# HOMODERIVASI PADA ALJABAR LIE

**Skripsi**

**Oleh**

**MUHAMMAD KHOIRUL PRASETIYO**
**NPM. 2217031043**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS LAMPUNG**
**BANDAR LAMPUNG**
**2026**

## ABSTRACT

## HOMODERIVATION ON LIE ALGEBRA

By

**Muhammad Khoirul Prasetiyo**

This study investigates the concept of homoderivation on Lie algebras using the commutator $[a, b] = ab - ba$. The objectives of this research are to define homoderivations on Lie algebras, analyze their properties, and examine their relationship with Lie derivations. The research method is based on a literature review and theoretical analysis, involving the formulation of definitions, the establishment of theorems, and the development of rigorous proofs supported by relevant examples. The results show that homoderivations on Lie algebras constitute an extension of the concept of Lie derivations while remaining consistent with the Lie bracket structure. Several fundamental properties of homoderivations are established, including those related to linearity and their interaction with Lie ideals. Furthermore, it is proven that every Lie derivation is a homoderivation; however, the converse does not generally hold. Hence, homoderivations on Lie algebras can be regarded as a generalization of Lie derivations under certain conditions.



Keywords: derivation, homoderivation, Lie derivation, Lie algebra, commutator.

# ABSTRAK

## HOMODERIVASI PADA ALJABAR LIE

**Oleh**

**Muhammad Khoirul Prasetiyo**

Penelitian ini membahas konsep homoderivasi pada aljabar Lie dengan menggunakan komutator $[a.b] = ab - ba$. Tujuan penelitian ini adalah untuk mendefinisikan homoderivasi pada aljabar Lie, menganalisis sifat-sifatnya, serta menyelidiki hubungannya dengan derivasi Lie. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dan analisis teoritis dengan menyusun definisi, teorema, pembuktian, serta contoh-contoh yang relevan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa homoderivasi pada aljabar Lie merupakan pengembangan dari konsep derivasi Lie yang tetap konsisten terhadap struktur *bracket* Lie. Diperoleh beberapa sifat homoderivasi pada aljabar Lie, di antaranya berkaitan dengan linearitas dan keterkaitannya terhadap struktur ideal Lie. Selain itu, ditunjukkan bahwa setiap derivasi Lie merupakan homoderivasi pada aljabar Lie, namun tidak setiap homoderivasi pada aljabar Lie merupakan derivasi Lie, sehingga homoderivasi pada aljabar Lie dapat dipandang sebagai generalisasi dari derivasi Lie dengan memenuhi kondisi tertentu.

Kata kunci: derivasi, homoderivasi, derivasi Lie, aljabar Lie, komutator.

# HOMODERIVASI PADA ALJABAR LIE

**MUHAMMAD KHOIRUL PRASETIYO**

**Skripsi**

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS LAMPUNG**
**BANDAR LAMPUNG**
**2026**

| | | |
|---|---|---|
| Judul Skripsi | : | **HOMODERIVASI PADA ALJABAR LIE** |
| Nama Mahasiswa | : | *Muhammad Khoirul Prasetiyo* |
| Nomor Pokok Mahasiswa | : | **2217031043** |
| Program Studi | : | **Matematika** |
| Fakultas | : | **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam** |

**MENYETUJUI**

1. Komisi Pembimbing

| | |
|---|---|
| **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.** | **Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.** |
| NIP 198406272006042001 | NIP 199306012019032021 |

2. Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

**Mulyono, S.Si., M.Si,. Ph.D.**
NIP 197406112000031002

**MENGESAHKAN**

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.** .....

Sekretaris : **Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.** .....

