KONSTRUKSI HOMOMORFISMA GRUP TITIK SIMETRI KE GRUP MATRIKS $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ PADA MOLEKUL SEDERHANA

Skripsi

Oleh

COKY ARYA PRATAMA
NPM. 2217031018

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

ABSTRACT

CONSTRUCTION OF A HOMOMORPHISM FROM THE SYMMETRY GROUP TO THE MATRIX GROUP $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ FOR SIMPLE MOLECULES

By

Coky Arya Pratama

Molecular symmetry can be explained mathematically using group theory through the concept of point groups that contain all symmetry operations of a molecule. Each symmetry operation can be represented as a linear transformation in three-dimensional space and expressed in matrix form. The relationship between point symmetry groups and matrix groups can be described through the concept of group homomorphism.

This study aims to construct a homomorphism from molecular point symmetry groups into the matrix group $GL_3(\mathbb{R})$ for the molecules H_2O, NH_3, CH_4, and CO_2. The research is conducted using a literature study method through discussions of group theory, point groups, matrix groups, and group homomorphisms. The results show that the symmetry operations of these molecules can be represented in the form of 3×3 matrices that satisfy the homomorphism properties into $GL_3(\mathbb{R})$.

Keywords: Group theory, point group, group homomorphism, matrix representation, $GL_3(\mathbb{R})$.

ABSTRAK

KONSTRUKSI HOMOMORFISMA GRUP TITIK SIMETRI KE GRUP MATRIKS $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ PADA MOLEKUL SEDERHANA

Oleh

Coky Arya Pratama

Simetri molekul dapat dijelaskan secara matematis menggunakan teori grup melalui konsep grup titik simetri yang memuat seluruh operasi simetri pada suatu molekul. Setiap operasi simetri tersebut dapat direpresentasikan sebagai transformasi linear dalam ruang tiga dimensi dan dinyatakan dalam bentuk matriks. Hubungan antara grup titik simetri dan grup matriks dapat dinyatakan melalui konsep homomorfisma grup.

Penelitian ini bertujuan untuk mengkonstruksi homomorfisma dari grup titik simetri molekul ke dalam grup matriks $GL_3(\mathbb{R})$ pada molekul H_2O, NH_3, CH_4, dan CO_2. Penelitian dilakukan dengan metode studi literatur melalui pembahasan teori grup, grup titik simetri, grup matriks, serta homomorfisma grup. Hasil penelitian menunjukkan bahwa operasi simetri pada molekul tersebut dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks berordo tiga yang memenuhi sifat homomorfisma ke dalam $GL_3(\mathbb{R})$.

Kata-kata kunci: Teori grup, grup titik simetri, homomorfisma grup, representasi matriks, $GL_3(\mathbb{R})$.

KONSTRUKSI HOMOMORFISMA GRUP TITIK SIMETRI KE GRUP MATRIKS $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ PADA MOLEKUL SEDERHANA

COKY ARYA PRATAMA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

Judul Skripsi : **KONSTRUKSI HOMOMORFISMA GRUP TITIK SIMETRI KE GRUP MATRIKS $GL_3(\mathbb{R})$ PADA MOLEKUL SEDERHANA**

Nama Mahasiswa : *Coky Arya Pratama*

Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031018**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**
NIP 198002062003121003	NIP 198406272006042001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	:	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....
Sekretaris	:	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **13 April 2026**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Coky Arya Pratama**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031018**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Konstruksi Homomorfisma Grup Titik Simetri ke Grup Matriks $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ pada Molekul Sederhana**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 13 April 2026

Penulis,

Coky Arya Pratama

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Coky Arya Pratama yang lahir di Panjang pada tanggal 10 Juni 2004. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara, seorang anak pertama dari pasangan Jumadi dan Haryati yang tinggal di Bandar Lampung.

Riwayat pendidikan penulis dimulai dari TK Kirana pada tahun 2009 dan diselesaikan pada tahun 2010. Setelah itu, penulis melanjutkan pendidikan dasar di SD Negeri 1 Panjang Selatan dari tahun 2010 hingga 2016, kemudian melanjutkan ke jenjang menengah pertama di SMP Xaverius 3 Bandar Lampung pada tahun 2016 sampai 2019. Pendidikan menengah atas ditempuh di SMA Negeri 10 Bandar Lampung dan selesai pada tahun 2022.

Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN).

Selain kegiatan akademik, penulis pernah berperan sebagai volunteer di Rumah Baca Babeh Inyoel (RBBI), sebuah komunitas literasi yang bergerak dalam peningkatan minat baca dan pemberdayaan masyarakat. Melalui pengalaman tersebut, penulis belajar pentingnya kontribusi sosial serta nilai kebersamaan dalam membangun lingkungan yang lebih baik.

Selama masa studi, penulis menunjukkan ketekunan dan dedikasi dalam menyelesaikan berbagai tugas akademik. Penulis berharap hasil dari penelitian ini dapat memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya di bidang Struktur Aljabar.

KATA INSPIRASI

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya."

(QS. Al-Baqarah: 286)

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."

(QS. Al-Insyirah: 6)

"Hidup bukan saling mendahului, bermimpilah sendiri-sendiri."

(Besok Mungkin Kita Sampai - Hindia)

"Dan di hariku yang paling gelap, semoga aku akan mengingat, bahwa ini sementara, dan akan segera pergi, dengan cepat."

(Timur - The Adams)

"Semua yang t'lah diberikan olehnya, pasti ada rencana yang indah, dan tak perlu merasa gelisah, bersyukurlah dan berserah."

(Duniawi - Rumahsakit)

"Pelan pasti ku kabulkan, segala catatan harapmu, tentang masa depan, tentang masa terang, kebul jalan kuterjang."

(Gemilang - Perunggu)

"Pada akhirnya ini semua, hanyalah permulaan."

(Beranjak Dewasa - Nadin Amizah)

"Keep on going with your silly dream. Life is prettier than it may seem."

(Letter To My 13 Year Old Self - Laufey)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Konstruksi Homomorfisma Grup Titik Simetri ke Grup Matriks $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ pada Molekul Sederhana” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam sekaligus Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi yang membangun sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
4. Bapak Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc., selaku dosen pembimbing akademik.
5. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Ayah, Ibu, dan Adik yang senantiasa memberikan doa, dukungan, dan motivasi kepada penulis selama masa perkuliahan hingga penyusunan skripsi ini.

7. Teman-teman di “Eunike Kost” yang telah menjadi tempat singgah selama masa perkuliahan. Terima kasih atas kebersamaan, dukungan, serta suka duka yang dilalui selama perkuliahan hingga skripsi ini selesai.

8. Teman-teman seperjuangan skripsi, yaitu Aprial Wahyudi Pratama, Margo Astomo, dan Zulfakhri Dwiantara. Terima kasih atas kebersamaan, saling membantu, serta proses bimbingan yang dijalani bersama selama penyusunan skripsi hingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik

9. Teman-teman dalam grup K3 sejak semester 3, yaitu Ara, Della, Ditha, dan Nur Rahma, yang telah membantu selama masa perkuliahan. Terima kasih atas bantuan dan kerja sama selama perkuliahan berlangsung hingga selesai dengan baik.

10. Teman-teman dalam grup “Portugal Gank“ yang telah membantu selama masa perkuliahan. Terima kasih atas bantuan, kerja sama, dan canda tawa yang ikut mewarnai masa perkuliahan.

11. Teman-teman mahasiswa kelas Terapan angkatan 2022 (HIMATER) sejak semester 3 serta teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika angkatan 2022. Terima kasih atas kebersamaan dan kerja sama selama menjalani perkuliahan hingga selesai.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 13 April 2026

Coky Arya Pratama

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Simetri merupakan konsep mendasar yang berperan penting dalam memahami struktur dan sifat molekul. Melalui konsep simetri, sistem yang kompleks dapat dijelaskan lebih sederhana karena adanya pola keteraturan yang mudah dikenali. Hal tersebut ditegaskan oleh Cotton (1990), yang menyatakan bahwa pertimbangan simetri berperan penting dalam studi mengenai struktur dan sifat molekul, serta pengenalan terhadap simetri dapat menyederhanakan deskripsi molekul dan perilakunya. Hal ini menunjukkan bahwa pemahaman terhadap simetri tidak hanya bersifat estetis, tetapi juga memiliki makna ilmiah yang penting dalam menjelaskan berbagai fenomena kimia dan fisika.

