsep ini melahirkan ring semigrup, yang merupakan generalisasi dari ring polinomial.

Definisi 2.2.6 Diberikan ring R serta semigrup S. Ring semigrup $R[S]$ dapat didefinisikan sebagai

$$R[T] = \{f : S \to R \mid \text{supp}(f) \text{ berhingga}\}, \tag{2.2.1}$$

dengan $\text{supp}(f) = \{t \in T \mid f(t) \neq 0\}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan fungsi

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \tag{2.2.2}$$

dan operasi perkalian fungsi

$$(fg)(t) = \sum_{x+y=t} f(x)g(y), \tag{2.2.3}$$

untuk setiap $t \in T, f, g \in R[T]$ (Gilmer, 1984).

Berikut diberikan contoh ring semigrup .

Contoh 2.2.3 Diberikan ring $\mathbb{Z}_6$ serta semigrup $\mathbb{Z}_3$ terhadap operasi penjumlahan sehingga dapat dikonstruksi ring semigrup $\mathbb{Z}_6[\mathbb{Z}_3]$, yaitu himpunan

$$\mathbb{Z}_6([\mathbb{Z}_3]) = \{f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_6 \mid \text{supp}(f) \text{ berhingga}\}$$

Diberikan fungsi $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$, yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = a, \\ 1, & x = b, \\ 0, & \text{untuk } x \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{a, b\}. \end{cases}$$

Karena hanya terdapat dua elemen pada domain $\mathbb{Z}_6$ yang dipetakan ke nilai tak nol, maka *support* dari f yaitu

$$\operatorname{supp}(f) = \{\, x \in \mathbb{Z}_6 \mid f(x) \neq 0 \,\} = \{\, a,\, b \,\}.$$

Dengan demikian, $\operatorname{supp}(f)$ merupakan himpunan berhingga sehingga fungsi f merupakan elemen dari $\mathbb{Z}_6([\mathbb{Z}_3])$.

2.3 Derivasi Jordan

Derivasi pada ring merupakan generalisasi dari konsep turunan dalam kalkulus ke dalam konteks aljabar abstrak. Dalam teori ring, derivasi adalah suatu pemetaan yang menggambarkan perubahan elemen-elemen dalam ring, yang mengikuti sifat-sifat tertentu seperti linearitas dan aturan Leibniz. Berikut diberikan definisi dari derivasi.

Definisi 2.3.1 Diberikan ring R. Suatu fungsi $d : R \to R$ disebut derivasi jika memenuhi sifat berikut:

1. $d(a + b) = d(a) + d(b)$, untuk setiap $a, b \in R$;
2. $d(ab) = d(a)b + ad(b)$, untuk setiap $a, b \in R$.

(Ali dkk., 2024).

Berikut diberikan contoh mengenai derivasi.

Contoh 2.3.1 Diberikan $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Didefinisikan $d : R \to R$ sebagai berikut:

$$d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{untuk setiap } \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R.$$

Akan ditunjukan d merupakan derivasi.

Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$, berlaku:

1. Akan ditunjukan d bersifat aditif, yaitu $d(A+B) = d(A) + d(B)$.

$$\begin{aligned} d(A+B) &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(a_1 + a_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -a_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= d(A) + d(B). \end{aligned}$$

Karena $d(A+B) = d(A) + d(B)$, terbukti d bersifat aditif.

2. Akan ditunjukan d memenuhi aturan Leibniz, yaitu $d(AB) = d(A)B + Ad(B)$.

$$\begin{aligned} d(AB) &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(a_1 a_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} d(A)B + Ad(B) &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -a_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -(a_1 a_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -(a_1a_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena $d(AB) = d(A)B + Ad(B)$, terbukti d memenuhi aturan Leibniz.

Karena kedua sifat terpenuhi, maka terbukti d merupakan derivasi pada R.