Penguji

Bukan Pembimbing : **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.** .....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

**Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.**
NIP 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **23 April 2026**

## PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

| | | |
|---|---|---|
| Nama | : | **Muhammad Khoirul Prasetiyo** |
| Nomor Pokok Mahasiswa | : | **2217031043** |
| Jurusan | : | **Matematika** |
| Judul Skripsi | : | **Homoderivasi pada Ajabar Lie** |

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 23 April 2026

Muhammad Khoirul Prasetiyo

# RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Muhammad Khoirul Prasetiyo yang lahir di Lampung Tengah pada tanggal 29 November 2003. Penulis merupakan anak keempat dari empat bersaudara, putra dari pasangan Didik Santoso dan Ngatminiyati.

Penulis memulai pendidikan formal di TK Dharma Wanita pada tahun 2009 dan menyelesaikannya pada tahun 2010. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di SD Negeri 1 Bandar Sakti pada tahun 2010 sampai dengan 2016. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 1 Terusan Nunyai pada tahun 2016 sampai dengan tahun 2019, dan menyelesaikan pendidikan di SMA Negeri 1 Terusaan Nunyai pada tahun 2022.

Pada tahun 2022, penulis diterima di Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN). Pada akhir tahun 2024, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di PT Perkebunan Nusantara 1 Regional 7 (PTPN 1 Regional 7) selama 40 hari sampai dengan awal Februari 2025. Selain itu, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 30 hari di Kelurahan Gedong Meneng Baru, Bandar Lampung.

# KATA INSPIRASI

*”Ibu menantang bahaya untuk melahirkanku ke dunia,*
*jadi tidak mungkin aku tidak ada artinya.”*

*”Aku membuat ayahku bekerja setiap hari hingga lelah,*
*jadi aku usahakan pasti lelahnya tidak sia-sia.”*

*”And if you never bleed, you’re never gonna grow.”*
***(The 1*-Taylor Swift)**

*”What’s beautiful is only beautiful if you want to be beautiful.*
*If you decide that today, no matter what happens is gonna be a great day*
*then it’s gonna be a great day.”*
**(eaJ Park)**

*”Tos Tos, Hwaiting!”*
**(Leehan)**

# PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin
Dengan mengucapkan puji dan syukur atas kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala karena limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya.
Tak lupa shalawat beserta salam selalu tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu Alaihi Wasallam.
Dengan rasa syukur dan bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

**Ayah dan Ibu Tercinta**

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

**Dosen Pembimbing dan Pembahas**

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

**Sahabat-sahabatku**

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

**Almamater Tercinta**
Universitas Lampung

# SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Homoderivasi pada Aljabar Lie” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sepanjang proses penyusunan skripsi ini.
2. Ibu Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si. selaku Pembimbing 2 yang telah memberikan arahan, dukungan, serta doa sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan saran, kritik, serta evaluasi yang membangun sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
4. Ibu Dra. Dorrah Azis, M.Si. selaku dosen Pembimbing Akademik yang senantiasa memberikan arahan, motivasi, dan bimbingan selama penulis menempuh studi.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Seluruh guru TK, SD, SMP, dan SMA yang telah mengajarkan dan memberikan ilmu hingga penulis bisa menduduki bangku perkuliahan.
8. Ayah dan Ibu tercinta atas doa, kasih sayang, dan dukungannya, serta kepada kakak dan adik atas semangat dan motivasi yang diberikan, sehingga penulis dapat segera menyelesaikan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 23 April 2026