Untuk mempelajari simetri secara matematis digunakan konsep teori grup, yaitu cabang matematika yang mempelajari himpunan operasi simetri yang memenuhi sifat-sifat tertentu. Menurut Cotton (1990), sekumpulan operasi simetri yang dapat dilakukan pada suatu molekul tanpa mengubah penampilannya akan membentuk sebuah grup. Hal ini menegaskan bahwa setiap molekul dapat dikelompokkan ke dalam grup titik tertentu sesuai dengan elemen simetri yang dimilikinya. Kelompok ini menjadi dasar penting untuk menjelaskan berbagai sifat fisik maupun kimia suatu molekul, seperti polaritas, kestabilan ikatan, serta aktivitas spektroskopinya.

Teori grup berperan penting dalam analisis molekul karena mampu menjelaskan hubungan antara bentuk geometri dengan sifat fisik maupun kimianya. Setiap molekul dapat dipetakan ke dalam grup titik tertentu, dan dari pengelompokan tersebut berbagai karakteristiknya dapat diprediksi. Cotton (1990) menyatakan bahwa banyak sifat molekul, seperti momen dipol, kesetaraan ikatan, serta aktivitas dalam spektrum inframerah dan Raman, bergantung pada simetri molekul. Selain itu, Bishop (1993) juga menegaskan bahwa teori grup memberikan dasar sistematis untuk memahami keteraturan struktur dan perilaku spektroskopik molekul. Dengan demikian, teori grup tidak hanya bernilai teoritis, tetapi juga berperan penting dalam menjelaskan sifat-sifat molekul yang dapat diamati secara eksperimen.

Penerapan teori grup dalam kimia molekul dapat dijelaskan melalui hubungan antara geometri dan elemen simetri pada molekul sederhana. Molekul $\mathrm{H_2O}$ dengan geometri nonlinier (angular) termasuk dalam grup titik C_{2v}, yang menjelaskan sifat polaritasnya serta peranannya dalam pembentukan ikatan hidrogen. Molekul $\mathrm{NH_3}$ berbentuk piramida trigonal dan tergolong grup titik C_{3v}, yang berkaitan dengan karakter basa dan aktivitas spektroskopiknya. Molekul $\mathrm{CH_4}$ memiliki struktur tetrahedral sempurna dan termasuk dalam grup titik T_d, sedangkan $\mathrm{CO_2}$ memiliki bentuk linear ideal dan termasuk dalam grup titik $D_{\infty h}$, yang yang menunjukkan kesimetrisan ikatan rangkap ganda serta pola getarannya (Miessler dkk., 2014).

Beberapa penelitian terdahulu telah mengkaji penerapan teori grup dalam memahami sifat-sifat molekul. Penelitian yang dilakukan oleh Ellzey (2009) menerapkan teori grup dengan metode *symmetry averaging* menggunakan representasi matriks untuk menunjukkan hubungan antara struktur grup dan analisis molekul sederhana. Rahmi (2010) melalui metode *ab initio* untuk menganalisis molekul $\mathrm{M_2N_2}$, dan menemukan bahwa klasifikasi ke dalam grup simetri $D_{\infty h}$ dan D_{2h} menjelaskan kestabilan serta jenis ikatan molekul. Boyle (2014) meneliti penerapan teori grup abstrak dalam simetri molekul dan menegaskan bahwa konsep *double groups* penting untuk menjelaskan spin dan degenerasi energi pada molekul dengan elektron ganjil.

Setelah itu, Johansson & Veryazov (2017) mengembangkan prosedur otomatis untuk menentukan grup titik dan membentuk fungsi gelombang beradaptasi simetri melalui representasi matriks, yang menunjukkan hubungan antara struktur grup dan sifat molekul. Carnia (2017) menunjukkan bahwa senyawa etilena ($\mathrm{C_2H_4}$) memiliki operasi simetri yang membentuk grup titik D_{2h} dan bersifat *solvable*. Carnia (2017) juga meneliti senyawa fosfor pentaklorida ($\mathrm{PCl_5}$) dengan grup titik D_{3h} yang memiliki 12 operasi simetri, serta menemukan bahwa subgrup Sylow dan irisan subgrup normalnya juga tergolong *solvable*. Mananga dkk. (2018) menerapkan teori grup dalam spektroskopi untuk menjelaskan transisi energi dan menegaskan peran simetri dalam menentukan sifat serta aturan seleksi molekul.

Selanjutnya, Fong dkk. (2019) mengaitkan teori grup dan grup titik melalui isomorfisma dengan memetakan elemen grup titik ke grup matematis seperti $\mathbb{Z}_n$ dan merepresentasikan operasi simetrinya ke dalam bentuk matriks. Nurcahyani & Musthofa (2021) menerapkan konsep homomorfisma grup pada sistem DNA untuk menunjukkan pemetaan elemen antargrup yang mempertahankan struktur operasinya, sebagai dasar matematis pemetaan simetri molekul ke bentuk matriks. Desroches & Dong (2021) menerapkan teori grup pada analisis simetri molekul menggunakan *quantum annealer* untuk meningkatkan akurasi dan efisiensi perhitungan struktur elektronik pada $\mathrm{H_2}$, $\mathrm{He_2}$, $\mathrm{H_2O}$, $\mathrm{NH_3}$, dan $\mathrm{CH_4}$.

Knowles (2022) mengembangkan metode penentuan grup titik dari koordinat atom dengan geometri yang mendekati simetri ideal untuk menunjukkan efektivitas teori grup dalam identifikasi simetri. Beevers dkk. (2023) membuktikan bahwa teori grup dapat mengklasifikasikan simetri molekul, seperti $\mathrm{NH_3}$ dengan grup titik C_{3v} dan $\mathrm{CH_4}$ dengan T_d, serta mengaitkannya dengan sifat fisika-kimia. Mitoli dkk. (2023) menerapkan teori grup untuk menganalisis kontribusi anharmonik pada permukaan energi potensial guna menyederhanakan perhitungan vibrasi dan menjelaskan hubungan antara struktur dan sifat molekul.

Sementara itu, Nielsen dkk. (2024) menerapkan *continuous symmetry operation* untuk mengevaluasi simetri grup titik pada kompleks $\mathrm{Ln(III)}$ secara otomatis, sehingga memperluas penerapan teori grup pada molekul kompleks. Richter (2024) menunjukkan bahwa molekul dengan grup titik yang sama dapat memiliki perbedaan sifat vibrasi dan elektronik tergantung pada bentuk strukturnya, baik planar maupun non-planar. Humayun dkk. (2024) menggunakan metode *Symmetry-Adapted Linear Combination (SALC)* pada molekul $\mathrm{H_2O}$ untuk mengaitkan simetri dengan pembentukan orbital molekul. Terakhir, Bunker (2025) meninjau perkembangan *molecular symmetry group* sebagai dasar analisis simetri pada molekul sederhana seperti $\mathrm{H_2O}$, $\mathrm{NH_3}$, $\mathrm{CH_4}$, dan $\mathrm{CO_2}$.

Berbagai penelitian sebelumnya menunjukkan bahwa teori grup berperan penting dalam memahami hubungan antara bentuk geometri dan sifat-sifat molekul. Namun, sebagian besar penelitian masih berfokus pada penerapan konsep simetri tanpa membahas secara lebih mendalam aspek matematis berupa homomorfisma antara grup titik simetri dan grup matriks. Melalui konsep homomorfisma, setiap operasi simetri pada molekul dapat direpresentasikan sebagai transformasi linear dalam bentuk matriks sehingga struktur abstrak teori grup dapat dinyatakan secara lebih konkret.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini berfokus pada konstruksi homomorfisma dari grup titik simetri molekul ke grup matriks $GL_3(\mathbb{R})$ pada beberapa molekul sederhana.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. memahami dan menjelaskan konsep homomorfisma antara grup titik simetri molekul dan grup matriks sebagai dasar teori representasi;
2. mmenunjukkan proses pemetaan setiap operasi simetri dari molekul sederhana (H_2O, NH_3, CH_4, dan CO_2) ke dalam bentuk representasi matriks yang sesuai;
3. memberikan pemahaman mengenai hubungan antara struktur grup titik simetri dan representasi matriksnya.