Konsep derivasi memberikan dasar penting dalam studi struktur aljabar, khususnya dalam analisis perubahan terhadap operasi perkalian. Namun, tidak semua pemetaan yang menyerupai derivasi harus memenuhi sifat Leibniz secara penuh. Dari gagasan inilah muncul konsep derivasi Jordan, yang merupakan perluasan dari derivasi biasa.

Definisi 2.3.2 Diberikan ring R. Pemetaan aditif $d : R \to R$ disebut derivasi Jordan jika memenuhi:

$$d(a^2) = d(a)a + ad(a), \text{ untuk setiap } a \in R. \tag{2.3.4}$$

(Herstein, 1957).

Selanjutnya, akan diberikan contoh derivasi Jordan.

Contoh 2.3.2 Diberikan ring $R = \mathbb{Z}$. Didefinisikan fungsi $d : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sebagai berikut:

$$d(a) = 0, \text{ untuk setiap } a \in \mathbb{Z}.$$

Akan diselidiki apakah d merupakan derivasi Jordan.

Diberikan sebarang $a \in \mathbb{Z}$, berlaku:

$$d(a^2) = 0, \text{ karena } a^2 \in \mathbb{Z}, \text{ untuk setiap } a \in \mathbb{Z}.$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} d(a)a + ad(a) &= 0 \cdot a + a \cdot 0 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Karena $d(a^2) = 0$ dan $d(a)a + ad(a) = 0$, fungsi d yang didefinisikan sebagai $d(a) = 0,$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ merupakan derivasi Jordan.

Contoh 2.3.3 Diberikan ring $M_2(\mathbb{Z})$. Didefinisikan fungsi $d : M_2 \to M_2$ yaitu

$$d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Akan diselidiki apakah d merupakan derivasi Jordan.

Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.

Diperoleh $A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$d(A^2) = d\left(\begin{bmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2ab \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} d(A)A + Ad(A) &= \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & ba \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & ab \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2ab \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Diperoleh

$$d(A)A + Ad(A) = \begin{bmatrix} 0 & 2ab \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jadi, $d(A^2) = d(A)A + Ad(A)$.

Terbukti fungsi d merupakan derivasi Jordan pada ring $M_2(\mathbb{Z})$.

Setelah pemaparan mengenai definisi dan contoh derivasi Jordan, pembahasan berikutnya difokuskan pada penerapan konsep tersebut dalam struktur ring R.

Definisi 2.3.3 Derivasi pada ring R adalah suatu operasi yang bersifat aditif dan memenuhi aturan Leibniz. Derivasi ini dapat diterapkan pada elemen-elemen ring termasuk dalam ring polinomial $R[x]$, dengan setiap turunan polinomial mengikuti pola yang serupa dengan turunan fungsi dalam kalkulus (Sitompul dkk., 2025).

Teorema 2.3.4 Setiap derivasi pada suatu ring merupakan derivasi Jordan (Sitompul dkk., 2025).

Bukti. Diberikan ring R dan $d : R \to R$ adalah suatu derivasi. Berdasarkan Definisi 2.3.1, d adalah derivasi jika memenuhi dua sifat berikut:

1. $d(a + b) = d(a) + d(b)$, untuk setiap $a, b \in R$;
2. $d(ab) = d(a)b + ad(b)$, untuk setiap $a, b \in R$.

Dari Definisi 2.3.2, diperoleh:

$$d(a^2) = d(a \cdot a). \tag{2.3.5}$$

Karena d merupakan derivasi, berlaku $d(ab) = d(a)b + ad(b)$. Dengan mensubstitusikan $b = a$, diperoleh:

$$d(a^2) = d(a)a + ad(a). \tag{2.3.6}$$

Karena $d(a^2) = d(a)a + ad(a)$ untuk setiap $a \in R$, maka d memenuhi definisi derivasi Jordan. Dengan demikian, terbukti setiap derivasi pada suatu ring merupakan derivasi Jordan. ■

Berikut diberikan contoh derivasi Jordan yang bukan merupakan derivasi.