Muhammad Khoirul Prasetiyo

# DAFTAR ISI

Halaman

**DAFTAR GAMBAR** . . . . . **iv**
**BAB I PENDAHULUAN** . . . . . **1**
1.1 Latar Belakang Masalah . . . . . 1
1.2 Tujuan Penelitian . . . . . 3
1.3 Manfaat Penelitian . . . . . 3
**BAB II TINJAUAN PUSTAKA** . . . . . **4**
2.1 Grup . . . . . 4
2.2 Ring . . . . . 6
2.3 Ruang Vektor . . . . . 13
2.4 Aljabar Lie . . . . . 24
2.5 Derivasi . . . . . 48
2.6 Derivasi *Inner* . . . . . 50
2.7 Homoderivasi pada Ring . . . . . 52
2.8 Derivasi Lie . . . . . 56
**BAB III METODE PENELITIAN** . . . . . **58**
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian . . . . . 58
3.2 Metode Penelitian . . . . . 58
**BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN** . . . . . **60**
4.1 Homoderivasi pada Aljabar Lie . . . . . 60
4.2 Sifat-sifat Homoderivasi pada Aljabar Lie . . . . . 74
4.3 Kaitan Derivasi Lie dengan Homoderivasi pada Aljabar Lie . . . . . 86
**BAB V KESIMPULAN DAN SARAN** . . . . . **90**
5.1 Kesimpulan . . . . . 90
5.2 Saran . . . . . 90
**DAFTAR PUSTAKA** . . . . . **92**

# DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

3.1 Langkah-langkah penelitian. . . . . 59

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang Masalah

Derivasi merupakan konsep fundamental dalam kajian aljabar. Menurut Ali dkk. (2024), derivasi memiliki banyak aplikasi, terutama untuk mengungkap sifat struktur seperti aljabar Lie dan ideal. Secara umum, derivasi didefinisikan sebagai pemetaan aditif yang memenuhi sifat Leibniz, sehingga menjadi dasar penting dalam teori ring untuk menganalisis ideal dan komutativitas.

Kajian tentang derivasi dalam ring terus berkembang, misalnya Ernanto (2018) yang menyoroti sifat-sifat ring faktor yang dilengkapi derivasi, serta Al-Khalaf dkk. (2018a) yang mengkaji derivasi dalam ring diferensial prima. Selanjutnya, Atteya (2020) meneliti kondisi komutativitas pada ring semiprima yang dilengkapi derivasi. Perkembangan kajian ini juga terlihat dalam penelitian Fitriani dkk. (2024) yang mengkaji $f$-derivasi pada modul polinomial, Sitompul dkk. (2024) yang meneliti Jordan derivasi pada ring polinomial $R[x]$, dan Mursyidah dkk. (2025) yang memperkenalkan konsep derivasi nil dan $\delta$-ideal pada ring polinomial. Kontribusi lain datang dari Waluyo dkk. (2025) yang membahas $(\sigma, \tau)$-derivasi pada ring grup, serta Faisol & Fitriani (2025) yang menganalisis derivasi dan pemetaan linear pada *skew generalized power series modules*.

Selain dalam ring, konsep derivasi juga berkembang dalam kerangka aljabar Lie. Utama dkk. (2021) mengulas representasi adjoin pada aljabar Lie yang memperluas pemahaman mengenai struktur internalnya. Kajian ini berlanjut dengan penelitian Basdouri dkk. (2023) yang memperkenalkan *invertible derivations* pada aljabar Lie, serta Huang dkk. (2023) yang memfokuskan analisis pada aljabar Murray–von Neumann. Kompleksitas konsep derivasi semakin terlihat pada penelitian Chen dkk. (2025), yang menunjukkan bahwa derivasi pada $\omega$-Lie aljabar lebih kompleks dibandingkan derivasi pada aljabar Lie biasa, dan penelitian Futorny & Tantubay

(2025) yang menelaah representasi aljabar Lie Hamiltonian serta perannya dalam fisika matematis.

Perkembangan lain muncul melalui kajian homoderivasi. Al-Khalaf dkk. (2018b) menyoroti keterkaitannya dengan Lie ring sederhana, sedangkan Alharfie & Muthana (2019) mengeksplorasi karakteristik homoderivasi pada ring prima. Khan dkk. (2022) kemudian mengkaji teorema Herstein pada ideal prima dengan melibatkan sepasang derivasi, sementara Chen & Zhang (2022) mengembangkan pendekatan berbasis aljabar komutatif untuk mengkarakterisasi struktur Hom-Lie aljabar. Pada tahun yang sama, El-Sayiad dkk. (2022) memperkenalkan konsep $n$-homoderivasi dalam ring semiprima, yang dilanjutkan oleh Tammam dkk. (2022) dengan penekanan pada elemen pusat, serta El-Soufi & Ghareeb (2022) yang menekankan aplikasinya pada ring prima dan semiprima.

