DERIVASI-σ PADA ALJABAR LIE

Skripsi

Oleh

HENDY HENDARTO
NPM. 2217031107

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

ABSTRACT

σ-DERIVATION ON LIE ALGEBRA

By

Hendy Hendarto

Derivation on Lie algebras are an extension of the concept of derivation on calculus or associative algebras applied to a Lie algebra, with a particular focus on σ-derivation, which are a generalization of the concept of derivation in algebras using modified Leibniz rules involving an endomorphism. The purpose of this research is to define σ-derivation on Lie algebras and determine their properties and examples. In addition, it investigates how σ-derivation on Lie algebras relate to derivation on Lie algebras. The results of this research are expected to improve understanding of Lie algebras and provide a theoretical basis for their application in other algebraic structures.

Keywords: group, ring, module, vector space, Lie algebra, derivation, *inner* derivation, σ-derivation.

ABSTRAK

DERIVASI-σ PADA ALJABAR LIE

Oleh

Hendy Hendarto

Derivasi pada aljabar Lie adalah perluasan konsep derivasi pada kalkulus atau aljabar asosiatif yang diterapkan pada suatu aljabar Lie, dengan fokus khusus pada derivasi-σ yaitu suatu generalisasi dari konsep derivasi dalam aljabar menggunakan aturan Leibniz dimodifikasi dengan melibatkan suatu endomorfisma. Tujuan penelitian ini adalah untuk mendefinisikan derivasi-σ pada aljabar Lie serta menentukan sifat-sifat dan contohnya. Selain itu menyelidiki bagaimana hubungan derivasi-σ pada aljabar Lie dengan derivasi pada aljabar Lie. Hasil penelitian ini diharapkan dapat meningkatkan pemahaman mengenai aljabar Lie serta memberikan dasar teoritis bagi aplikasinya dalam struktur aljabar lainnya.

Kata kunci: grup, ring, modul, ruang vektor, aljabar Lie, derivasi, derivasi *inner*, derivasi-σ.

DERIVASI-σ PADA ALJABAR LIE

HENDY HENDARTO

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

Judul Skripsi : **DERIVASI-σ PADA ALJABAR LIE**

Nama Mahasiswa : ***Hendy Hendarto***

Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031107**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP 198406272006042001

Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.
NIP 199306012019032021

2. Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

Mulyono, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP 197406112000031002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	:	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Sekretaris	:	**Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **21 April 2026**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Hendy Hendarto**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031107**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Derivasi-σ pada Aljabar Lie**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 21 April 2026

Penulis

Hendy Hendarto

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Hendy Hendarto yang lahir di Bandar Lampung pada tanggal 18 Agustus 2004. Penulis merupakan anak kedua dari dua bersaudara, putra pasangan Sehat Sudiharno dan Martini.

Penulis memulai pendidikan formal di TK Taman Siswa (Taman Indria) Telukbetung pada tahun 2009 dan menyelesaikannya pada tahun 2010. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di SD Taman Siswa (Taman Muda) Telukbetung pada tahun 2010 sampai dengan 2016. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 6 Bandar Lampung pada tahun 2016 sampai dengan tahun 2019, dan menyelesaikan pendidikan di SMA Negeri 10 Bandar Lampung pada tahun 2022.

Pada tahun 2022, penulis diterima di Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Pada bulan Desember 2022, penulis mengikuti kegiatan Karya Wisata Ilmiah (KWI) XXXIII selama 3 hari di pantai Ketapang, Kecamatan Padang Cermin, Kabupaten Pesawaran. Pada akhir tahun 2025, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di PT Great Giant Pineapple (GGP) Lampung Tengah selama 40 hari sampai dengan Februari 2025. Selain itu, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Desa Sidodadi, Kecamatan Kedaton, Kota Bandar Lampung, sampai dengan Agustus 2025.

KATA INSPIRASI

”Jangan mundur sebelum mencoba, beban berat itu hanya ada pada pikiran. Coba dulu nanti akan terbiasa”

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin
Dengan mengucapkan puji dan syukur atas kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala karena limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya.
Tak lupa shalawat beserta salam selalu tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu Alaihi Wasallam.
Dengan rasa syukur dan bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Bapak dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya, sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Derivasi-σ pada Aljabar Lie” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sepanjang proses penyusunan skripsi ini.

2. Ibu Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si. selaku Pembimbing 2 yang telah memberikan arahan, dukungan, serta doa sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan saran, kritik, serta evaluasi yang membangun sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku dosen Pembimbing Akademik dan Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

5. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Seluruh guru TK, SD, SMP, dan SMA yang telah mengajarkan dan memberikan ilmu hingga penulis bisa menduduki bangku perkuliahan.

7. Bapak, ibu, dan kakak yang selalu memberikan dukungan dan doa sehingga penulis dapat segera menyelesaikan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 21 April 2026

Hendy Hendarto

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Aljabar Lie merupakan salah satu struktur fundamental dalam aljabar abstrak yang diperkenalkan oleh Sophus Lie, seorang ahli matematika Norwegia. Pada akhir abad ke-19, Aljabar Lie digunakan sebagai alat untuk mempelajari transformasi kontinu dan simetri dari persamaan diferensial. Aljabar Lie telah menjadi komponen yang sangat penting dalam berbagai bidang matematika dan fisika teoretis, termasuk dalam teori grup, geometri diferensial, serta mekanika kuantum, dimana struktur ini berperan dalam memahami simetri internal dari sistem fisika dan ruang geometris (Oliveri, 2010).

Pada studi aljabar Lie, konsep derivasi merupakan sebagai salah satu alat utama dalam menganalisis struktur dasarnya. Derivasi merupakan konsep fundamental dalam matematika yang pertama kali dikembangkan oleh Isaac Newton pada abad ke-17. Konsep ini menjadi landasan dalam analisis matematika. Derivasi pada ring pertama kali diperkenalkan mempresentasikan untuk operasi diferensial dalam konteks aljabar. Dalam hal ini, derivasi didefinisikan sebagai suatu pemetaan d yang memenuhi sifat aditif dan aturan Leibniz, sedangkan derivasi dalam konteks aljabar Lie merupakan pemetaan d yang menggunakan aturan Leibniz dengan *bracket* Lie (Utama dkk., 2021).

Beberapa penelitian yang telah mengkaji konsep derivasi antara lain, Hvala (1998) memperkenalkan derivasi dalam ring lalu membahas pengembangan konsep derivasi dalam teori ring. Selanjutnya, Leger & Luks (2000) memperkenalkan derivasi umum pada aljabar Lie lalu membahas konsep dan strukturnya. Selain itu, Ashraf & Rehman (2002) membahas derivasi pada ring menjadi komutatif jika memenuhi sifat khusus. Kemudian, Quandri dkk. (2003) membahas derivasi pada ring prima lalu memaksakan ring prima menjadi komutatif. Pada tahun yang sama, Samman &

Thaheem (2003) membahas derivasi pada semiprima.

Mirzavaziri & Moslehian (2006) memperkenalkan konsep baru dalam teori derivasi pada aljabar Banach, yaitu derivasi-σ. Konsep ini menggeneralisasi derivasi biasa dengan memperkenalkan parameter tambahan σ, yang memungkinkan pemetaan derivasi bergantung pada struktur algebra yang lebih kompleks. Selanjutnya, Hartwig dkk. (2006) membahas pendekatan baru dalam teori deformasi aljabar Lie dengan menggunakan konsep derivasi-σ. Lebih lanjut, Hosseini dkk. (2011) membahas generalisasikan derivasi-σ pada aljabar Banach, yaitu perluasan dari derivasi biasa. Kemudian, Gölbaşı & Yazarlı (2015) menunjukkan bahwa derivasi-(τ, σ) pada semigrup ideal di near-rings prima tersebut sebenarnya harus komutatif.