Contoh 2.3.4 Diberikan ring $R = M_2(\mathbb{Z}_2)$. Didefinisikan fungsi $d : R \to R$ sebagai:

$$d(A) = A^T - A,$$

dengan A^T adalah transpos dari matriks A.

Akan dibuktikan bahwa d adalah derivasi Jordan.

Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_2)$. Diperoleh:

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Transpos dari A^2 adalah:

$$(A^2)^T = \begin{bmatrix} a^2+bc & ac+dc \\ ab+bd & bc+d^2 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} d(A^2) &= (A^2)^T - A^2 \\ &= \begin{bmatrix} a^2+bc & ac+dc \\ ab+bd & bc+d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & ac+dc-ab-bd \\ ab+bd-ac-dc & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} d(A) &= A^T - A \\ &= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & c-b \\ b-c & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(A)A + Ad(A) &= \begin{bmatrix} 0 & c-b \\ b-c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c-b \\ b-c & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c^2-bc & cd-bd \\ ab-ac & b^2-bc \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^2-bc & ac-ab \\ bd-cd & c^2-bc \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c^2-bc+b^2-bc & cd-bd+ac-ab \\ ab-ac+bd-cd & b^2-bc+c^2-bc \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & ac+dc-ab-bd \\ ab+bd-ac-dc & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jadi, $d(A^2) = d(A)A + Ad(A)$. Terbukti fungsi d merupakan derivasi Jordan pada ring $M_2(\mathbb{Z}_2)$.

Pada ring polinomial $R[x]$, derivasi Jordan didefinisikan sebagai suatu pemetaan yang memenuhi aturan khusus. Berbeda dengan derivasi biasa yang mengikuti aturan Leibniz, derivasi Jordan pada ring polinomial mengikuti aturan khusus pada kuadrat elemen, sebagaimana dijelaskan dalam definisi berikut.

Definisi 2.3.5 Suatu pemetaan aditif $d : R[x] \to R[x]$ dengan variabel x dan koefisien dalam ring komutatif R, disebut sebagai derivasi Jordan jika memenuhi:

$$d(p(x)^2 = d(p(x))p(x) + p(x)d(p(x)), \tag{2.3.7}$$

untuk setiap $p(x) \in R[x]$ (Sitompul dkk., 2025).

Berikut diberikan contoh derivasi Jordan pada ring polinomial $R[x]$.

Contoh 2.3.5 Diberikan R adalah ring komutatif, dan $R[x]$ adalah ring polinomial dengan variabel x dan koefesien dalam R. Didefinisikan suatu pemetaan $d : R[x] \to R[x]$ sebagai berikut:

$$d(f(x)) = af'(x),$$

denga $a \in R$ akan ditunjukkan bahwa pemetaan d memenuhi sifat derivasi Jordan. Berdasarkan definisi d, diperoleh:

$$\begin{aligned} d(f(x)^2) &= a \cdot \frac{d}{dx}(f(x)^2) \\ &= a \cdot (2f(x)f'(x)) \\ &= 2af'(x)f(x). \end{aligned}$$

Dari definisi $d(f(x)) = af'(x)$, diperoleh:

$$\begin{aligned} d(f(x))f(x) &= (af'(x))f(x) = af'(x)f(x), \\ f(x)d(f(x)) &= f(x)(af'(x)) = af'(x)f(x), \\ d(f(x))f(x) + f(x)d(f(x)) &= af'(x)f(x) + af'(x)f(x) \\ &= 2af'(x)f(x). \end{aligned}$$

Karena $d(f(x)^2) = d(f(x))f(x) + f(x)d(f(x))$, terbukti d merupakan derivasi Jordan.