Boua & Söğütçü (2023) memperluas semi-prima ring melalui konsep perluasan homoderivasi. Turkmen (2024) mengkaji hubungan antara homoderivasi dan semi-derivasi, sementara Ermeidis & Jotz (2024) meneliti keterkaitan homoderivasi dan perubahan ideal dalam aljabar Lie. Penelitian terbaru menunjukkan arah kajian yang semakin sistematis. Thomas dkk. (2024) menelaah derivasi pada berbagai jenis ring, sementara Ali dkk. (2024) menyajikan survei komprehensif mengenai tipe-tipe derivasi. Shahoodh (2024) merancang kerangka teoritis untuk menganalisis pasangan derivasi dalam semi-ring.

Dalam kaitannya dengan pengembangan konsep homoderivasi, beberapa penelitian berfokus pada penerapan konsep derivasi dan homoderivasi dalam struktur Lie yang dibangun atas ring asosiatif. Salah satu penelitian awal dilakukan oleh Herstein (1961) yang mengkaji struktur Lie dan Jordan dalam ring asosiatif sederhana menggunakan bentuk komutator. Pada penelitian Sarikaya & Gölbaşi (2023) yang meneliti homoderivasi pada ring prima dan ideal Lie, juga menggunakan komutator sebagai operator Lie-nya. Arah penelitian tersebut kemudian diperluas oleh Hummdi dkk. (2025) yang mengkaji ideal Lie dan homoderivasi pada ring semiprima, tetap dalam kerangka komutator untuk mengkaji hubungan antara ideal Lie dan struktur homoderivasi.

Berdasarkan tinjauan penelitian terdahulu yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa penelitian mengenai derivasi dan homoderivasi telah menunjukkan perkembangan. Akan tetapi, penerapan konsep homoderivasi dalam konteks aljabar

Lie masih tergolong terbatas dan belum banyak dieksplorasi secara mendalam. Dalam penelitian ini, bentuk *bracket* Lie yang digunakan adalah komutator, sehingga pembahasan difokuskan pada analisis sifat dan struktur homoderivasi yang muncul dari definisi komutator $[a, b] = ab - ba$. Oleh karena itu, penelitian ini diarahkan untuk mengisi kekosongan dengan menganalisis dan mengembangkan pemahaman tentang homoderivasi pada aljabar Lie.

## 1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. mendefinisikan homoderivasi pada aljabar Lie;
2. mengonstruksi contoh dan menganalisis sifat homoderivasi pada aljabar Lie;
3. menyelidiki hubungan antara homoderivasi pada aljabar Lie dengan derivasi Lie.

## 1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang ingin diperoleh dari penelitian ini yaitu:

1. mengetahui sifat-sifat homoderivasi pada aljabar Lie;
2. mengetahui hubungan antara homoderivasi pada aljabar Lie dengan derivasi Lie;
3. menambah referensi yang lebih dalam mengenai homoderivasi pada aljabar Lie, yang dapat menjadi dasar bagi penelitian lebih lanjut.

# BAB II

# TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, akan diuraikan konsep dasar yang menjadi landasan teori untuk mendukung pembahasan pada bagian selanjutnya.

## 2.1 Grup

Salah satu langkah penting untuk mendalami konsep-konsep yang lebih kompleks dalam teori aljabar adalah memahami struktur dasar dalam aljabar abstrak, yaitu grup. Sebelum membahas pengertian grup, berikut diberikan definisi operasi biner.