Ardekani & Davvaz (2015) membahas tentang derivasi (θ, σ) dari dua jenis *hyperring*. Selanjutnya, Benkovič (2016) membahas struktur dan sifat dari Jordan derivasi-σ pada aljabar segitiga. Lebih lanjut, Elchinger dkk. (2016) membahas struktur aljabar Lie yang dimodifikasi melalui konsep derivasi dan deformasi dua parameter. Kemudian, Lee (2017) memperluas teori derivasi Jordan ke arah derivasi-σ Jordan dalam ring prima. Selain itu, Chaudhuri (2019) membahas derivasi-(σ, τ) dari grup ring. Berikutnya, Muhiuddin (2019) membahas konsep dan sifat dari derivasi-(σ, τ) pada aljabar-BCI. Selanjutnya, Jabeen dkk. (2020) membahas derivasi-σ Jordan pada generalisasi aljabar matriks.

Abramov & Silvestrov (2020) membahas konstruksi dan sifat dari aljabar 3-Hom-Lie yang dibangun menggunakan konsep derivasi-σ dan involusi pada aljabar komutatif. Selanjutnya, Chen & Zhang (2021) membahas derivasi-(σ, σ) yang endomorfisma isometrik σ pada domain dan kodomain, lalu derivasi-(σ, τ) bersifat inner atau trivial. Lebih lanjut, Benkovič (2022) membahas derivasi-σ Lie pada aljabar segitiga. Kemudian, Adrabi dkk. (2022) membahas Jordan dan derivasi-σ Lie pada aljabar lintasan. Selain itu, Ali dkk. (2024) membahas berbagai macam konsep jenis-jenis derivasi dalam struktur ring. Berikutnya, Saber dkk. (2025) membahas derivasi-L-(τ, σ) yang digeneralisasikan dalam ring. Terakhir, Waluyo dkk. (2025) membahas derivasi-(σ, τ) pada ring grup.

Berdasarkan tinjauan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, penelitian mengenai derivasi-σ telah menunjukkan perkembangan. Akan tetapi, penerapan dalam konteks aljabar Lie masih terbatas. Oleh karena itu, penelitian ini akan membahas derivasi-σ pada aljabar Lie dengan bentuk *bracket* Lie yang digunakan adalah *bracket* komutator $[a, b] = ab - ba$, serta menganalisis dan mengembangkan pemahaman tentang derivasi-σ pada aljabar Lie.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. mendefinisikan derivasi-σ pada aljabar Lie;
2. menentukan sifat-sifat dan mengonstruksi contoh derivasi-σ pada aljabar Lie;
3. menyelidiki bagaimana hubungan derivasi-σ pada aljabar Lie dengan derivasi pada aljabar Lie.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang ingin diperoleh dari penelitian ini yaitu:

1. memperdalam pemahaman tentang sifat-sifat dan contoh derivasi-σ pada aljabar Lie;
2. mengetahui hubungan derivasi-σ pada aljabar Lie dengan derivasi pada aljabar Lie;
3. memberikan dasar teoretis bagi aplikasi derivasi-σ dalam struktur aljabar lainnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, akan diuraikan konsep dasar yang menjadi landasan teori untuk mendukung pembahasan pada bagian selanjutnya.

2.1 Grup

Untuk dapat memahami konsep-konsep yang lebih kompleks dalam teori aljabar, langkah awal yang penting adalah menguasai struktur dasar dalam aljabar abstrak, yaitu grup. Sebelum membahas definisi grup secara lebih mendalam, terlebih dahulu akan dijelaskan pengertian dari operasi biner.

Definisi 2.1.1 Operasi biner $*$ pada himpunan S merupakan fungsi dari $S \times S$ ke S. Untuk setiap $(a, b) \in S \times S$, $*(a, b)$ di S dinotasikan dengan $a * b$ (Fitriani & Faisol, 2022).

Berikut diberikan contoh operasi biner.

Contoh 2.1.1 Diberikan himpunan $S = \{1, 2, 3, ...\}$. Didefinisikan operasi $*$ dengan aturan $a * b = a + b$ untuk setiap $a, b \in S$. Karena penjumlahan dua bilangan bulat selalu menghasilkan bilangan bulat. Dengan demikian, operasi $*$ merupakan operasi biner pada S.

Contoh 2.1.2 Diberikan himpunan $S = \{1, 2, 3, ...\}$. Didefinisikan operasi $*$ dengan aturan $a * b = a - b$ untuk setiap $a, b \in S$. Misalkan $a = 3$ dan $b = 5$, diperoleh $3 * 5 = 3 - 5 = -2 \notin S$. Dengan demikian, operasi $*$ bukan merupakan operasi biner pada S.

Struktur aljabar yang terdiri atas suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner, serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu, disebut grup.

Definisi 2.1.2 Suatu grup $\langle G, *\rangle$ terdiri dari himpunan G bersama operasi biner $*$ yang didefinisikan pada G dan memenuhi aksioma berikut:

1. operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$;
2. terdapat elemen identitas e, yaitu untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$;
3. untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen invers $a^{-1} \in G$ sehingga berlaku $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

(Fitriani & Faisol, 2022).

Berikut diberikan contoh grup.

Contoh 2.1.3 Diberikan himpunan bilangan bulat $8\mathbb{Z} = \{8k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $\langle 8\mathbb{Z}, +\rangle$ merupakan grup.

1. Diberikan sebarang $a, b, c \in 8\mathbb{Z}$, dengan $a = 8x, b = 8y, c = 8z$, untuk suatu bilangan bulat x, y, z. Diperoleh:

$$\begin{aligned}(a+b)+c &= (8x+8y)+8z \\ &= 8x+(8y+8z) \\ &= a+(b+c).\end{aligned}$$

   Jadi, operasi penjumlahan pada himpunan $8\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif.

2. Diberikan sebarang $a \in 8\mathbb{Z}$, dengan $a = 8x$, untuk suatu $x \in \mathbb{Z}$. Terdapat $0 \in 8\mathbb{Z}$ sehingga:

$$a + 0 = 8x + 0 = 8x = a$$

   dan

$$0 + a = 0 + 8x = 8x = a.$$

   Jadi, terdapat elemen identitas, yaitu $0 \in 8\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjualan.

3. Diberikan sebarang $a \in 8\mathbb{Z}$, dengan $a = 8x$, untuk suatu $x \in \mathbb{Z}$. Terdapat $-a = -8x \in 8\mathbb{Z}$ sehingga:

$$a + (-a) = 8x + (-8x) = 0$$

dan

$$(-a) + a = (-8x) + 8x = 0.$$

Jadi, setiap $a \in 8\mathbb{Z}$ mempunyai elemen invers terhadap operasi penjumlahan, yaitu $-a \in 8\mathbb{Z}$.

Karena memenuhi semua sifat, terbukti $\langle 8\mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup.

Berikut ini diberikan definsi grup komutatif.

Definisi 2.1.3 Diberikan grup $\langle G, * \rangle$. G disebut grup komutatif (grup Abel) jika $*$ memenuhi sifat komutatif, yaitu $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in G$ (Andari, 2015).

Selanjutnya akan diberikan contoh dari grup komutatif.

Contoh 2.1.4 Diberikan grup $\langle 8\mathbb{Z}, + \rangle$. Akan ditunjukkan grup merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan.
Diberikan sebarang $a, b \in 8\mathbb{Z}$, dengan $a = 8x, b = 8y$, untuk suatu bilangan bulat x, y. Diperoleh:

$$\begin{aligned} a + b &= 8x + 8y \\ &= 8y + 8x \\ &= b + a. \end{aligned}$$

Jadi, operasi penjumlahan pada himpunan $8\mathbb{Z}$ bersifat komutatif yaitu $a + b = b + a$, sehingga $\langle 8\mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup Abel.

2.2 Ring

Setelah membahas grup, selanjutnya akan dibahas definisi ring.

Definisi 2.2.1 Diberikan himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi biner yakni $+$ (operasi penjumlahan) dan $\cdot$ (operasi perkalian), selanjutnya dilambangkan dengan $\langle R, +, \cdot \rangle$. Struktur $\langle R, +, \cdot \rangle$ dinamakan ring , jika memenuhi aksioma:

1. $\langle R, + \rangle$ grup Abel, yaitu memenuhi:

   (a) untuk setiap $a, b \in R, a + b \in R$

(b) untuk setiap $a, b, c \in R, (a + b) + c = a + (b + c)$

(c) terdapat $e \in R$, untuk setiap $a \in R, a + e = e + a = a$

(d) untuk setiap $a \in R$, terdapat $a^{-1} \in R, a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$

(e) untuk setiap $a, b \in R, a + b = b + a$

2. $\langle R, \cdot \rangle$ semigrup, yaitu memenuhi:

   (a) untuk setiap $a, b \in R, a \cdot b \in R$

   (b) untuk setiap $a, b, c \in R, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

3. Sifat distribusi kiri dan kanan berlaku di R, yakni untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku:

   (a) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

   (b) $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

(Setiawan, 2014).