1.3 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat bagi pembaca, antara lain:

1. memberikan kontribusi teoretis dalam pengembangan penerapan teori grup pada kimia fisik;
2. menjadi dasar matematis dalam merepresentasikan operasi simetri molekul ke dalam bentuk matriks $GL_3(\mathbb{R})$;
3. mendukung penelitian lanjutan yang berkaitan dengan penerapan teori grup dan representasi matriks dalam analisis struktur serta simetri molekul;
4. menambah wawasan mengenai hubungan antara konsep matematika abstrak dengan fenomena ilmiah yang nyata.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas mengenai definisi-definisi dasar yang berperan sebagai teori pendukung dalam penyelesaian penelitian ini.

2.1 Teori Grup

Grup adalah struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tak kosong bersama dengan suatu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Grup terbentuk dari operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Oleh karena itu, sebelum membahas definisi grup diberikan definisi operasi biner. Berikut definisi operasi biner.

Definisi 2.1.1 Operasi biner $*$ pada himpunan S merupakan fungsi dari $S \times S$ ke S. Untuk setiap $(a, b) \in S \times S$, $*(a, b)$ di S dinotasikan dengan $a * b$ (Fitriani & Faisol, 2022).

Berikut diberikan contoh operasi biner.

Contoh 2.1.1 Pasangan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ himpunan bilangan bulat dan $+$ operasi penjumlahan, merupakan operasi biner. Hal ini karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, hasil penjumlahan $a + b$ juga merupakan bilangan bulat, sehingga memenuhi sifat tertutup. Selain itu, penjumlahan bilangan bulat terdefinisi untuk semua pasangan anggota $\mathbb{Z}$ dan menghasilkan satu nilai yang unik.

Setelah membahas tentang operasi biner, selanjutnya diberikan definisi grup.

Definisi 2.1.2 Suatu grup $\langle G, * \rangle$ terdiri dari himpunan G bersama operasi biner $*$ yang didefinisikan pada G dan memenuhi aksioma berikut:

(i) operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$;

(ii) terdapat elemen identitas e, yaitu untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$;

(iii) untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen invers $a' \in G$ sehingga berlaku $a * a' = a' * a = e$

(Fitriani & Faisol, 2022).

Setelah mempelajari definisi dari grup, berikut diberikan contoh yang berkaitan dengan grup.

Contoh 2.1.2 Himpunan $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, dan $\mathbb{R}$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan. Himpunan $\mathbb{R}^*$ (Himpunan bilangan real yang tak nol), $\mathbb{Q}^*$ (Himpunan bilangan rasional yang tak nol), $\mathbb{C}^*$ (Himpunan bilangan kompleks yang tak nol) merupakan grup terhadap operasi perkalian.

Berdasarkan definisi grup, konsep selanjutnya yang relevan adalah grup hingga, yakni grup yang dibentuk atas himpunan berhingga.

Definisi 2.1.3 Grup tak hingga $\langle G, * \rangle$ adalah grup dengan himpunan G yang memiliki jumlah elemen tak hingga. Jika G merupakan himpunan berhingga, maka grup $\langle G, * \rangle$ dinamakan grup hingga (Fitriani & Faisol, 2022).

Definisi 2.1.4 Jika G merupakan grup hingga, maka order dari G, dinotasikan dengan $|G|$, adalah banyaknya elemen pada G. Secara umum, untuk sebarang himpunan berhingga S, $|S|$ adalah jumlah elemen S (Fitriani & Faisol, 2022).

Berikut diberikan contoh dari grup hingga.

Contoh 2.1.3 Diberikan grup $\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{11}\}$ dengan operasi penjumlahan modulo 12. Banyaknya elemen di dalam $\mathbb{Z}_{12}$ adalah 12, sehingga orde grup ini adalah $|\mathbb{Z}_{12}| = 12$. Karena jumlah elemennya berhingga, maka $\mathbb{Z}_{12}$ termasuk ke dalam *finite group* (grup hingga).

Subgrup adalah konsep dalam teori grup yang akan dibahas pada bagian ini. Akan dijelaskan mengenai definisi, teorema, dan contoh dari subgrup sebagai berikut.

Definisi 2.1.5 Diberikan himpunan bagian H dari grup G yang tertutup terhadap operasi biner pada G. Himpunan H dikatakan subgrup G jika terhadap operasi biner yang sama pada G, H merupakan grup. Selanjutnya, H subgrup G dinotasikan dengan $H \leq G$ atau $H < G$ yang berarti H subgrup G, tetapi $H \neq G$ (Fitriani & Faisol, 2022).

Teorema 2.1.1 Himpunan bagian H dari grup G merupakan subgrup jika dan hanya jika:

(i) $H \neq \varnothing$;

(ii) $xy^{-1} \in H$, untuk setiap $x, y \in H$.

Selanjutnya, jika H berhingga, maka H merupakan subgrup G jika dan hanya jika H tak kosong dan tertutup terhadap operasi biner di G (Fitriani & Faisol, 2022).

Bukti. Diberikan subgrup H di G, akan ditunjukkan bahwa sifat (i) dan (ii) terpenuhi. Karena H adalah subgrup G, elemen identitas e termuat di H. Oleh karena itu, H bukan merupakan himpunan kosong, sehingga sifat (i) terpenuhi. Selanjutnya, diberikan sebarang $x, y \in H$. Karena H adalah subgrup G, $y^{-1} \in H$, dan H tertutup terhadap operasi biner di G, yang menghasilkan $xy^{-1} \in H$, sehingga sifat (ii) terpenuhi.

Di sisi lain, asumsikan bahwa sifat (i) dan (ii) terpenuhi. Seperti yang ditunjukkan oleh sifat (i), $H \neq \varnothing$. Misalkan $x \in H$. Pilih $y = x$, dan gunakan sifat (ii), didapat $xx^{-1} = e \in H$, yang menunjukkan bahwa H memuat elemen identitas. Selain itu, karena H memuat elemen identitas e dan x, dari sifat (ii) didapat $ex^{-1} = x^{-1} \in H$. Dengan cara yang sama, didapat bahwa jika $y \in H$, maka $y^{-1} \in H$, dan dengan menggunakan sifat (ii), didapat $x(y^{-1})^{-1} = xy \in H$. Jadi, H adalah subgrup G karena tertutup terhadap operasi biner di G.

Berikut diberikan contoh dari subgrup.

Contoh 2.1.4 Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan subgrup dari himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ terhadap operasi penjumlahan, karena $\mathbb{Z}$ tidak kosong, memuat elemen identitas 0, tertutup terhadap penjumlahan, dan setiap elemennya memiliki invers aditif di dalam $\mathbb{Z}$. Demikian pula, himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ juga merupakan subgrup dari himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ terhadap operasi penjumlahan, karena $\mathbb{Q}$ memenuhi seluruh sifat subgrup tersebut.

2.2 Grup Titik Simetri

Kata *simetri* berasal dari bahasa Yunani *symmetria*, yang berarti “kesebandingan” atau “keseimbangan proporsional”. Dalam konteks matematika, simetri didefinisikan sebagai sifat suatu objek yang tetap tidak berubah (*invarian*) terhadap transformasi tertentu, seperti rotasi, refleksi, atau translasi (Weyl, 1952). Dengan kata lain, suatu objek dikatakan simetris apabila setelah dikenai transformasi tersebut, bentuknya tetap identik dengan bentuk semula. Konsep ini menjadi dasar bagi berbagai cabang ilmu, termasuk kimia, dalam memahami keteraturan dan keseimbangan bentuk dalam struktur molekul.

Dalam konteks kimia, simetri molekul mengacu pada kesetaraan posisi atom-atom di dalam molekul terhadap suatu transformasi seperti rotasi, refleksi, atau inversi tanpa mengubah identitas keseluruhan molekul (Housecroft & Sharpe, 2012). Dengan kata lain, molekul dikatakan simetris apabila setelah mengalami transformasi tertentu tetap memiliki bentuk yang identik dengan semula. Pemahaman mengenai simetri penting karena melalui konsep inilah struktur molekul dapat dianalisis secara sistematis berdasarkan keteraturannya. Oleh sebab itu, untuk menggambarkan keseluruhan sifat simetri suatu molekul digunakan konsep grup titik simetri.