**Definisi 2.1.1** Operasi biner $*$ pada himpunan $S$ merupakan fungsi dari $S \times S$ ke $S$. Untuk setiap $(a, b) \in S \times S$, $*(a, b)$ di $S$ dinotasikan dengan $a * b$ (Fitriani & Faisol, 2022).

**Contoh 2.1.1** Diberikan himpunan

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a,\ b,\ c,\ d\ \in \mathbb{R} \right\}.$$

Akan ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan matriks merupakan operasi biner pada $G$.

Diberikan dua matriks

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in G,$$

sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}.$$

Karena hasil penjumlahan tersebut tetap menghasilkan matriks yang memiliki elemen-elemen $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h \in \mathbb{R}$, jadi hasil penjumlahan matriks ini tetap berada dalam himpunan $G$. Dengan demikian, operasi penjumlahan matriks merupakan operasi biner pada $G$.

Struktur aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu dinamakan grup.

**Definisi 2.1.2** Suatu grup $\langle G, * \rangle$ terdiri dari himpunan $G$ bersama operasi biner $*$ yang didefinisikan pada $G$ dan memenuhi aksioma berikut:

1. operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$;
2. terdapat elemen identitas $e$, yaitu untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$;
3. untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen invers $a^{-1} \in G$ sehingga berlaku $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

(Fitriani & Faisol, 2022).

**Contoh 2.1.2** Diberikan himpunan $2\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $2\mathbb{Z}$ bersama dengan operasi penjumlahan merupakan grup.

1. Diberikan sebarang $a,\ b,\ c \in 2\mathbb{Z}$, dengan $a = 2r,\ b = 2s,\ c = 2t$, untuk suatu $r,\ s,\ t \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}(a + b) + c &= (2r + 2s) + 2t \\ &= 2r + (2s + 2t) \\ &= a + (b + c).\end{aligned}$$

   Jadi, operasi penjumlahan pada himpunan $2\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif.

2. Diberikan sebarang $a \in 2\mathbb{Z}$, dengan $a = 2r$, untuk suatu $r \in \mathbb{Z}$. Terdapat $0$ dalam $2\mathbb{Z}$, sehingga

$$a + 0 = 2r + 0 = 2r = a, \text{dan } 0 + a = 0 + 2r = 2r = a.$$

   Jadi, terdapat elemen identitas terhadap operasi penjumlahan yaitu $0 \in 2\mathbb{Z}$.

3. Diberikan sebarang $a \in 2\mathbb{Z}$, dengan $a = 2r$, untuk suatu $x \in \mathbb{Z}$. Terdapat $-a = -2r \in 2\mathbb{Z}$, sehingga

$$\begin{aligned} a + (-a) &= 2r + (-2r) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} (-a) + a &= (-2r) + 2r \\ &= 0 \end{aligned}$$

jadi, setiap $a \in 2\mathbb{Z}$ mempunyai elemen invers terhadap operasi penjumlahan, yaitu $-a \in 2\mathbb{Z}$.

Dari 1, 2, dan 3 terbukti bahwa $\langle 2\mathbb{Z},\ + \rangle$ merupakan grup.

## 2.2 Ring

Ring adalah struktur aljabar yang lebih kompleks dan memiliki dua operasi, yaitu penjumlahan dan perkalian. Ring merupakan perluasan dari grup. Ring dapat digunakan dalam berbagai konteks. Berikut diberikan definisi ring menurut Rasiman dkk. (2018).

**Definisi 2.2.1** Misalkan $R$ adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi, yaitu operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$, yang kemudian dinyatakan dalam bentuk struktur $\langle R,\ +,\ \cdot \rangle$ . Struktur ini disebut sebagai ring jika memenuhi beberapa aksioma berikut:

1. $\langle R,\ + \rangle$ merupakan grup Abel, yaitu memenuhi:
   i. untuk setiap $a,\ b \in R$, jadi $a + b \in R$;
   ii. untuk setiap $a,\ b,\ c \in R$, berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$;
   iii. terdapat elemen identitas $e \in R$ sehingga untuk setiap $a \in R$, berlaku $a + e = e + a = a$;
   iv. setiap elemen memiliki invers, yaitu untuk setiap $a \in R$, terdapat $a^{-1} \in R$ sehingga $a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$;
   v. untuk setiap $a,\ b \in R$, berlaku $a + b = b + a$.