Berikut diberikan contoh ring.

Contoh 2.2.1 Diberikan grup Abel $\langle 8\mathbb{Z}, + \rangle$. Akan ditunjukkan bahwa $\langle 8\mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

1. $(8\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup Abel (telah ditunjukkan pada Contoh 2.1.3).

2. Akan ditunjukkan bahwa operasi perkalian bersifat asosiatif.
   Diberikan sebarang $a, b, c \in 8\mathbb{Z}$, dengan $a = 8x, b = 8y, c = 8z$, untuk suatu bilangan bulat x, y, z. Diperoleh:

$$\begin{aligned}(a \cdot b) \cdot c &= (8x \cdot 8y) \cdot 8z \\ &= 8x \cdot (8y \cdot 8z) \\ &= a \cdot (b \cdot c).\end{aligned}$$

   Jadi, operasi perkalian pada himpunan $8\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif.

3. Akan ditunjukkan bahwa sifat distribusi kiri dan kanan berlaku pada $8\mathbb{Z}$.
   Diberikan sebarang $a, b, c \in 8\mathbb{Z}$, dengan $a = 8x, b = 8y, c = 8z$, untuk suatu

bilangan bulat x, y, z.
Diperoleh:

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= 8x \cdot (8y + 8z) \\ &= (8x \cdot 8y) + (8x \cdot 8z) \\ &= (a \cdot b) + (a \cdot c). \end{aligned}$$

Jadi hukum sifat distribusi kiri berlaku pada $8\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot c &= (8x + 8y) \cdot 8z \\ &= (8x \cdot 8z) + (8y \cdot 8z) \\ &= (a \cdot c) + (b \cdot c). \end{aligned}$$

Jadi hukum sifat distribusi kanan berlaku pada $8\mathbb{Z}$.

Karena memenuhi semua sifat, terbukti $\langle 8\mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

Berikut ini diberikan definisi ring komutatif.

Definisi 2.2.2 Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yaitu setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $ab = ba$, maka $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring komutatif (Rasiman dkk., 2018; Wahyuni dkk., 2021).

Selanjutnya akan diberikan contoh ring komutatif.

Contoh 2.2.2 Diberikan ring $\langle 8\mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$, Akan ditunjukkan ring merupakan ring komutatif terhadap operasi perkalian.
Diberikan sebarang $a, b \in 8\mathbb{Z}$, dengan $a = 8x, b = 8y$, untuk suatu bilangan bulat x, y. Diperoleh:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 8x \cdot 8y \\ &= 8y \cdot 8x \\ &= b \cdot a. \end{aligned}$$

Jadi, operasi perkalian pada himpunan $8\mathbb{Z}$ bersifat komutatif yaitu $a \cdot b = b \cdot a$.

Berikut ini diberikan definisi ring yang memuat elemen identitas, yang disebut dengan ring dengan elemen satuan.

Definisi 2.2.3 Ring R merupakan ring dengan elemen satuan apabila ring tersebut memuat elemen identitas terhadap operasi perkalian (Rasiman dkk., 2018).

Selanjutnya akan diberikan contoh ring dengan elemen satuan.

Contoh 2.2.3 Diberikan ring $\langle M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot\rangle$.

Akan ditunjukkan matriks $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ merupakan elemen satuan pada ring $\langle M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot\rangle$.

Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Berlaku:

$$\begin{aligned} I \cdot A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= A. \end{aligned}$$

Demikian halnya $A \cdot I = A$ sehingga, terbukti bahwa $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ merupakan elemen satuan pada ring $\langle M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot\rangle$.

Berikut diberikan definisi lapangan (*field*).

Definisi 2.2.4 Ring komutatif R dengan elemen satuan merupakan lapangan (*field*) apabila setiap elemen tak nolnya memiliki invers terhadap operasi perkalian (Persulessy & Mahmud, 2013).

Selanjutnya akan diberikan contoh lapangan (*field*).

Contoh 2.2.4 Diberikan ring $\langle \mathbb{Z}_5, +, \cdot\rangle$. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}_5, +, \cdot\rangle$ dengan elemen satuan tak nolnya memiliki invers merupakan lapangan terhadap operasi perkalian.
Diberikan $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$. Akan ditunjukkan $a \in \mathbb{Z}_5$ tak nol yaitu $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}$, dan $\overline{4}$ memiliki invers terhadap operasi perkalian.

$$(\overline{1})^{-1} = \overline{1}, \text{ karena } \overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}. \text{ Selanjutnya, } (\overline{2})^{-1} = \overline{3}, (\overline{3})^{-1} = \overline{2} \text{ dan } (\overline{4})^{-1} = \overline{4}.$$

Terbukti bahwa $\langle \mathbb{Z}_5, +, \cdot\rangle$ merupakan lapangan dengan elemen satuan tak nolnya memiliki invers merupakan lapangan terhadap operasi perkalian.

Berikut diberikan definisi homomorfisma ring.

Definisi 2.2.5 Diberikan ring $\langle R, +, \cdot\rangle$ dan $\langle S, +, \cdot\rangle$. Pemetaan $f : R \to S$ disebut homomorfisma ring jika

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

dan

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y).$$

untuk setiap $x, y \in R$ (Rasiman dkk., 2018).

Selanjutnya akan diberikan contoh homomorfisma ring.

Contoh 2.2.5 Diberikan ring $R = \mathbb{Z}$ dan $S = \mathbb{Z}_6$. Didefinisikan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$ oleh $f(a) = a \bmod 6$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan f merupakan homomorfisma ring.

$$\begin{aligned} f(a + b) &= (a + b) \bmod 6 \\ &= a \bmod 6 + b \bmod 6 \\ &= f(a) + f(b) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} f(a \cdot b) &= (a \cdot b) \bmod 6 \\ &= (a \bmod 6)(b \bmod 6) \\ &= f(a) \cdot f(b) \end{aligned}$$

Jadi f merupakan homomorfisma ring.

Berikut diberikan definisi endomorfisma ring.

Definisi 2.2.6 Diberikan ring $\langle R, +, \cdot\rangle$. Pemetaan $f : R \to R$ disebut endomorfisma ring jika

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

dan

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y).$$

untuk setiap $x, y \in R$ (Rasiman dkk., 2018).

Selanjutnya akan diberikan contoh endomorfisma ring.

Contoh 2.2.6 Diberikan ring $R = \mathbb{Z}$. Didefinisikan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ oleh $f(a) = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan f merupakan endomorfisma ring.

$$\begin{aligned} f(a+b) &= a+b \\ &= f(a)+f(b) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} f(a \cdot b) &= a \cdot b \\ &= f(a) \cdot f(b) \end{aligned}$$

Jadi f merupakan endomorfisma ring.

2.3 Modul

Pada bagian ini akan dibahas konsep modul. Pembahasan dimulai dengan definisi modul kiri atas ring.

Definisi 2.3.1 Diberikan ring R. Suatu modul kiri atas R merupakan suatu himpunan M yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\langle M, + \rangle$ merupakan grup Abel.
2. Didefinisikan pemetaan $R \times M \to M$ yang dilambangkan dengan rm, untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:
   (a) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$, untuk setiap $r \in R$, $m_1, m_2 \in M$;
   (b) $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$, untuk setiap $r_1, r_2 \in R$, $m \in M$;
   (c) $r_1 r_2(m) = r_1(r_2 m)$, untuk setiap $r_1, r_2 \in R$, $m \in M$;
   (d) $1m = m$, untuk setiap $m \in M$.

(Andari, 2015).

Selanjutnya akan diberikan contoh modul kiri atas ring.

Contoh 2.3.1 Diberikang ring $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}$ merupakan modul kiri atas ring $\mathbb{Z}$.

1. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup Abel.
2. Didefinisikan pemetaan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang dilambangkan dengan ax, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ dan $x \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:
   (a) $a(x + y) = ax + ay$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, $x, y \in \mathbb{Z}$;
   (b) $(a + b)x = ax + bx$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z}$;
   (c) $ab(x) = a(bx)$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z}$;
   (d) $1x = x$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$.

Jadi $\mathbb{Z}$ merupakan $\mathbb{Z}-$modul kiri.

Berikut diberikan definisi modul kanan atas ring.

Definisi 2.3.2 Diberikan ring R. Suatu modul kanan atas R merupakan suatu himpunan M yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\langle M, + \rangle$ merupakan grup Abel.
2. Didefinisikan pemetaan $M \times R \to M$ yang dilambangkan dengan mr, untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:
   (a) $(m_1 + m_2)r = m_1r + m_2r$, untuk setiap $r \in R$, $m_1, m_2 \in M$;
   (b) $m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$, untuk setiap $r_1, r_2 \in R$, $m \in M$;
   (c) $m(r_1r_2) = (mr_1)r_2$, untuk setiap $r_1, r_2 \in R$, $m \in M$;
   (d) $m1 = m$, untuk setiap $m \in M$.

(Andari, 2015).

Selanjutnya akan diberikan contoh modul kanan atas ring.

Contoh 2.3.2 Diberikan ring $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}$ merupakan modul kanan atas ring $\mathbb{Z}$.

1. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup Abel.
2. Didefinisikan pemetaan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang dilambangkan dengan ax, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ dan $x \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:
   (a) $(x + y)a = xa + ya$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, $x, y \in \mathbb{Z}$;

(b) $x(a+b) = xa + xb$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z}$;

(c) $x(ab) = (xa)b$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z}$;

(d) $x1 = x$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$.

Jadi $\mathbb{Z}$ merupakan $\mathbb{Z}-$modul kanan.

2.4 Ruang Vektor

Pada bagian ini akan dibahas konsep dasar dalam aljabar linear, yaitu ruang vektor dan transformasi linear. Pembahasan dimulai dengan definisi ruang vektor yang menjadi fondasi penting dalam memahami struktur dan operasi dalam aljabar linear.

Definisi 2.4.1 Diberikan lapangan F. Suatu ruang vektor atas F adalah himpunan tak kosong V, yang elemennya disebut vektor, dilengkapi dengan dua operasi. Operasi pertama adalah penjumlahan vektor, yang dinotasikan dengan simbol $+$,

$$+ : V \times V \to V,$$

dengan $(u, v) \mapsto u + v \in V$, untuk setiap $u, v \in V$.
Operasi kedua disebut perkalian skalar:

$$\cdot : F \times V \to V,$$

dengan $(r, u) \mapsto ru \in V$, untuk setiap $r \in F, u \in V$.
Ruang vektor memenuhi beberapa aksioma, yaitu untuk setiap $u, v, w \in V$ berlaku:

1. $u + (v + w) = (u + v) + w$;
2. $u + v = v + u$;
3. terdapat $0 \in V$, sehingga untuk setiap $u \in V$, berlaku $0 + u = u + 0 = u$;
4. untuk setiap $u \in V$, terdapat $-u \in V$, berlaku $u + (-u) = (-u) + u = 0$;
5. untuk setiap $a, b \in F$ dan $u, v \in V$, berlaku:

$$a(u + v) = au + av$$
$$(a + b)u = au + bu$$
$$(ab)u = a(bu)$$
$$1u = u.$$

(Savage, 2018).

Berikut merupakan contoh ruang vektor.

Contoh 2.4.1 Diberikan V meliputi himpunan semua fungsi dari $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, yaitu:

$$V = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}.$$

Didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian skalar yaitu:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

dan

$$(af)(x) = a \cdot f(x),$$

untuk setiap $f, g \in V$ dan $a, x \in \mathbb{R}$.
Akan ditunjukkan bahwa V merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$.

1. Diberikan sebarang $f, g, h \in V$. Akan ditunjukkan $f + (g + h) = (f + g) + h$. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$\begin{aligned} (f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= ((f + g) + h)(x). \end{aligned}$$

   Jadi, sifat asosiatif pada operasi penjumlahan terpenuhi.

2. Diberikan sebarang $f, g \in V$. Akan ditunjukkan $f + g = g + f$. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= g(x) + f(x) \\ &= (g + f)(x). \end{aligned}$$

   Jadi, sifat komutatif pada operasi penjumlahan terpenuhi.

3. Didefinisikan fungsi nol $0 \in V$ dengan $0(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

Untuk setiap $f \in V$ diperoleh:

$$(f + 0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

dan

$$(0 + f)(x) = 0(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x).$$

Dengan demikian, $f + 0 = 0 + f = f$ untuk setiap $f \in V$.

4. Didefinisikan $-f \in V$ dengan $(-f)(x) = -f(x)$.
   Untuk setiap $f \in V$ diperoleh:

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0$$

   dan

$$((-f) + f)(x) = (-f)(x) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0.$$

   Dengan demikian, $f + (-f) = (-f) + f = 0$ untuk setiap $f \in V$.

5. Diberikan $a \in \mathbb{R}$, $f, g \in V$ dan $x \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan $a(f + g) = (af + ag)$.
   Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$\begin{aligned}(a(f+g))(x) &= a((f+g)(x)) \\ &= a(f(x) + g(x)) \\ &= af(x) + ag(x) \\ &= (af)(x) + (ag)(x) \\ &= (af + ag)(x).\end{aligned}$$

   Jadi, operasi perkalian skalar terhadap penjumlahan vektor bersifat distributif.

6. Diberikan $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in V$ dan $x \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan $(a+b)f = af + bf$.
   Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$\begin{aligned}((a+b)f)(x) &= (a+b)(f(x)) \\ &= af(x) + bf(x) \\ &= (af)(x) + (bf)(x) \\ &= (af + bf)(x).\end{aligned}$$

   Jadi, distribusi skalar terhadap penjumlahan skalar terpenuhi.

7. Diberikan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $f \in V$. Akan ditunjukkan $(ab)f = a(bf)$.
   Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

   $$((ab)f)(x) = (ab)(f(x)) = a(b(f(x))) = (a(bf))(x).$$

   Jadi, sifat asosiatif pada perkalian skalar terpenuhi.

8. Untuk setiap $f \in V$ akan ditunjukkan bahwa $1u = u$.
   Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

   $$(1u)(x) = 1(u(x)) = u(x).$$

   Jadi, elemen identitas pada perkalian skalar terpenuhi.

Dengan demikian, V adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$.

Berikut diberikan definisi transformasi linear.

Definisi 2.4.2 Jika $T : V \to W$ merupakan pemetaan dari ruang vektor V keruang vektor W, maka T disebut transformasi linear dari V ke W jika untuk setiap $u, v \in V$ dan $\alpha \in F$, berlaku:

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$;
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

(Cullen, 2012).

Selanjutnya akan diberikan contoh transformasi linear.

Contoh 2.4.2 Diberikan transformasi $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yang didefinisikan:

$$T(x, y) = (8x, 8y).$$

Akan ditunjukkan bahwa T adalah transformasi linear dari $\mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}^2$.

1. Diberikan sebarang $u, v \in \mathbb{R}^2$, dengan $u = (x_1, y_1)$ dan $v = (x_2, y_2)$.
   Akan ditunjukkan $T(u + v) = T(u) + T(v)$.

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) \\
&= T((x_1+x_2),(y_1+y_2)) \\
&= (8(x_1+x_2),8(y_1+y_2)) \\
&= (8x_1+8x_2,8y_1+8y_2) \\
&= (8x_1,8y_1)+(8x_2,8y_2) \\
&= T(u)+T(v).
\end{aligned}$$

Jadi, $T(u+v) = T(u) + T(v)$.

2. Diberikan sebarang $u \in \mathbb{R}^2$, dengan $u = (x,y)$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Akan ditunjukkan $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

$$\begin{aligned}
T(\alpha u) &= T(\alpha x, \alpha y) \\
&= (8\alpha x, 8\alpha y) \\
&= \alpha(8x, 8y) \\
&= \alpha T(u).
\end{aligned}$$

   Jadi, $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

Dengan demikian, T merupakan transformasi linear dari $\mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}^2$.