Grup titik simetri merupakan himpunan seluruh operasi simetri yang dapat dilakukan pada suatu molekul tanpa mengubah posisinya, sehingga menghasilkan bentuk yang identik (Miessler dkk., 2014). Himpunan operasi ini memenuhi sifat-sifat dasar grup, yaitu memiliki elemen identitas, invers, tertutup terhadap operasi gabungan, dan bersifat asosiatif. Menurut Housecroft & Sharpe (2012), setiap molekul memiliki grup titik tertentu yang menunjukkan jumlah dan jenis elemen simetrinya, seperti C_2, C_{3v}, D_{3h}, T_d, atau O_h. Dengan demikian, grup titik simetri memberikan gambaran menyeluruh mengenai sifat geometris molekul serta menjadi dasar penerapan teori grup dalam memahami struktur dan sifat kimia.

Operasi simetri merupakan suatu pergerakan atau transformasi yang dilakukan terhadap suatu objek sehingga posisi dan orientasi objek setelah pergerakan tersebut tidak dapat dibedakan dari keadaan semula. Elemen simetri adalah kesatuan geometris yang menjadi acuan dari operasi tersebut, seperti titik, garis, atau bidang. Kedua konsep ini memiliki hubungan yang sangat erat, sebab operasi simetri hanya dapat didefinisikan berdasarkan elemen simetri yang bersesuaian. Sebaliknya, keberadaan suatu elemen simetri hanya dapat dibuktikan melalui adanya operasi simetri yang sesuai. Dengan demikian, elemen simetri dan operasi simetri saling bergantung satu sama lain, sehingga keduanya perlu dibahas secara bersamaan (Cotton, (1990).

Operasi simetri yang sering ditemui pada struktur kimia, diantaranya adalah identitas (E), pusat inversi (i), sumbu putar simetri (C_n), bidang cermin (σ), dan sumbu rotasi-refleksi (S_n) (Cotton, 1990). Berikut ini merupakan penjelasan dari masing-masing jenis operasi simetri tersebut.

(i) E (identitas)
Setiap molekul memiliki operasi identitas yang menyebabkan tidak adanya perubahan pada molekul tersebut.

(ii) C_n (sumbu rotasi)
Operasi rotasi dilakukan dengan memutar molekul sebesar $2\pi/n$ terhadap suatu sumbu tertentu, dengan n menunjukkan orde sumbu rotasi. Apabila setelah rotasi molekul tampak identik dengan posisi awal, maka sumbu tersebut disebut sumbu rotasi C_n. Rotasi searah jarum jam dinotasikan sebagai C_n^+, sedangkan rotasi berlawanan arah jarum jam dinotasikan sebagai C_n^-.

(iii) σ (bidang cermin)
Operasi simetri bidang cermin berupa refleksi atau pencerminan oleh suatu bidang yang menghasilkan konfigurasi objek yang ekuivalen. Terdapat tiga jenis bidang cermin, yaitu:

a. σ_h: bidang cermin yang tegak lurus terhadap sumbu utama rotasi.
b. σ_v: bidang cermin yang memuat sumbu utama rotasi.
c. σ_d: bidang cermin dihedral, yang dibentuk oleh sumbu utama rotasi dan dua sumbu C_2 yang berdekatan.

(iv) S_n (sumbu rotasi-refleksi)
Operasi rotasi-refleksi merupakan kombinasi antara rotasi sebesar $2\pi/n$ dan refleksi terhadap bidang cermin yang tegak lurus dengan sumbu rotasi.

(v) i (pusat inversi)
Pusat inversi atau pusat simetri adalah refleksi suatu objek terhadap titik pusat inversi dengan mengubah setiap koordinat (x, y, z) menjadi $(-x, -y, -z)$.

Berdasarkan kombinasi elemen-elemen simetri yang dimilikinya, setiap molekul dapat diklasifikasikan ke dalam grup titik simetri tertentu. Klasifikasi ini merepresentasikan seluruh operasi simetri yang dapat dilakukan tanpa mengubah bentuk molekul dan menjadi dasar dalam analisis struktur serta sifat-sifat molekul. Secara umum, grup titik simetri dibedakan menjadi beberapa kelompok utama, yaitu grup C, D, T, O, dan I, yang masing-masing memiliki karakteristik tersendiri (Housecroft & Sharpe, 2012).

Setiap kelompok memiliki ciri khas dan tingkat simetri yang berbeda-beda, tergantung pada jenis elemen simetri yang dimiliki oleh molekul. Berikut ini penjelasan dari masing-masing grup titik simetri tersebut.

(i) Grup C

Grup ini mencakup molekul yang memiliki satu sumbu rotasi utama (C_n). Molekul dalam grup ini dapat memiliki atau tidak memiliki bidang cermin, tergantung pada elemen simetrinya. Grup C_1 merupakan yang paling sederhana karena hanya memiliki elemen identitas (E). Grup C_s memiliki satu bidang cermin (σ), sedangkan C_i memiliki satu pusat inversi (i).

Molekul dengan C_n hanya memiliki sumbu rotasi utama tanpa bidang cermin, sedangkan C_{nv} memiliki sumbu rotasi utama dan n bidang cermin vertikal (σ_v) yang memuat sumbu tersebut, seperti pada NH_3. Sementara itu, C_{nh} memiliki sumbu rotasi utama dan satu bidang cermin horizontal (σ_h) yang tegak lurus terhadap sumbu utama, contohnya pada BF_3. Secara umum, grup C menunjukkan tingkat simetri yang relatif rendah karena hanya memiliki satu elemen simetri dominan (Housecroft & Sharpe, 2012).

(ii) Grup D

Grup D mencakup molekul yang memiliki satu sumbu rotasi utama (C_n) dan n sumbu tambahan C_2 yang tegak lurus terhadapnya, sehingga tingkat simetrinya lebih tinggi daripada grup C. Grup D_n hanya memiliki sumbu-sumbu rotasi, sedangkan D_{nv} memiliki tambahan n bidang cermin vertikal (σ_v), D_{nh} memiliki satu bidang cermin horizontal (σ_h), dan D_{nd} memiliki n bidang cermin dihedral (σ_d). Molekul dalam grup ini umumnya menunjukkan keteraturan bentuk yang lebih kompleks, seperti pada etana dalam konformasi *staggered* yang termasuk ke dalam grup D_{3d} (Housecroft & Sharpe, 2012).

(iii) Grup T, O, dan I

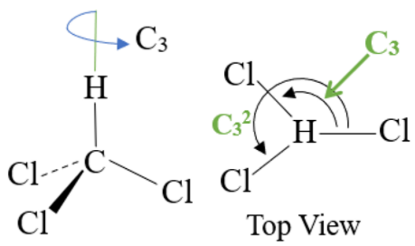
Grup-grup ini mencakup molekul dengan simetri sangat tinggi, di mana banyak sumbu rotasi dan bidang cermin saling berpotongan membentuk pola geometri yang teratur. Grup T_d (tetrahedral) memiliki empat sumbu C_3, tiga sumbu C_2, serta enam bidang cermin dihedral, seperti pada CH_4. Grup O_h (oktahedral) memiliki enam sumbu C_4, empat sumbu C_3, tiga sumbu C_2, serta bidang-bidang cermin dan pusat inversi, contohnya SF_6.

Sementara I_h (ikosahedral) merupakan grup dengan simetri tertinggi, memiliki beberapa sumbu rotasi orde tinggi (C_5, C_3, dan C_2), seperti pada kompleks boron $[B_{12}H_{12}]^{2-}$. Molekul-molekul dalam grup ini sangat simetris dan sering dijadikan model untuk menjelaskan hubungan antara simetri, struktur, serta sifat-sifat fisik molekul (Housecroft & Sharpe, 2012).

Melalui klasifikasi tersebut, setiap molekul dapat dikenali dan dipahami berdasarkan tingkat simetrinya. Konsep grup titik simetri memberikan kerangka sistematis yang mempermudah analisis bentuk dan keteraturan molekul, serta menjadi dasar utama dalam penerapan teori grup untuk menjelaskan sifat-sifat spektroskopi, energi, dan interaksi kimia suatu molekul.