2. $\langle R,\ \cdot \rangle$ adalah semigrup, yaitu memenuhi:

   i. untuk setiap $a,\ b \in R$, jadi $a\ \cdot\ b \in R$;

   ii. untuk setiap $a,\ b,\ c \in R$,
   berlaku $(a\ \cdot\ b)\ \cdot\ c = a\ \cdot\ (b\ \cdot\ c)$.

3. Sifat distribusi kanan dan kiri berlaku, yaitu:

   i. $a\ \cdot\ (b+c) = (a\ \cdot\ b)\ +\ (a\ \cdot\ c)$;

   ii. $(a+b)\ \cdot\ c = (a\ \cdot\ c)\ +\ (b\ \cdot\ c)$, untuk setiap $a, b, c \in R$.

Untuk lebih memahami pengertian ring, berikut diberikan contoh ring.

**Contoh 2.2.1** Diberikan $T$ himpunan semua fungsi, yaitu $T = \{t \mid t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi$\}$. Untuk setiap $t,\ j \in T$ dan $x \in \mathbb{R}$ didefinisikan

$$(t + j)(x) = t(x) + j(x)$$

dan

$$(tj)(x) = t(x)j(x).$$

Akan ditunjukkan $\langle T,\ +,\ \cdot \rangle$ merupakan ring.

1. Akan ditunjukkan $\langle T,\ + \rangle$ merupakan grup Abel.

   i. Untuk setiap $t, j \in T$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku $t + j \in T$.

   ii. Untuk setiap $t,\ j,\ k \in T$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$\begin{aligned}((t + j) + k)(x) &= (t + j)(x) + k(x)\\ &= t(x) + j(x) + k(x)\\ &= t(x) + (j + k)(x)\\ &= (t + (j + k))(x).\end{aligned}$$

   Dengan demikian, operasi penjumlahan pada $T$ bersifat asosiatif.

   iii. Elemen identitas dalam operasi penjumlahan adalah fungsi nol, yaitu $0 \in T$, yang didefinisikan sebagai:

$$0(x) = 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Untuk setiap $t \in T$, berlaku:

$$(t+0)(x) = t(x) + 0 = t(x), \text{dan } (0+t)(x) = 0 + t(x) = t(x).$$

Karena $0(x) = 0$, jadi $t + 0 = t$ dan $0 + t = t$. Jadi, elemen identitas dalam operasi penjumlahan adalah $0$.

iv. Fungsi invers dari $t$ adalah $-t$, didefinisikan sebagai:

$$(-t)(x) = -t(x), \ \forall \ x \ \in \mathbb{R}.$$

Untuk setiap $t \in T$, terdapat $-t \in T$ sehingga:

$$(t + (-t))(x) = (t)(x) + (-t)(x) = 0,$$

dan

$$(-t + t)(x) = (-t)(x) + (t)(x) = 0.$$

Dengan demikian, $t+(-t) = 0$, yang menunjukkan bahwa setiap elemen dalam $T$ memiliki invers terhadap penjumlahan.

Jadi, $\langle T, \ + \rangle$ merupakan grup Abel.

2. Akan ditunjukkan $\langle T, \ \cdot \rangle$ merupakan semigrup.

   i. Untuk setiap $t, \ j \in T$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

   $$(tj)(x) = t(x)j(x) \in \mathbb{R}.$$

   Jadi, operasi $\cdot$ bersifat tertutup di $T$.

   ii. Untuk setiap $t, \ j, \ k \in T$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

   $$\begin{aligned} ((tj)k)(x) &= (tj)(x)k(x) \\ &= t(x)j(x)k(x) \\ &= t(x)(jk)(x) \\ &= (t(jk))(x). \end{aligned}$$

   Jadi, operasi $\cdot$ bersifat asosiatif.