2.5 Aljabar Lie

Pada bagian ini akan dibahas konsep dasar dan karakteristik dari aljabar Lie. Namun sebelum itu, akan terlebih dahulu disampaikan beberapa definisi yang berkaitan dengan aljabar Lie, seperti pemetaan bilinear. Berikut ini merupakan definisi dari pemetaan bilinear.

Definisi 2.5.1 Diberikan sebarang ruang vektor V atas lapangan F. Pemetaan bilinear pada V adalah suatu fungsi

$$\begin{aligned}
\langle -,- \rangle : V \times V &\to V \\
(x,y) &\mapsto \langle x,y \rangle
\end{aligned}$$

yang memenuhi sifat linear kanan dan kiri, yaitu:

$$\langle \alpha x + \beta x', y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x', y\rangle$$
$$\langle x, \alpha y + \beta y'\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x, y'\rangle$$

untuk setiap $x, x', y, y' \in V$ dan $\alpha, \beta \in F$ (Utama dkk., 2021).

Selanjutnya akan disajikan definisi mengenai *bracket* Lie dan aljabar Lie.

Definisi 2.5.2 Diberikan ruang vektor L atas lapangan F. Suatu pemetaan bilinear $L \times L \to L, (x, y) \mapsto [x, y]$ disebut *bracket* Lie pada L jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in L$, memenuhi:

1. $[x, y] = -[y, x]$ (antisimetris);
2. $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$ (identitas Jacobi).

Suatu ruang vektor yang dilengkapi dengan *bracket* Lie disebut sebagai aljabar Lie (Utama dkk., 2021).

Selanjutnya akan diberikan contoh aljabar Lie.

Contoh 2.5.1 Diberikan ruang vektor $M_2(\mathbb{R})$ atas $\mathbb{R}$. Didefinisikan operasi *bracket* Lie untuk setiap $X, Y \in M_3(\mathbb{R})$ sebagai,

$$[X, Y] = XY - YX$$

Akan ditunjukkan bahwa $M_2(\mathbb{R})$ memenuhi sifat-sifat *bracket* Lie dan merupakan suatu aljabar Lie.

1. Untuk setiap $X, Y \in M_3(\mathbb{R})$ berlaku.

   $$[X, Y] = XY - YX = -(YX - XY) = -[Y, X].$$

   Jadi, sifat antisimetris terpenuhi.

2. Untuk setiap $X, Y, Z \in M_2(\mathbb{R})$ berlaku.
   Dari ruas kiri diperoleh:

   $$\begin{aligned}[X, [Y, Z]] &= X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X \\ &= XYZ - XZY - YZX + ZYX.\end{aligned}$$

Di sisi lain, dari ruas kanan diperoleh:

$$\begin{aligned}[[X,Y],Z]+[Y,[X,Z]] &= ((XY-YX)Z-Z(XY-YX)) \\ &\quad +(Y(XZ-ZX)-(ZX-XZ)Y) \\ &= XYZ-YXZ-ZXY-ZYX \\ &\quad +YXZ-YZX-XZY-ZXY \\ &= XYZ+ZYX-YZX-XZY \\ &= XYZ-XZY-YZX+ZYX.\end{aligned}$$

Jadi, identitas Jacobi terpenuhi yaitu $[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z]+[Y,[X,Z]]$.

Dengan demikian, $M_2(\mathbb{R})$ merupakan suatu aljabar Lie.

Selanjutnya akan diberikan contoh lain aljabar Lie.

Contoh 2.5.2 Diberikan ruang vektor $X, Y, Z \in M_2(\mathbb{R})$, dengan

$$X = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

untuk setiap $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Didefinisikan operasi *bracket* Lie untuk setiap $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ sebagai $[X,Y] = XY - YX$.
Akan ditunjukkan $X, Y, Z \in M_2(\mathbb{R})$ memenuhi sifat *bracket* Lie dan merupakan suatu aljabar Lie.

1. Untuk setiap $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$, berlaku $[X,Y] = -[Y,X]$.

$$\begin{aligned}[X,Y] &= \left[\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$
\begin{aligned}
-[Y,X] &= -\left[\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] \\
&= -\left[\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] \\
&= -\left[\begin{bmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

2. Untuk setiap $X, Y, Z \in M_2(\mathbb{R})$, berlaku

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]].$$

$$
\begin{aligned}
[X,[Y,Z]] &= \left[\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \left[\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]\right] \\
&= \left[\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \left(\begin{bmatrix} a_2a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right] \\
&= \left[\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Di sisi lain,

$$
\begin{aligned}
[[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]] &= \left[\left[\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right], \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] \\
&\quad + \left[\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \left[\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]\right] \\
&= \left[\left(\begin{bmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] \\
&\quad + \left[\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \left(\begin{bmatrix} a_1a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$= \left[\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a_3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right] + \left[\begin{bmatrix}a_2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right]$$
$$= \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Jadi $X, Y, Z \in M_2(\mathbb{R})$ memenuhi sifat *bracket* Lie dan merupakan suatu aljabar Lie.

Berikut ini diberikan definisi hasil kali silang (*cross product*).

Definisi 2.5.3 Diberikan $u, v \in \mathbb{R}^3$, dengan $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$. Hasil kali silang (*cross product*) antara u dan v didefinisikan sebagai

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix} = i\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix} - j\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix} + k\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}$$

$$u \times v = i(u_2v_3 - u_3v_2) - j(u_1v_3 - u_3v_1) + k(u_1v_2 - u_2v_1).$$

Adapun juga aturan *triple cross product* dengan *BAC–CAB*. Diberikan $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, *triple cross product* didefinisikan sebagai

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$$

(Marsden & Tromba, 2012).

Selanjutnya merupakan contoh *bracket* Lie vektor.

Contoh 2.5.3 Diberikan ruang vektor $\mathbb{R}^3$ atas $\mathbb{R}$. Didefinisikan operasi *bracket* Lie untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^3$ sebagai,

$$[x, y] = x \times y$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^3$ memenuhi sifat-sifat *bracket* Lie dan merupakan suatu aljabar Lie.

1. Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^3$ berlaku.

$$[x, y] = x \times y = -(y \times x) = -[y, x].$$

Jadi, sifat antisimetris terpenuhi.

2. Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ berlaku.

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$$
$$[x, [y, z]] - [[x, y], z] - [y[x, z]] = 0$$

dengan sifat antisimetris diperoleh bentuk identitas jacobi:

$$[x[y, z]] + [y, [z, x]] + [x, [x, y]] = 0.$$

Dari ruas kiri diperoleh:
$[x[y, z]] + [y, [z, x]] + [x, [x, y]]$

$$\begin{aligned}
&= (x \times (y \times z)) + (y \times (z \times x)) + (z \times (x \times y)) \\
&= ((x \cdot z)y - (x \cdot y)z) + ((y \cdot x)z - (y \cdot z)x) + ((z \cdot y)x - (z \cdot x)y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Jadi, identitas Jacobi terpenuhi yaitu $[x[y, z]] + [y, [z, x]] + [x, [x, y]] = 0.$

Dengan demikian, $\mathbb{R}^3$ merupakan suatu aljabar Lie.

Berikut ini diberikan definisi homomorfisma Lie.

Definisi 2.5.4 Diberikan aljabar Lie L dan L' dengan *bracket* Lie masing-masing $[\cdot, \cdot]$ dan $[\cdot, \cdot]'$. Suatu pemetaan $\sigma : L \to L'$ disebut homomorfisma Lie jika untuk setiap $x, y \in L$ berlaku

$$\sigma([x, y]) = [\sigma(x), \sigma(y)]'.$$

(Utama dkk., 2021).

Selanjutnya merupakan contoh homomorfisma Lie.

Contoh 2.5.4 Diberikan aljabar Lie $L = \mathbb{R}^2$ dengan *bracket* $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = (0, 0)$ dan $L' = \mathbb{R}$. Didefinisikan $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ oleh $\sigma = x + y$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

Akan ditunjukkan σ merupakan homomorfisma ring.

$$\begin{aligned}\sigma([x,y]) &= \sigma([(x_1,y_1),(x_2,y_2)])\\ &= \sigma(0,0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}[\sigma(x),\sigma(y)]' &= [\sigma(x_1,y_1),\sigma(x_2,y_2)]'\\ &= [x_1+y_1,x_2+y_2]'\\ &= 0.\end{aligned}$$

Jadi σ merupakan homomorfisma Lie.