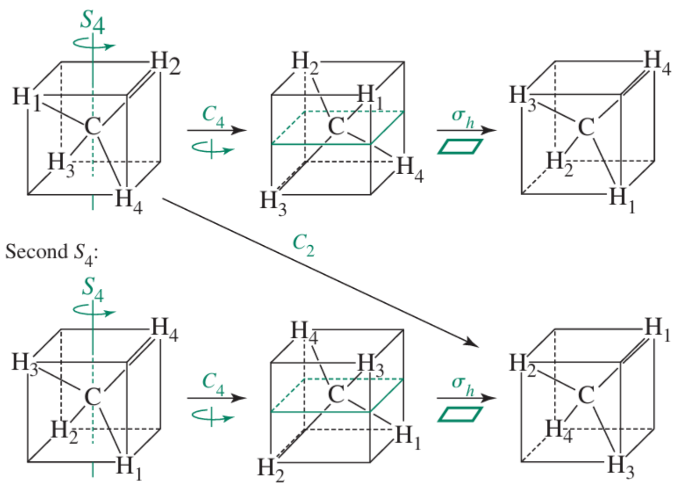
Berikut diberikan contoh dari grup titik simetri.

Contoh 2.2.1 Pada molekul $CHCl_3$, terdapat sumbu rotasi orde tiga (C_3) yang melewati atom karbon dan hidrogen. Ketika molekul diputar sebesar $120°$ di sekitar sumbu ini, ketiga atom klorin saling bertukar posisi dan menghasilkan tampilan yang sama dengan bentuk awal. Perubahan tersebut menegaskan bahwa rotasi C_3 merupakan salah satu elemen simetri yang penting pada $CHCl_3$. Jika digabungkan dengan tiga bidang cermin vertikal (σ_v), susunan elemen simetri ini menempatkan $CHCl_3$ dalam grup titik C_{3v}.



Gambar 2.1 Contoh grup titik simetri dari molekul $CHCl_3$

Contoh 2.2.2 Pada molekul metana (CH_4), keberadaan elemen rotasi-refleksi S_4 dapat ditunjukkan dengan menempatkan empat atom hidrogen pada sudut sebuah kubus. Operasi S_4 dilakukan melalui rotasi $90°$ (C_4) di sekitar sumbu tertentu yang kemudian diikuti oleh refleksi terhadap bidang cermin horizontal (σ_h). Transformasi ini menggeser posisi atom, tetapi susunan akhirnya tetap identik secara simetri. Urutan operasinya bersifat periodik, di mana S_4^2 setara dengan rotasi C_2, sedangkan S_4^4 kembali menghasilkan elemen identitas (E). Hubungan ini menunjukkan peran penting S_4 dalam menggambarkan keteraturan simetri molekul CH_4.



Gambar 2.2 Contoh grup titik simetri pada molekul dengan simetri oktahedral

2.3 Struktur Molekul Kimia

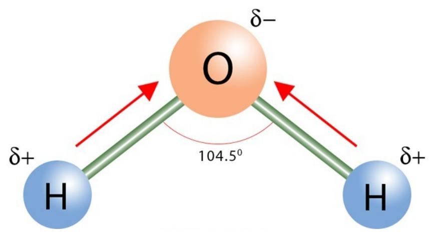
Molekul merupakan gabungan dari dua atau lebih atom yang tersusun dalam suatu pola tertentu dan diikat oleh gaya atau ikatan kimia sehingga membentuk satu kesatuan yang stabil. Molekul dapat berupa unsur maupun senyawa, tergantung pada jenis atom yang menyusunnya. Sifat-sifat zat sangat dipengaruhi oleh jenis atom penyusun dan cara atom-atom tersebut berikatan di dalam molekul. Dengan demikian, molekul dapat dipandang sebagai unit terkecil dari suatu senyawa yang masih mempertahankan sifat kimia zat tersebut (Chang, 2010).

Secara lebih spesifik dalam konteks kimia, molekul merupakan gabungan dua atau lebih atom yang dapat berasal dari unsur yang sama ataupun berbeda dan berperan sebagai partikel terkecil dari suatu zat yang masih memiliki sifat kimia zat tersebut. Jika atom-atom penyusunnya berasal dari unsur yang sama disebut molekul unsur, sedangkan jika berasal dari unsur yang berbeda disebut molekul senyawa. Contoh molekul senyawa adalah air (H_2O) yang tersusun atas dua atom hidrogen dan satu atom oksigen. Dengan demikian, molekul menjadi satuan dasar penting dalam memahami sifat zat dan proses kimia yang terjadi (Manik, 2019).

Selain komposisi kimianya, setiap molekul memiliki bentuk ruang atau geometri tertentu yang menggambarkan susunan tiga dimensi atom-atom penyusunnya. Bentuk ini ditentukan oleh gaya tolak-menolak antara pasangan elektron pada kulit valensi atom pusat. Berdasarkan teori *Valence Shell Electron Pair Repulsion* (VSEPR) menjelaskan bahwa pasangan elektron akan menempati posisi sejauh mungkin satu sama lain untuk meminimalkan tolakan elektrostatik sehingga tercapai kestabilan. Geometri molekul menentukan distribusi elektron serta posisi inti atom yang berpengaruh terhadap sifat fisik dan kimia suatu zat, termasuk kepolaran dan interaksi antarmolekulnya (Chang, 2010).

Berikut beberapa molekul sederhana yang akan dibahas untuk menunjukkan peran teori VSEPR dalam menentukan bentuk, sifat, dan elemen simetri molekul tersebut. Molekul air (H_2O) terdiri atas satu atom oksigen yang berikatan dengan dua atom hidrogen. Atom oksigen memiliki empat pasangan elektron valensi, dua membentuk ikatan O–H dan dua lainnya merupakan pasangan elektron bebas. Tolakan antara pasangan elektron bebas yang lebih besar dibandingkan dengan pasangan ikatan menyebabkan molekul H_2O berbentuk bengkok (*bent*) dengan sudut ikatan sekitar $104.5°$. Bentuk yang tidak simetris menimbulkan momen dipol bersih, menjadikan H_2O bersifat polar (Chang, 2010). Berdasarkan elemen simetrinya, molekul ini termasuk dalam grup titik C_{2v} dengan satu sumbu rotasi dua kali (C_2) dan dua bidang cermin vertikal (σ_v) (Miessler dkk., 2014).

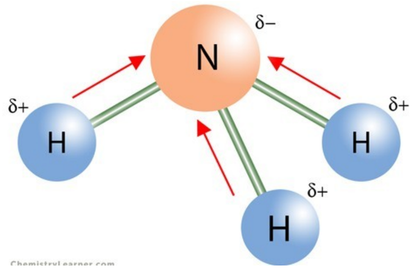
Berdasarkan uraian tersebut, bentuk geometri molekul air (H_2O) menurut teori VSEPR dapat dilihat pada Gambar 2.3 berikut.



Gambar 2.3 Struktur molekul air (H_2O).
Sumber: `https://www.chemistrylearner.com/polarity/polarity-of-water`

Molekul amonia (NH_3) terdiri dari satu atom nitrogen yang berikatan dengan tiga atom hidrogen dan memiliki satu pasangan elektron bebas. Berdasarkan teori VSEPR, empat pasangan elektron ini akan membentuk geometri tetrahedral ideal. Keberadaan pasangan elektron bebas menimbulkan tolakan yang lebih besar, sehingga molekul berbentuk piramida trigonal (*trigonal pyramidal*) dengan sudut ikatan sekitar 107°. Distribusi muatan yang tidak merata membuat molekul NH_3 bersifat polar (Chang, 2010). Secara simetri, NH_3 tergolong dalam grup titik C_{3v}, dengan satu sumbu rotasi tiga kali dan tiga bidang cermin vertikal (Miessler dkk., 2014).

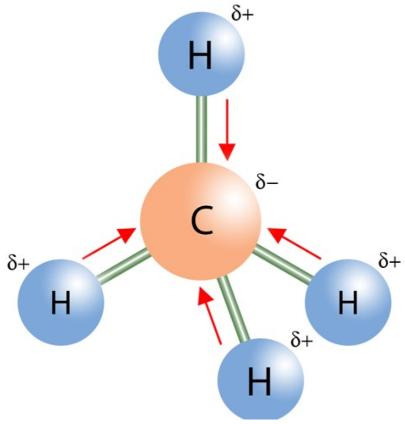
Berdasarkan uraian tersebut, bentuk geometri molekul amonia (NH_3) menurut teori VSEPR dapat dilihat pada Gambar 2.4 berikut.