Sehingga, $\langle T, \ \cdot \rangle$ merupakan semigrup.

3. Akan ditunjukkan sifat distribusi kiri dan distribusi kanan berlaku di $T$. Untuk setiap $t,\ j,\ k \in T$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

   i. Sifat distribusi kiri

$$\begin{aligned}(t(j+k))(x) &= t(x)(j+k)(x)\\ &= t(x)(j(x)+k(x))\\ &= t(x)j(x)+t(x)k(x)\\ &= (tj)(x)+(tk)(x)\\ &= (tj+tk)(x).\end{aligned}$$

   ii. Sifat distribusi kanan

$$\begin{aligned}((t+j)k)(x) &= (t+j)(x)k(x)\\ &= (t(x)+(j(x))k(x)\\ &= t(x)k(x)+j(x)k(x)\\ &= (tk)(x)+(jk)(x)\\ &= (tk+jk)(x).\end{aligned}$$

   Jadi, berlaku distribusi kiri dan kanan pada $T$.

Berdasarkan $1,\ 2$, dan $3$, terbukti bahwa $\langle T,\ +,\ \cdot\rangle$ merupakan ring.

Selain ring secara umum, terdapat ring yang memiliki identitas terhadap perkalian, yang disebut ring dengan elemen satuan.

**Definisi 2.2.2** Diberikan sebarang ring $R$ dengan elemen identitas $1_R$ yang memiliki elemen identitas untuk operasi perkalian (misal dinotasikan dengan $k$). Elemen identitas $k$ disebut sebagai elemen satuan. Jika ring $R$ memuat elemen identitas untuk perkalian, maka ring $R$ disebut sebagai ring dengan elemen satuan (Rasiman dkk., 2018).

Berikut diberikan contoh ring dengan elemen satuan.

**Contoh 2.2.2** Diberikan ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot\rangle$. Akan ditunjukkan bahwa ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot\rangle$ adalah ring dengan elemen satuan.

1. $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa.

2. Suatu ring $R$ dikatakan mempunyai elemen satuan jika terdapat $e \in R$ sehingga untuk setiap $a \in R$ berlaku
$$ea = ae = a.$$

3. Diberikan $e = 1 \in \mathbb{Z}$. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ berlaku
$$1 \cdot a = a$$
dan
$$a \cdot 1 = a.$$

Karena $1$ memenuhi syarat sebagai identitas perkalian, jadi $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ adalah ring dengan elemen satuan, dengan elemen satuannya adalah $1$.

Selanjutnya, dikenal juga ring yang bersifat komutatif pada operasi perkaliannya, yang disebut ring komutatif.

**Definisi 2.2.3** Ring $R$ dikatakan sebagai ring komutatif apabila operasi perkalian dalam ring $R$ bersifat komutatif, artinya urutan perkalian dua elemen tidak mempengaruhi hasilnya (Rasiman dkk., 2018).

Berikut contoh ring yang bersifat komutatif.

**Contoh 2.2.3** Diberikan sebarang ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$, yaitu himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa.

Karena operasi perkalian pada $\mathbb{Z}$ bersifat komutatif, diperoleh $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring komutatif.

Selanjutnya, akan dijelaskan mengenai homomorfisma ring.

**Definisi 2.2.4** Diberikan ring $\langle R_1, +_1, \cdot_1 \rangle$ dan $\langle R_2, +_2, \cdot_2 \rangle$ serta suatu pemetaan $f : R_1 \to R_2$. Pemetaan $f$ disebut homomorfisma ring jika
$$f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y), \text{dan } f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y)$$
untuk setiap $x, y \in R_1$ (Wahyuni dkk., 2021).