Berikut ini diberikan definisi endomorfisma Lie.

Definisi 2.5.5 Diberikan aljabar Lie L dengan *bracket* Lie $[\cdot,\cdot]$. Suatu pemetaan $\sigma : L \to L$ disebut endomorfisma Lie jika untuk setiap $x, y \in L$ berlaku

$$\sigma([x,y]) = [\sigma(x),\sigma(y)].$$

(Utama dkk., 2021).

Selanjutnya akan diberikan contoh endomorfisma Lie.

Contoh 2.5.5 Diberikan Aljabar Lie $L = M_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} | a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$.
Didefinisikan $\sigma : L \to L$ sebagai berikut:

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & b\end{bmatrix},$$

untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} \in L$.
Akan ditunjukkan σ merupakan endomorfisma Lie.
Diberikan sebarang $X = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1\end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2\end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
\sigma([X,Y]) &= \sigma(XY - YX) \\
&= \sigma\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \sigma\left(\begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + c_2d_1 & b_2c_1 + d_1d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ a_1c_2 + c_1d_2 & b_1c_2 + d_1d_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \sigma\begin{bmatrix} (a_1a_2 + b_1c_2) - (a_1a_2 + b_2c_1) & (a_1b_2 + b_1d_2) - (a_2b_1 + b_2d_1) \\ (a_2c_1 + c_2d_1) - (a_1c_2 + c_1d_2) & (b_2c_1 + d_1d_2) - (b_1c_2 + d_1d_2) \end{bmatrix} \\
&= \sigma\begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 - a_1a_2 - b_2c_1 & a_1b_2 + b_1d_2 - a_2b_1 - b_2d_1 \\ a_2c_1 + c_2d_1 - a_1c_2 - c_1d_2 & b_2c_1 + d_1d_2 - b_1c_2 - d_1d_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_1c_2 - b_2c_1 & -(a_1b_2 + b_1d_2 - a_2b_1 - b_2d_1) \\ -(a_2c_1 + c_2d_1 - a_1c_2 - c_1d_2) & b_2c_1 - b_1c_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Di sisi lain,

$$
\begin{aligned}
[\sigma(X), \sigma(Y)] &= \sigma(X)\sigma(Y) - \sigma(Y)\sigma(X) \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ -c_1 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ -c_2 & d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ -c_2 & d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ -c_1 & d_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & -(a_1b_2 + b_1d_2) \\ -(a_2c_1 + c_2d_1) & b_2c_1 + d_1d_2 \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_2c_1 & -(a_2b_1 + b_2d_1) \\ -(a_1c_2 + c_1d_2) & b_1c_2 + d_1d_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_1c_2 - b_2c_1 & -(a_1b_2 + b_1d_2 - a_2b_1 - b_2d_1) \\ -(a_2c_1 + c_2d_1 - a_1c_2 - c_1d_2) & b_2c_1 - b_1c_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Jadi σ merupakan endomorfisma Lie.

2.6 Derivasi

Derivasi merupakan suatu pemetaan dari sebuah struktur aljabar ke dirinya sendiri yang memenuhi sifat tertentu, yang merupakan generalisasi dari aturan turunan dalam kalkulus (Hidayati & Suryoto, 2012). Selanjutnya akan dibahas mengenai definisi derivasi pada ring serta derivasi pada aljabar Lie.

2.6.1 Derivasi pada Ring

Derivasi pada ring merupakan konsep yang memperluas gagasan turunan dalam kalkulus ke dalam konteks struktur aljabar. Secara umum, derivasi pada ring adalah suatu pemetaan dari sebuah struktur aljabar ke dirinya sendiri yang memenuhi sifat aditif serta memenuhi aturan hasil kali Leibniz (Thomas dkk., 2024).

Definisi 2.6.1 Diberikan ring R. Suatu derivasi pada R adalah pemetaan $d : R \to R$ yang memenuhi sifat berikut:

1. $d(a+b) = d(a) + d(b)$ (aditif)
2. $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ (aturan Leibniz)

untuk setiap $a, b \in R$ (Ernanto, 2018; Ali dkk., 2024).

Berikut diberikan contoh derivasi pada ring.

Contoh 2.6.1 Diberikan ring $R = M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$.
Didefinisikan $d : R \to R$ sebagai berikut:

$$d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & kb \\ -kc & 0 \end{bmatrix},$$

untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in R$ dan $k \in \mathbb{Z}$.
Akan ditunjukkan d merupakan derivasi.

Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.

1. Akan ditunjukkan d bersifat aditif, yaitu $d(A+B) = d(A) + d(B)$

$$\begin{aligned} d(A+B) &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & k(b_1+b_2) \\ -k(c_1+c_2) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & k(b_1) \\ -k(c_1) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & k(b_2) \\ -k(c_2) & 0 \end{bmatrix} \\
&= d(A) + d(B).
\end{aligned}
$$

Karena $d(A+B) = d(A) + d(B)$, d bersifat aditif.

2. Akan ditunjukkan d memenuhi aturan Leibniz, yaitu $d(AB) = d(A)B + Ad(B)$

$$
\begin{aligned}
d(AB) &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= d\left(\begin{bmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ a_2c_1+c_2d_1 & b_2c_1+d_1d_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & k(a_1b_2+b_1d_2) \\ -k(a_2c_1+c_2d_1) & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Di sisi lain,

$$
\begin{aligned}
d(A)B + Ad(B) &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & k(b_1) \\ -k(c_1) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & k(b_2) \\ -k(c_2) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} k(b_1c_2) & k(b_1d_2) \\ -k(a_2c_1) & -k(b_2c_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k(b_1c_2) & k(a_1b_2) \\ -k(c_2d_1) & k(b_2c_1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & k(a_1b_2+b_1d_2) \\ -k(a_2c_1+c_2d_1) & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Karena $d(AB) = d(A)B + Ad(B)$, d memenuhi aturan Leibniz.
Jadi d merupakan derivasi pada $M_2(\mathbb{Z})$.

2.6.2 Derivasi pada Aljabar Lie

Derivasi pada aljabar Lie merupakan perluasan konsep derivasi dari kalkulus atau aljabar asosiatif ke dalam kerangka aljabar Lie, yaitu struktur aljabar dengan operasi biner yang disebut *bracket* Lie (Jacobson, 2013).

Definisi 2.6.2 Diberikan aljabar Lie L. Suatu derivasi pada L adalah pemetaan aditif $d : L \to L$ yang memenuhi aturan Leibniz, yaitu:

$$d([a,b]) = [d(a), b] + [a, d(b)]$$

untuk setiap $a, b \in L$ dan *bracket* Lie $[a,b] = ab - ba$ (Utama dkk., 2021).

Berikut diberikan contoh derivasi pada aljabar Lie.

Contoh 2.6.2 Diberikan aljabar Lie $L = M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$.
Didefinisikan $d : L \to L$ sebagai berikut:

$$d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & kb \\ -kc & 0 \end{bmatrix},$$

untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in L$ dan $k \in \mathbb{R}$.
Akan ditunjukkan d merupakan derivasi Lie.

Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.
Dari ruas kiri diperoleh:

$$\begin{aligned} d([A,B]) &= d(AB - BA) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + c_2d_1 & b_2c_1 + d_1d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ a_1c_2 + c_1d_2 & b_1c_2 + d_1d_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= d\begin{bmatrix} (a_1a_2 + b_1c_2) - (a_1a_2 + b_2c_1) & (a_1b_2 + b_1d_2) - (a_2b_1 + b_2d_1) \\ (a_2c_1 + c_2d_1) - (a_1c_2 + c_1d_2) & (b_2c_1 + d_1d_2) - (b_1c_2 + d_1d_2) \end{bmatrix} \\ &= d\begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 - a_1a_2 - b_2c_1 & a_1b_2 + b_1d_2 - a_2b_1 - b_2d_1 \\ a_2c_1 + c_2d_1 - a_1c_2 - c_1d_2 & b_2c_1 + d_1d_2 - b_1c_2 - d_1d_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & k(a_1b_2 + b_1d_2 - a_2b_1 - b_2d_1) \\ -k(a_2c_1 + c_2d_1 - a_1c_2 - c_1d_2) & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Di sisi lain, dari ruas kanan diperoleh:
$[d(A), B] + [A, d(B)]$

$$
\begin{aligned}
&= (d(A)B - Bd(A)) + (Ad(B) - d(B)A)\\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & kb_1 \\ -kc_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & kb_1 \\ -kc_1 & 0 \end{bmatrix} \right)\\
&\quad + \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & kb_2 \\ -kc_2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & kb_2 \\ -kc_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \right)\\
&= \left(\begin{bmatrix} k(b_1c_2) & k(b_1d_2) \\ -k(a_2c_1) & -k(b_2c_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k(b_2c_1) & k(a_2b_1) \\ -k(c_1d_2) & k(b_1c_2) \end{bmatrix} \right)\\
&\quad + \left(\begin{bmatrix} -k(b_1c_2) & k(a_1b_2) \\ -k(c_2d_1) & k(b_2c_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k(b_2c_1) & k(b_2d_1) \\ -k(a_1c_2) & -k(b_1c_2) \end{bmatrix} \right)\\
&= \begin{bmatrix} k(b_1c_2 + b_2c_1) & k(b_1d_2 - a_2b_1) \\ k(-a_2c_1 + c_1d_2) & -k(b_2c_1 + b_1c_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k(b_1c_2 + b_2c_1) & k(a_1b_2 - b_2d_1) \\ k(-c_2d_1 + a_1c_2) & k(b_2c_1 + b_1c_2) \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 0 & k(b_1d_2 - a_2b_1 + a_1b_2 - b_2d_1) \\ k(-a_2c_1 + c_1d_2 - c_2d_1 + a_1c_2) & 0 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 0 & k(a_1b_2 + b_1d_2 - a_2b_1 - b_2d_1) \\ -k(a_2c_1 + c_2d_1 - a_1c_2 - c_1d_2) & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Karena $d([A, B]) = [d(A), B] + [A, d(B)]$, d memenuhi aturan Leibniz.
Jadi d merupakan derivasi Lie pada $M_2(\mathbb{R})$.

2.7 Derivasi *Inner*

Derivasi *inner* merupakan derivasi yang dibentuk oleh operasi komutator terhadap suatu elemen aljabar (Utama dkk., 2021).

Definisi 2.7.1 Diberikan suatu aljabar Lie L atas ruang vektor V. Suatu pemetaan $ad_x : L \to L$ untuk setiap $x, y \in L$ yang didefinisikan dengan

$$ad_x(y) = [x, y] = xy - yx$$

disebut derivasi *inner* (Utama dkk., 2021).

Berikut diberikan contoh derivasi *inner*.

Contoh 2.7.1 Diberikan $X = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.
Akan ditunjukkan derivasi *inner* memenuhi aturan Leibniz yaitu

$$ad_X(AB) = ad_X(A)B + A(ad_X(B)).$$

Dari ruas kiri diperoleh:

$$\begin{aligned}
&ad_X(AB) = [X, AB] \\
&= X(AB) - (AB)X \\
&= \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) - \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + c_2d_1 & b_2c_1 + d_1d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + c_2d_1 & b_2c_1 + d_1d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b(a_2c_1 + c_2d_1) & b(b_2c_1 + d_1d_2) \\ (-c)(a_1a_2 + b_1c_2) & (-c)(a_1b_2 + b_1d_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (a_1b_2 + b_1d_2)(-c) & (a_1a_2 + b_1c_2)b \\ (b_2c_1 + d_1d_2)(-c) & (a_2c_1 + c_2d_1)b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b(a_2c_1 + c_2d_1) - (a_1b_2 + b_1d_2)(-c) & b(b_2c_1 + d_1d_2) - (a_1a_2 + b_1c_2)b \\ (-c)(a_1a_2 + b_1c_2) - (b_2c_1 + d_1d_2)(-c) & (-c)(a_1b_2 + b_1d_2) - (a_2c_1 + c_2d_1)b \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Di sisi lain diperoleh:

$$\begin{aligned}
&ad_X(A)B + A(ad_X(B)) \\
&\qquad = [X, A]B + A[X, B] \\
&\qquad = (XA - AX)B + A(XB - BX) \\
&\qquad = \left(\begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \\
&\qquad\quad + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&\qquad = \left(\begin{bmatrix} b(c_1) & b(d_1) \\ (-c)(a_1) & (-c)(b_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (b_1)(-c) & (a_1)b \\ (d_1)(-c) & (c_1)b \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \\
&\qquad\quad + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} b(c_2) & b(d_2) \\ (-c)(a_2) & (-c)(b_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (b_2)(-c) & (a_2)b \\ (d_2)(-c) & (c_2)b \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} b(c_1) - (b_1)(-c) & b(d_1) - (a_1)b \\ (-c)(a_1) - (d_1)(-c) & (-c)(b_1) - (c_1)b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(c_2) - (b_2)(-c) & b(d_2) - (a_2)b \\ (-c)(a_2) - (d_2)(-c) & (-c)(b_2) - (c_2)b \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} b(a_2c_1 + c_2d_1) - (a_1b_2 + b_1d_2)(-c) & b(b_2c_1 + d_1d_2) - (a_1a_2 + b_1c_2)b \\ (-c)(a_1a_2 + b_1c_2) - (b_2c_1 + d_1d_2)(-c) & (-c)(a_1b_2 + b_1d_2) - (a_2c_1 + c_2d_1)b \end{bmatrix}.$$

Karena $ad_X(AB) = ad_X(A)B + A(ad_X(B))$, terbukti ad_X merupakan derivasi *inner*.

2.8 Derivasi-σ

Derivasi-σ merupakan perluasan dari teori derivasi klasik dalam struktur aljabar, seperti ring dan aljabar asosiatif. Secara umum adalah suatu generalisasi dari konsep derivasi dalam aljabar menggunakan aturan Leibniz dimodifikasi dengan melibatkan suatu endomorfisma (Hosseini dkk., 2011).

Definisi 2.8.1 Diberikan ring R dan σ adalah endomorfisma pada R. Suatu pemetaan aditif $d : R \to R$ disebut derivasi-σ jika

$$d(ab) = d(a)b + \sigma(a)d(b),$$

untuk setiap $a, b \in R$ (Mirzavaziri & Moslehian, 2006).

Berikut diberikan contoh derivasi-σ.

Contoh 2.8.1 Diberikan ring $M_2(\mathbb{R})$.
Pilih $P \in M_2(\mathbb{R})$ dan didefinisikan $\sigma : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ sebagai berikut:

$$\sigma(A) = PAP^{-}1$$

dan

$$\begin{aligned} d(A) &= \sigma(A) - A \\ &= PAP^{-1} - A, \end{aligned}$$

untuk setiap $A \in M_2(\mathbb{R})$.

Akan ditunjukkan bahwa d merupakan derivasi-σ yaitu:

$$d(AB) = d(A)B + \sigma(A)d(B).$$

Dari ruas kiri diperoleh:

$$\begin{aligned} d(AB) &= \sigma(AB) - AB \\ &= PABP^{-1} - AB. \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} d(A)B + \sigma(A)d(B) &= (PAP^{-1} - A)B + (PAP^{-1})(PBP^{-1} - B) \\ &= PAP^{-1}B - AB + PAP^{-1}PBP^{-1} - PAP^{-1}B \\ &= -AB + PAP^{-1}PBP^{-1} \\ &= PAP^{-1}PBP^{-1} - AB \\ &= PABP^{-1} - AB \end{aligned}$$

Karena $d(AB) = d(A)B + \sigma(A)d(B)$, maka d merupakan derivasi-σ pada $M_2(\mathbb{R})$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung yang beralamat di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Langkah-Langkah Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur dan analisis teoritis, dengan mengumpulkan referensi seperti jurnal, artikel ilmiah, buku, dan sumber lainnya yang terkait dengan penelitian ini. Secara umum langkah-langkah penelitian ini sebagai berikut.