Gambar 2.4 Struktur molekul amonia (NH_3).
Sumber:
https://www.chemistrylearner.com/polarity/polarity-of-ammonia-nh3

Molekul metana (CH_4) memiliki satu atom karbon pusat yang berikatan dengan empat atom hidrogen. Keempat pasangan elektron ikatan C–H saling tolak-menolak secara simetris sehingga membentuk geometri tetrahedral dengan sudut ikatan 109,5°. Karena semua ikatan C–H identik dan arah momen dipolnya saling meniadakan, metana merupakan molekul nonpolar (Chang, 2010). Berdasarkan elemen simetrinya, CH_4 termasuk dalam grup titik T_d, yang memiliki simetri tinggi dengan beberapa sumbu rotasi dan bidang cermin (Miessler dkk., 2014).

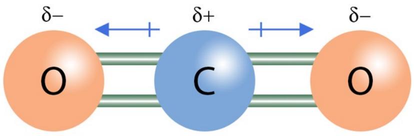
Berdasarkan uraian tersebut, bentuk geometri molekul metana (CH_4) menurut teori VSEPR dapat dilihat pada Gambar 2.5 berikut.



Gambar 2.5 Struktur molekul metana (CH_4).
Sumber:
https://www.chemistrylearner.com/polarity/polarity-of-methane-ch4

Molekul karbon dioksida (CO_2) memiliki atom karbon pusat yang berikatan rangkap dengan dua atom oksigen pada kedua sisinya. Karena tidak terdapat pasangan elektron bebas pada atom karbon, kedua ikatan C=O saling menjauh membentuk geometri linear dengan sudut ikatan $180°$. Meskipun setiap ikatan C=O bersifat polar, dua momen dipol tersebut saling meniadakan sehingga molekul CO_2 secara keseluruhan bersifat nonpolar (Chang, 2010). Dari sisi simetri, CO_2 tergolong dalam grup titik $D_{\infty h}$, yang memiliki sumbu rotasi utama tak hingga (C_∞) dan bidang simetri horizontal (σ_h) (Miessler dkk., 2014).

Berdasarkan uraian tersebut, bentuk geometri molekul karbon dioksida (CO_2) menurut teori VSEPR dapat dilihat pada Gambar 2.6 berikut.



Gambar 2.6 Struktur molekul karbon dioksida (CO_2).
Sumber: `https://www.chemistrylearner.com/polarity/polarity-of-carbon-dioxide-co2`

2.4 Grup Matriks $\mathbf{GL_n}(\mathbb{R})$

Konsep simetri yang muncul pada struktur molekul kimia juga dapat dijelaskan secara matematis melalui grup linear umum $GL_n(\mathbb{R})$, yang terdiri atas semua matriks invertibel berordo n dengan elemen real. Berikut akan dijelaskan definisi serta contoh dari grup linear umum $GL_n(\mathbb{R})$.

Definisi 2.4.1 Misalkan $M_n(\mathbb{R})$ adalah himpunan semua matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ dengan entri-entri berupa bilangan real. Suatu matriks $A \in M_n(\mathbb{R})$ dapat dituliskan dalam bentuk

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}$ untuk setiap $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Himpunan semua matriks bujur sangkar yang memiliki determinan tak nol disebut grup linear umum derajat n atas $\mathbb{R}$, dan dinotasikan dengan

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{\, A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0 \,\}.$$

Setiap elemen $A \in GL_n(\mathbb{R})$ disebut matriks invertibel karena memiliki invers A^{-1} terhadap operasi perkalian matriks, sehingga berlaku:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n,$$

dengan I_n menyatakan matriks identitas berukuran $n \times n$.

Dengan operasi perkalian matriks, himpunan $GL_n(\mathbb{R})$ membentuk suatu grup yang disebut grup linear umum derajat n atas bilangan real (Dummit & Foote, 2004).

Contoh 2.4.1 Diberikan matriks $A \in M_2(\mathbb{R})$ dan $B \in M_3(\mathbb{R})$ sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Akan dibuktikan bahwa kedua matriks tersebut termasuk dalam kelompok linear umum atas bilangan real, yaitu $GL_n(\mathbb{R})$.

Untuk matriks A, diperoleh nilai determinannya sebagai berikut:

$$\det(A) = (3)(-2) - (1)(4) = -10.$$

Karena nilai determinan matriks A tidak sama dengan nol, maka dapat disimpulkan bahwa matriks A memiliki invers terhadap operasi perkalian matriks. Dengan demikian, matriks A termasuk ke dalam kelompok linear umum dua ordo atas bilangan real, atau dapat ditulis $A \in GL_2(\mathbb{R})$.

Selanjutnya, untuk matriks B, diperoleh:

$$\det(B) = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}.$$

Hasil perhitungan minor dari matriks tersebut adalah:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} = 93, \quad \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -78, \quad \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = -3.$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\det(B) = (1)(93) - (2)(-78) + (3)(-3) = 240.$$

Karena determinan matriks B juga tidak sama dengan nol, maka matriks B memiliki invers terhadap operasi perkalian matriks. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa $B \in GL_3(\mathbb{R})$. Berdasarkan hasil perhitungan yang diperoleh, diketahui bahwa determinan matriks A dan B keduanya bernilai tidak nol. Hal ini menunjukkan bahwa masing-masing matriks memiliki invers terhadap operasi perkalian matriks. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa matriks A termasuk ke dalam $GL_2(\mathbb{R})$ dan matriks B termasuk ke dalam $GL_3(\mathbb{R})$. Dengan demikian, kedua matriks tersebut memenuhi syarat untuk termasuk dalam kelompok linear umum atas bilangan real, karena keduanya bersifat invertibel dan memiliki determinan tak nol.

2.5 Rotasi pada Ruang Tiga Dimensi dan Rumus Rodrigues

Rotasi pada ruang tiga dimensi merupakan transformasi linear yang mempertahankan panjang dan sudut suatu vektor. Transformasi ini direpresentasikan menggunakan matriks ortogonal berordo 3×3 dengan determinan bernilai satu yang membentuk grup rotasi khusus $SO(3)$. Matriks rotasi digunakan untuk menggambarkan perubahan orientasi suatu benda tegar dalam ruang tiga dimensi (Lynch & Park, 2017).

Secara umum, rotasi suatu objek dapat dinyatakan sebagai rotasi terhadap suatu sumbu tertentu dengan sudut rotasi tertentu. Pada sistem koordinat Kartesius, rotasi dasar terhadap sumbu x, y, dan z dapat dinyatakan menggunakan matriks rotasi berikut.

Rotasi terhadap sumbu x:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.5.1}$$

Rotasi terhadap sumbu y:

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.5.2}$$

Rotasi terhadap sumbu z:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.5.3}$$

Matriks rotasi tersebut menggambarkan perubahan orientasi suatu objek terhadap masing-masing sumbu koordinat. Kombinasi dari rotasi terhadap sumbu-sumbu tersebut dapat menghasilkan orientasi yang lebih kompleks dalam ruang tiga dimensi.

Selain rotasi terhadap sumbu koordinat, rotasi juga dapat dinyatakan terhadap suatu sumbu sembarang. Representasi ini dapat diperoleh menggunakan rumus rotasi Rodrigues. Misalkan $\omega \in \mathbb{R}^3$ merupakan vektor satuan yang menunjukkan arah sumbu rotasi dan θ merupakan sudut rotasi, maka matriks rotasi dapat dinyatakan sebagai

$$R(\omega, \theta) = I + \sin\theta[\omega] + (1 - \cos\theta)[\omega]^2 \tag{2.5.4}$$

Dengan notasi $[\hat{\omega}]$ menyatakan matriks *skew-symmetric* yang dibentuk dari vektor $\hat{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, yaitu

$$[\hat{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}.$$

2.6 Transformasi Refleksi dan *Householder Transformation*

Householder reflection merupakan transformasi dalam aljabar linear yang digunakan untuk merefleksikan suatu vektor terhadap suatu hyperplane menggunakan matriks ortogonal. Jika $v \in \mathbb{R}^n$ merupakan vektor tak nol, maka matriks Householder didefinisikan sebagai

$$P = I - \frac{2}{v^T v} v v^T, \tag{2.6.5}$$

dengan I adalah matriks identitas dan v disebut sebagai *Householder vector*. Jika suatu vektor x dikalikan dengan matriks P, maka diperoleh

$$Px = x - \frac{2v^T x}{v^T v} v. \tag{2.6.6}$$

Transformasi ini merefleksikan vektor x terhadap hyperplane yang tegak lurus terhadap vektor v. Matriks Householder memiliki sifat simetris dan ortogonal sehingga sering digunakan dalam berbagai transformasi matriks dan komputasi numerik (Golub & Van Loan, 1996).