2.4 Jumlah Langsung (*Direct Sum*) pada Ring

Setelah membahas derivasi Jordan pada struktur ring, pada subbab ini akan dikaji konsep jumlah langsung (*direct sum*) pada ring. Melalui konstruksi jumlah langsung, dapat dibentuk suatu ring baru yang berasal dari beberapa ring dengan cara menggabungkan struktur aljabarnya secara teratur. Konsep ini memberikan pendekatan untuk memahami struktur ring yang lebih kompleks melalui komponen-komponen penyusunnya. Selain itu, konsep jumlah langsung juga sering digunakan dalam kajian struktur ring dan modul. Oleh karena itu, pada subbab ini akan dipaparkan definisi jumlah langsung pada ring beserta beberapa sifat dasarnya sebagai landasan untuk pembahasan selanjutnya.

Definisi 2.4.1 Diberikan ring R_i, denga $i = 1, 2, ..., n$ himpunan R adalah hasil kali kartesian pada himpunan R_i dan didefinisikan operasi pada R, yaitu:

1. $(r_1, r_2, ..., r_n) + (s_1, s_2, ..., s_n) = (r_1 + s_1, r_2 + s_2, ..., r_n + s_n)$;
2. $-(r_1, r_2, ..., r_n) = (-r_1, -r_2, ..., -r_n)$;
3. $(r_1, r_2, ..., r_n)(s_1, s_2, ..., s_n) = (r_1 s_1, r_2 s_2, ..., r_n s_n)$.

Elemen $(0, 0, ..., 0)$ merupakan elemen identitas, R disebut jumlah langsung eksternal dari $R_1, R_2, ..., R_n$ dan dinotasikan sebagai $R_1 \oplus R_2 \oplus ... \oplus R_n$ (Side dkk., 2021).

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur dan analisis teoritis, dengan mengumpulkan referensi seperti jurnal, artikel ilmiah, buku, dan sumber lainnya yang terkait dengan penelitian ini. Adapun langkah-langkah penelitian ini sebagai berikut:

1. mengonstruksi derivasi Jordan pada ring semigrup;
2. menyelidiki sifat-sifat derivasi Jordan pada ring semigrup;
3. meyelidiki keterkaitan antara derivasi Jordan pada ring R dengan derivasi Jordan pada ring semigrup;
4. mengonstruksi contoh-contoh derivasi Jordan pada ring semigrup.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, derivasi Jordan pada ring semigrup merupakan perluasan dari derivasi Jordan pada ring biasa. Penelitian ini menunjukkan beberapa sifat derivasi Jordan pada ring semigrup, termasuk bagaimana pemetaan tersebut bersifat aditif, mengikuti aturan Jordan pada kuadrat elemen, dan bagaimana pemetaan yang awalnya terdefinisi pada ring dapat diperluas ke seluruh ring semigrup tanpa kehilangan sifat-sifat dasarnya. Di antaranya, setiap elemen ring semigrup dari direct sum beberapa ring dapat direpresentasikan komponen demi komponen, sehingga penerapan derivasi Jordan pada masing-masing komponen menghasilkan derivasi Jordan pada keseluruhan ring semigrup. Selain itu, penjumlahan atau komposisi derivasi Jordan pada setiap komponen tetap mempertahankan sifat aditif dan aturan Jordan.

Dengan demikian, penelitian ini menegaskan bahwa konstruksi derivasi Jordan melalui direct sum ring memberikan cara yang sistematis untuk membangun derivasi Jordan pada ring semigrup yang lebih kompleks.

5.2 Saran

Penelitian selanjutnya disarankan untuk memperluas kajian mengenai derivasi Jordan pada kelas semigrup tertentu serta meneliti keterkaitan dengan pemetaan aljabar lainnya, sehingga diperoleh pemahaman yang lebih mendalam mengenai struktur dan sifat derivasi Jordan.

DAFTAR PUSTAKA

Alkenani, A. N., Ashraf, M., & Jabeen, A. (2017). Nonlinear generalized Jordan (σ, Γ)-derivations on triangular algebras. *Special Matrices*, 6(1), 216–228.