1. Mempelajari teori grup, ring, modul, ruang vektor, aljabar Lie, derivasi pada ring, derivasi pada aljabar Lie, derivasi *inner*, dan derivasi-σ.
2. Mengonstruksi contoh-contoh derivasi-σ pada aljabar Lie.
3. Menyelidiki sifat-sifat derivasi-σ pada aljabar Lie.
4. Menyelidiki bagaimana hubungan derivasi-σ pada aljabar Lie dengan derivasi pada aljabar Lie.

Adapun diagram langkah-langkah penelitian dapat dilihat pada Gambar 3.1.

Tahap 1 Mempelajari teori grup, ring, ruang vektor, aljabar Lie, derivasi, derivasi pada ring, derivasi pada aljabar Lie, derivasi *inner*, dan derivasi-σ.

↓

Tahap 2 Mengonstruksi contoh-contoh derivasi-σ pada aljabar Lie.

↓

Tahap 3 Menyelidiki sifat-sifat derivasi-σ pada aljabar Lie.

↓

Tahap 4 Menyelidiki bagaimana hubungan derivasi-σ pada aljabar Lie dengan derivasi pada aljabar Lie.

Gambar 3.1 Langkah-langkah penelitian.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa derivasi-σ pada aljabar Lie merupakan suatu generalisasi dari derivasi pada aljabar Lie dengan melibatkan suatu endomorfisma linear σ, serta menggunakan *bracket* komutator $[a, b] = ab - ba$. Penelitian ini berhasil mendefinisikan derivasi-σ pada aljabar Lie serta sifat-sifat dan memberikan beberapa contoh yang mengilustrasikan konsep ini dalam aplikasi aljabar Lie yang lebih luas. Selain itu, diperoleh bahwa hubungan derivasi-σ pada aljabar Lie dengan derivasi pada aljabar Lie berlaku jika derivasi-σ pada aljabar lie dengan kondisi σ merupakan pemetaan identitas.

5.2 Saran

Penelitian selanjutnya diharapkan dapat mengembangkan lebih jauh mengenai derivasi-σ dalam konteks aljabar lainnya. Selain itu derivasi-σ pada aljabar Lie dapat dikembangkan pada struktur *bracket* Lie lainnya untuk mengetahui kemungkinan munculnya sifat-sifat baru, sehingga dapat memberikan kontribusi yang besar terhadap perkembangan derivasi-σ dalam konteks aljabar lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abramov, V., & Silvestrov, S. 2020. 3-Hom-Lie Algebras Based on σ-Derivation and Involution. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 30(3), 45.

Adrabi, A., Bennis, D., & Fahid, B. 2022. Jordan (Lie) σ-Derivations on Path Algebras. *Filomat*, 36(18), 6231-6243.

Ali, S., Rafiquee, N. N., & Varshney, V. 2024. Certain Types of Derivations in Rings: a Survey. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, 30(2), 256-306.

Andari, A. 2015. *Pengantar Teori Modul*. Universitas Brawijaya Press, Malang.

Andari, A. 2015. *Teori Grup*. Universitas Brawijaya Press, Malang.

Ardekani, L. K., & Davvaz, B. 2015. On (θ, σ)-Derivations of Two Types of Hyperrings. *Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing*, 25(4-5), 491-510.

Ashraf, M., & Rehman, N. U. 2002. On Commutativity of Rings with Derivations. *Results in mathematics*, 42(1), 3-8.

Benkovič, D. 2016. Jordan σ-Derivations of Triangular Algebras. *Linear and Multilinear Algebra*, 64(2), 143-155.

Benkovič, D. 2022. Lie σ-Derivations of Triangular Algebras. *Linear and Multilinear Algebra*, 70(15), 2966-2983.

Chaudhuri, D. 2019. (σ, τ)-Derivations of Group Rings. *Communications in Algebra*, 47(9), 3800-3807.

Chen, L., & Zhang, J. 2021. (σ, σ)-Derivation and (σ, τ)-Weak Amenability of Beurling algebra. *Bull. Korean Math. Soc.*, 58(5), 1209-1219.

Cullen, C. G. 2012. *Matrices and Linear Transformations*. Courier Corporation, New York.

Elchinger, O., Lundengård, K., Makhlouf, A., & Silvestrov, S. D. 2016. Brackets with (τ, σ)-Derivations and (p, q)-Deformations of Witt and Virasoro Algebras. *In Forum Mathematicum*, 28(4), 657-673.

Ernanto, I. 2018. Sifat-sifat Ring Faktor yang Dilengkapi Derivasi. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 1(1), 12-21.

Fitriani & Faisol, A. 2022. *Grup*. Matematika, Yogyakarta.

Gölbaşı, Ö., & Yazarlı, H. 2015. Notes on Near-Ring Ideals with (τ, σ)-Derivation. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 44(2), 323-330.

Hartwig, J. T., Larsson, D., & Silvestrov, S. D. 2006. Deformations of Lie Algebras Using σ-Derivations. *Journal of algebra*, 295(2), 314-361.

Herstein, I. N. 1961. Lie and Jordan structures in simple associative rings. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 67(6), 517-531.

Hidayati, F. U. N., & Suryoto, S. 2012. Derivasi BCC-Aljabar. *Jurnal Matematika*, 1(1), 80-85.

Hosseini, A., Hassani, M., & Niknam, A. 2011. Generalized σ-Derivation on Banach Algebras. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 37(4), 81-94.

Hvala, B. 1998. Generalized Derivations in Rings. *Communications in Algebra*, 26(4), 1147-1166.

Jabeen, A., Ashraf, M., & Ahmad, M. 2020. σ-Derivations on Generalized Matrix Algebras. *An. Stiint. Univ. Ovidius Constanta Ser. Mat*, 28(2), 115-135.

Jacobson, N. 2013. *Lie algebras*. Courier Corporation, New York.

Lee, T. K. 2017. Jordan σ-Derivations of Prime Rings. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 47(2), 511-525.

Leger, G. F., & Luks, E. M. 2000. Generalized Derivations of Lie Algebras. *Journal of Algebra*, 228(1), 165-203.

Makhlouf, A., & Silvestrov, S. D. 2008. Hom-algebra structures. *Journal of Generalized Lie Theory and Applications*, 2(2), 51-64.

Marsden, J. E., & Tromba, A. J. 2012. *Vector Calculus*. W. H. Freeman, New York.

Mirzavaziri, M., & Moslehian, M. S. 2006. σ-Derivations in Banach Algebras. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 32(1), 65-78.

Muhiuddin, G. 2019. On (σ, τ)-Derivations of BCI-Algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 43(5).

Oliveri, F. 2010. Lie Symmetries of Differential Equations: Classical Results and Recent Contributions. *Symmetry*, 2(2), 658-706.

Persulessy, E. R., & Mahmud, A. H. 2013. Ring Prima dan Ring Semiprima. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 7(1), 1-4.

Quadri, M. A., Khan, M. S., & Rehman, N. 2003. Generalized Derivations and Commutativity of Prime Rings. *Indian J. pure appl. Math*, 34(9), 1393-1396.

Rasiman, Rubowo, M. R., & Pramasdyahsari, A. S. 2018. *Teori Ring*. Universitas PGRI Semarang Press, Semarang.

Saber, H., Al-Amery, Z. Z., Al-omary, R. M., Aldwoah, K., Alsulami, A., & Suhail, M. 2025. Generalized (τ, σ)-L-Derivations in Rings. *Mathematics*, 13(17), 2784.

Samman, M. S., & Thaheem, A. B. 2003. Derivations on Semiprime Rings. *Int. J. of Pure and Applied Mathematics*, 5(4), 469-477.

Savage, A. 2018. *Linear Algebra I*. University Ottawa, Ottawa.

Setiawan, A. 2014. *Dasar-Dasar Aljabar Modern: Teori Grup & Teori Ring*. Tisara Grafika, Salatiga.

Thomas, A. B., Puspita, N. P., & Fitriani, F. 2024. Derivations on Several Rings. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 18(3), 1729-1738.

Utama, G. Y. T., Kusumastuti, N., & Fran, F. 2021. Representasi Adjoin pada Aljabar Lie. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, 10(4).

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. 2021. *Teori Ring dan Modul*. UGM PRESS, Yogyakarta.

Waluyo, R., Faisol, A., & Fitriani, F. 2025. (σ, τ)-Derivasi pada Ring Grup. *Euler: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, 13(2), 142-146.