2.7 Homomorfisma Grup

Setelah pembahasan mengenai grup matriks $GL_n(\mathbb{R})$, langkah selanjutnya adalah memperkenalkan konsep *homomorfisma grup* sebagai dasar untuk memahami hubungan antara dua grup dalam teori aljabar.

Definisi 2.7.1 Diberikan grup G dan G'. Pemetaan $\phi : G \to G'$ dinamakan homomorfisma jika untuk setiap $a, b \in G$ berlaku

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b).$$

(Fitriani & Faisol, 2022)

Contoh 2.7.1 Diberikan F adalah grup yang terdiri dari semua fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ dengan operasi penjumlahan fungsi, $\mathbb{R}$ adalah grup yang terdiri dari semua bilangan real terhadap operasi penjumlahan dan c adalah sebarang bilangan real. Didefinisikan:

$$\phi_c : F \to \mathbb{R},$$

dengan $\phi_c(f) = f(c)$, untuk setiap $f \in F$.

Perhatikan bahwa untuk setiap $f, g \in F$ berlaku:

$$\phi_c(f + g) = (f + g)(c) = f(c) + g(c) = \phi_c(f) + \phi_c(g).$$

Oleh karena itu, $\phi_c : F \to \mathbb{R}$ merupakan homomorfisma grup.

Definisi 2.7.2 Diberikan pemetaan ϕ dari himpunan X ke himpunan Y, $A \subseteq X$ dan $B \subseteq Y$. Bayangan (*image*) $\phi[A]$ dari A di Y atas ϕ adalah himpunan $\{\phi(a) \mid a \in A\}$. Himpunan $\phi[X]$ adalah jangkauan (*range*) dari ϕ. Bayangan invers (*inverse image*) $\phi^{-1}[B]$ dari B di X adalah $\{x \in X \mid \phi(x) \in B\}$ (Fitriani & Faisol, 2022).

Teorema 2.7.1 Diberikan grup G, G' dan homomorfisma grup $\phi : G \to G'$, berlaku:

(i) Jika e adalah elemen identitas di G, maka $\phi(e)$ adalah elemen identitas e' di G'.

(ii) Jika $a \in G$, maka $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$.

(iii) Jika H adalah subgrup G, maka $\phi[H]$ adalah subgrup G'.

(iv) Jika K' adalah subgrup G', maka $\phi^{-1}[K']$ adalah subgrup G.

(Fitriani & Faisol, 2022).

Bukti.

(i) Karena $\phi : G \to G'$ adalah homomorfisma grup, maka berlaku:

$$\phi(a) = \phi(ae) = \phi(a)\phi(e).$$

dengan mengoperasikan kedua ruas dengan $\phi(a)^{-1}$ dari kiri, diperoleh

$$\begin{aligned} \phi(a)^{-1}\phi(a) &= \phi(a)^{-1}\phi(a)\phi(e) \\ e' &= e'\phi(e) \\ e' &= \phi(e) \end{aligned}$$

Oleh karena itu, $\phi(e)$ adalah elemen identitas e' di G'.

(ii) Perhatikan bahwa

$$e' = \phi(e) = \phi(aa^{-1}) = \phi(a)\phi(a^{-1}).$$

Hasil ini menunjukkan bahwa invers dari $\phi(a)$ adalah $\phi(a^{-1})$. Dengan kata lain,

$$\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}.$$

(iii) Diberikan H subgrup G dan $\phi(a), \phi(b) \in \phi[H]$. Akan ditunjukkan bahwa $\phi[H]$ adalah subgrup G'. Perhatikan bahwa

$$\phi(a)\phi(b) = \phi(ab).$$

Karena $a, b \in H$ dan H subgrup G, maka $ab \in H$. Akibatnya, $\phi(ab) \in \phi[H]$, sehingga $\phi[H]$ tertutup terhadap operasi dari G'. Selanjutnya, karena

$\phi(e) = e'$, maka $\phi[H]$ memuat elemen identitas e'. Kemudian, karena $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$, maka untuk setiap $\phi(a) \in \phi[H]$ terdapat $\phi(a^{-1}) \in \phi[H]$ sehingga $\phi(a^{-1})\phi(a) = \phi(a)\phi(a^{-1}) = e'$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa $\phi[H]$ adalah subgrup G'.

(iv) Diberikan K' adalah subgrup G'. Misalkan $a, b \in \phi^{-1}[K']$, maka $\phi(a), \phi(b) \in K'$. Karena K' adalah subgrup G', $\phi(a)\phi(b) \in K'$. Perhatikan bahwa

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b).$$

Hal ini menunjukkan bahwa $ab \in \phi^{-1}[K']$. Oleh karena itu, $\phi^{-1}[K']$ tertutup terhadap operasi biner di G. Selanjutnya, akan ditunjukkan $\phi^{-1}[K']$ memuat elemen identitas e. Karena

$$e' = \phi(e),$$

berlaku $e \in \phi^{-1}[K']$. Oleh karena itu, $\phi^{-1}[K']$ memuat elemen identitas e. Diberikan sebarang $a \in \phi^{-1}[K']$. Akan ditunjukkan $\phi^{-1}[K']$ memuat invers dari a. Karena $a \in \phi^{-1}[K']$, maka $\phi(a) \in K'$. Berdasarkan hipotesis, K' adalah subgrup G'. Akibatnya, invers dari $\phi(a)$ yaitu $\phi(a)^{-1}$ termuat di dalam K'. Telah dibuktikan sebelumnya pada bagian (2) bahwa $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$. Sehingga, diperoleh $a^{-1} \in \phi^{-1}[K']$. Jadi, $\phi^{-1}[K']$ memuat invers dari a. Oleh karena itu, terbukti bahwa $\phi^{-1}[K']$ adalah subgrup G.

■

Definisi 2.7.3 Diberikan homomorfisma grup $\phi : G \to G'$. Subgrup

$$\phi^{-1}[\{e'\}] = \{x \in G \mid \phi(x) = e'\},$$

dengan e' elemen identitas di G', dinamakan *kernel* dari ϕ dan dinotasikan dengan $\ker(\phi)$.

Contoh 2.7.2 Didefinisikan fungsi f dari grup $(\mathbb{Z}, +)$ ke grup $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ dengan $f(a) = \bar{a}$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$. Pertama, akan ditunjukkan f merupakan homomorfisma grup sebagai berikut. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku:

$$f(a + b) = \overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b} = f(a) + f(b).$$

Oleh karena itu, f merupakan homomorfisma grup dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}_n$. Selanjutnya, akan ditentukan kernel dari f sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\ker(f) &= \{a \in \mathbb{Z} \mid f(a) = \bar{0}\} \\
&= \{a \in \mathbb{Z} \mid \bar{a} = \bar{0}\} \\
&= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \text{ habis dibagi } n\} \\
&= \{qn \mid q \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Dari sini, diperoleh bahwa $\ker(f) = \{qn \mid q \in \mathbb{Z}\}$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur dengan mengumpulkan dan mengolah berbagai referensi seperti buku teks, jurnal ilmiah, serta sumber daring yang relevan. Penelitian bersifat teoretis-analitis dan berfokus pada hubungan matematis antara grup titik simetri dan grup matriks melalui konsep homomorfisma grup.