Ali S., Rafique N. N., & Varshney V. (2024). Certain types of derivations in rings: A survey. *J. Indones. Math. Soc.*, 30(02), 256-306.

Bhushan, B., Sandhu, G. S., Ali, S., & Kumar, D. (2022). On centrally extended Jordan derivations and related maps in rings. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 52(1), 23–35.

Brešar, M. (1988). Jordan derivations on semiprime rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 104(4), 1003–1006.

Do Kim, B. (2018). Jordan derivations on semiprime rings and their radical range in Banach algebras. *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, 31(1), 1–1.

Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra* 3^{rd} *Edition*. Hoboken, NJ: Wiley.

Ferreira, B. L., Ferreira, R. N., & Guzzo Jr, H. (2020). Generalized Jordan derivations on semiprime rings. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 109(1), 36–43.

Fitriani, & Faisol, A. (2022). *Grup*. Matematika. Yogyakarta.

Ghosh, A., & Prakash, O. (2023). Characterization of Jordan $\{g, h\}$-derivations over matrix algebras. *Journal of Algebraic Systems*, 11(1), 77–95.

Gilmer, R. (1984). *Commutative semigroup rings*. Chicago: The University of Chicago Press.

Herstein, I. N. (1957). Jordan derivations of prime rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 8(6), 1104–1110.

Hungerford, T. W. (1980). *Algebra*. New York: Springer-Verlag.

Herstein, I. N. (1968). *Noncommutative rings*. The Carus Mathematical Monographs, No. 15. Published by The Mathematical Association of America; distributed by John Wiley & Sons, Inc., New York.

Jordan, P., Neumann, J. v., & Wigner, E. (1934). On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. *Annals of Mathematics*, 35(1), 29–64.

Kim, B. D. (2019). The properties of Jordan derivations of semiprime rings and Banach algebras, II. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 34(3), 811–818.

Leerawat, U., & Toka, P. (2024). Jordan f-derivations on prime and semiprime rings: Annual Meeting in Mathematics 2023. *Thai Journal of Mathematics*, 22(1), 85–91.

Liang, X. (2021). Generalized Jordan N-derivations of unital algebras with idempotents. *Journal of Mathematics*, 2021(1), 9997646.

Martindale 3rd, W. S. (1969). Prime rings satisfying a generalized polynomial identity. *Journal of Algebra*, 12(4), 576–584.

Mas'oed, F. (2013). *Struktur aljabar* (Cetakan ke-1). Jakarta Barat: Akademia Permata.

Posner, E. C. (1957). Derivations in prime rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 8(6), 1093–1100.

Rasiman (2018). Teori Ring. *Universitas PGRI Semarang press*.

Side, S., Abdy, M., & Uniarti, A. (2021). Jumlah Langsung pada Ring. *JMathCos*, Vol. 4, No. 1, 39–46.

Sitompul, D. E., Chasanah, S. L., & Faisol, A. (2025). Jordan derivation on the polynomial ring $\mathbb{R}[x]$. *Integra: Journal of Integrated Mathematics and Computer Science*, 2(2), 41–47.

Surodjo, B., & Susanti, Y. (2023). *Teori Semigrup*. Gadjah Mada University Press. Yogyakarta.

Vishki, H. E., Mirzavaziri, M., & Moafian, F. (2016). Jordan higher derivations on trivial extension algebras. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 31(2), 247–259.

Whitelaw, T. A. (1978). *Introduction to abstract algebra*. Oxford: Blackwell Scientific Publications.

Yanti, G. A. D., & Wijayanti, I. E. (2025). On (δ, f)-derivations and Jordan (δ, f)-derivations on modules. *arXiv preprint*, arXiv:2508.07609.

Zivari-Kazempour, A. (2024). Characterization of Jordan homomorphisms and Jordan derivations. *Khayyam Journal of Mathematics*, 10(1), 1–9.