Langkah-langkah penelitian adalah sebagai berikut:

1. mempelajari teori dasar yang berkaitan dengan teori grup, grup titik simetri, grup matriks, representasi matriks, serta konsep homomorfisma grup;
2. menentukan grup titik simetri molekul H_2O, NH_3, CH_4, dan CO_2 berdasarkan elemen-elemen simetri yang dimiliki oleh masing-masing molekul;
3. menyusun representasi matriks dari setiap operasi simetri molekul dalam bentuk matriks pada grup $GL_3(\mathbb{R})$;

4. mengkonstruksi pemetaan homomorfisma dari setiap operasi simetri molekul ke dalam grup matriks $GL_3(\mathbb{R})$ serta membuktikan sifat homomorfisma

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b);$$

5. menganalisis hasil pemetaan untuk menjelaskan hubungan antara struktur grup titik simetri molekul dengan representasi matriks dalam grup $GL_3(\mathbb{R})$.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian mengenai konstruksi homomorfisma dari grup titik simetri ke grup matriks $GL_3(\mathbb{R})$ pada molekul sederhana, diperoleh bahwa setiap molekul memiliki elemen simetri yang membentuk suatu grup titik tertentu. Secara lebih rinci, H_2O tergolong ke dalam grup C_{2v}, NH_3 ke dalam grup C_{3v}, CH_4 ke dalam grup T_d, dan CO_2 ke dalam grup $D_{\infty h}$. Struktur grup tersebut terbentuk dari himpunan operasi simetri yang mempertahankan bentuk molekul. Setiap operasi simetri kemudian dapat direpresentasikan sebagai transformasi linear pada ruang tiga dimensi dan dinyatakan dalam bentuk matriks berordo 3×3. Matriks-matriks yang diperoleh memiliki determinan tak nol, sehingga bersifat invertibel dan termasuk ke dalam grup $GL_3(\mathbb{R})$.

Selanjutnya, pemetaan dari setiap operasi simetri pada grup titik molekul ke matriks representasinya di $GL_3(\mathbb{R})$ membentuk suatu homomorfisma grup. Hal ini ditunjukkan dengan terpenuhinya sifat $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, sehingga komposisi operasi simetri bersesuaian dengan perkalian matriks representasinya. Dengan demikian, struktur operasi pada grup titik tetap terjaga melalui representasi matriks tersebut. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa simetri molekul tidak hanya dapat dipahami secara geometris, tetapi juga dapat dijelaskan secara matematis melalui representasi matriks, sehingga memperlihatkan adanya keterkaitan yang erat antara konsep simetri dalam kimia dan struktur aljabar dalam teori grup.

5.2 Saran

Penelitian ini masih terbatas pada pembahasan molekul sederhana serta representasi matriks dalam ruang tiga dimensi. Oleh karena itu, penelitian selanjutnya diharapkan dapat mengembangkan penelitian ini dengan meneliti representasi matriks pada molekul yang memiliki tingkat simetri lebih kompleks. Selain itu, analisis homomorfisma grup dapat diperluas pada sistem molekul dengan jumlah atom yang lebih banyak sehingga menghasilkan struktur grup yang lebih beragam. Penelitian selanjutnya juga dapat meneliti hubungan antara representasi matriks dari grup titik simetri dengan penerapannya dalam bidang lain, seperti spektroskopi molekul atau teori orbital molekul.

DAFTAR PUSTAKA

Beevers, C., Francis, S., & Roldan, A. (2023). Symmetry analysis of irregular objects. *Journal of Mathematical Chemistry, 61*(3), 504–519. https://doi.org/10.1007/s10910-022-01423-x

Bishop, D. M. (1993). *Group theory and chemistry*. Dover Publications.

Boyle, L. L. (2014). The influence of abstract group theory on molecular symmetry. *Journal of Physics: Conference Series, 512*, 012019. https://doi.org/10.1088/1742-6596/512/1/012019

Bunker, P. R. (2025). The molecular symmetry group: A personal view of the history of its development. *Natural Sciences, 1*(1), 1–15. https://doi.org/10.1002/ntls.20250001

Carnia, E., Sylviani, S., & Dewia, E. (2017). Kajian grup solvable pada senyawa ethylene. *Annales: Journal of Mathematics, 31*(2), 161–170.

Carnia, E., Sylviani, S., & Dewia, E. (2017). Karakterisasi subgrup Sylow solvable dari grup poin senyawa fosfor pentaklorida. *Jurnal Sains Dasar, 6*(2), 116–122.

Chang, R. (2010). *Chemistry* (10th ed.). McGraw-Hill Education.

Cotton, F. A. (1990). *Chemical applications of group theory* (3rd ed.). Wiley-Interscience.

Desroches, J., & Dong, S. S. (2021). Electronic structure theory with molecular point group symmetries on quantum annealers. *The Journal of Chemical Physics, 155*(22), 224108. https://doi.org/10.1063/5.0261736

Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract algebra* (3rd ed.). Wiley.

Ellzey, M. L., Jr. (2009). Using group theory to obtain eigenvalues of nonsymmetric systems by symmetry averaging. *Symmetry, 1*(1), 10–20. https://doi.org/10.3390/sym1010010

Fitriani, & Faisol, A. (2022). *Grup*. Matematika, Yogyakarta.

Fong, W. H., Abdul Rahman, A., & Sarmin, N. H. (2019). Isomorphism and matrix representation of point groups. *Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences, 15*(1), 88–92. https://doi.org/10.11113/mjfas.v15n1.1059

Golub, G. H., dan Van Loan, C. F. (1996). *Matrix Computations* (3rd ed.). Baltimore: The Johns Hopkins University Press.

Hargittai, I., & Hargittai, M. (2009). *Symmetry through the eyes of a chemist* (3rd ed.). Springer.

Housecroft, C. E., & Sharpe, A. G. (2012). *Inorganic chemistry* (4th ed.). Pearson Education Limited.

Humayun, M., Smith, J., & Kennephol, P. (2024). Representing the world around us: Applications of group representation theory to molecular orbital (MO) theory. *Eureka, 9*(2), 1–12. https://doi.org/10.29173/eureka28818

Johansson, M., & Veryazov, V. (2017). Automatic procedure for generating symmetry adapted wavefunctions. *Journal of Cheminformatics, 9*(1), 8. https://doi.org/10.1186/s13321-017-0193-3

Knowles, P. J. (2022). The determination of point groups from imprecise molecular geometries. *Journal of Mathematical Chemistry, 60*(1), 161–171. https://doi.org/10.1007/s10910-021-01302-x

Lynch, K. M., & Park, F. C. (2017). *Modern robotics: Mechanics, planning, and control*. Cambridge University Press.

Mananga, E. S., Hollington, A., & Registe, K. (2018). Treatment of group theory in spectroscopy. In E. S. Mananga (Ed.), *Symmetry (group theory) and mathematical treatment in chemistry*. IntechOpen. https://doi.org/10.5772/intechopen.75735

Manik, S. E. B. (2019). *Buku kimia dasar*. Universitas Sumatera Utara Press.

Miessler, G. L., Fischer, P. J., & Tarr, D. A. (2014). *Inorganic chemistry* (5th ed.). Pearson.

Mitoli, D., Maul, J., & Erba, A. (2023). Anharmonic terms of the potential energy surface: A group theoretical approach. *Crystal Growth & Design, 23*(10), 1–12. https://doi.org/10.1021/acs.cgd.3c00104

Nielsen, S. B., Jensen, J. H., Bendix, J., & Secher, T. (2024). Evaluation of point group symmetry in lanthanide(III) complexes: A new implementation of a *continuous symmetry operation* measure with autonomous assignment of the *principal axis*. *Inorganic Chemistry, 63*(2), 1234–1245.

Nurcahyani, A. R., & Musthofa. (2021). Penerapan homomorfisma grup pada penyimpanan data berbasis DNA. *Jurnal Pendidikan Matematika dan Sains, 9*(2), 1–9. Universitas Negeri Yogyakarta.

Rahmi, E. (2010). Studi molekul $\mathrm{M_2N_2}$ dengan grup simetri $\mathrm{D}_{\infty h}$ dan D_{2h} menggunakan metode *ab initio*. *Jurnal Sainstek, 2*(1), 66–75.

Richter, W. E. (2024). Symmetry-constrained properties behave differently for 2D or 3D structures under the same point group. *The Journal of Physical Chemistry A, 128*(21), 4308–4314. https://doi.org/10.1021/acs.jpca.4c02167

Weyl, H. (1952). *Symmetry*. Princeton University Press.