Berikut ini diberikan contoh homomorfisma ring.

**Contoh 2.2.4** Diberikan ring

$$T_{2\times 2}(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

dengan operasi penjumlahan dan perkalian matriks.

Didefinisikan pemetaan $f : T_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ oleh

$$f\left( \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) = a, \quad \text{untuk setiap } \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in T_{2\times 2}(\mathbb{Z}).$$

Akan ditunjukkan bahwa $f$ merupakan homomorfisma ring.

Diberikan sebarang

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \in T_{2\times 2}(\mathbb{Z}).$$

Berlaku

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}, \qquad A_1 A_2 = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{bmatrix}.$$

Akibatnya, $f(A_1 + A_2) = a_1 + a_2 = f(A_1) + f(A_2)$, dan $f(A_1 A_2) = a_1 a_2 = f(A_1) f(A_2)$.

Selain itu, matriks identitas $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in T_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ dan $f(I) = 1$. Oleh karena itu $f$ merupakan homomorfisma ring.

Dalam studi struktur aljabar, sering diperkenalkan asumsi tambahan yang berkaitan dengan bagaimana suatu pemetaan berinteraksi dengan operasi perkalian. Salah satu konsep yang digunakan untuk menggambarkan sifat tersebut adalah pemetaan ortogonal.

Berikut definisi pemetaan ortogonal menurut Brešar (2004).

**Definisi 2.2.5** Diberikan ring $R$. Dua pemetaan aditif $f_1, f_2 : R \to R$ disebut pemetaan ortogonal apabila untuk setiap $j, l \in R$ berlaku

$$f_1(j)f_2(l) + f_2(j)f_1(l) = 0.$$

Berikut merupakan contoh pemetaan ortogonal.

**Contoh 2.2.5** Diberikan

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Didefinisikan pemetaan aditif $h_1, h_2 : R \to R$ dengan

$$h_1\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad h_2\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & (a-c) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Akan diselidiki apakah $h_1$ dan $h_2$ merupakan pemetaan ortogonal pada $R$.

Diberikan sebarang

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \in \mathcal{L}.$$

Akan ditunjukkan

$$h_1(A)h_2(B) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & (x-z) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h_2(A)h_1(B) = \begin{bmatrix} 0 & (a-c) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sehingga

$$h_1(A)h_2(B) + h_2(A)h_1(B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena

$$h_1(A)h_2(B) + h_2(A)h_1(B) = 0 \quad \text{untuk setiap } A, B \in R,$$

jadi $h_1$ dan $h_2$ merupakan pemetaan ortogonal pada $R$.

## 2.3 Ruang Vektor

Pada bagian ini akan dibahas mengenai ruang vektor dan transformasi linear. Berikut ini akan diberikan definisi ruang vektor.

**Definisi 2.3.1** Diberikan lapangan $F$. Ruang vektor atas $F$ adalah himpunan tak kosong $V$ bersama dua operasi, operasi pertama disebut penjumlahan yang dinotasikan dengan $+$,

$$+ : V \times V \to V,$$

dengan $(u,\ v) \mapsto u + v \in V$, untuk setiap $u,\ v \in V$.

Operasi kedua disebut perkalian skalar dinotasikan dengan $\cdot$,

$$\cdot : F \times V \to V,$$

dengan $(r,\ u) \mapsto ru \in V$, untuk setiap $r \in F,\ u \in V$, yang memenuhi beberapa aksioma, yaitu untuk setiap $u,\ v,\ w \in V$ berlaku:

1. $u + (v + w) = (u + v) + w$;
2. $u + v = v + w$;
3. terdapat $0 \in V$ sehingga untuk setiap $u \in V$, berlaku $0 + u = u + 0 = u$;
4. untuk setiap $u \in V$, terdapat $-u \in V$, berlaku $u + (-u) = (-u) + u = 0$;

5. untuk setiap $a,\ b \in F$ dan $u,\ v \in V$, berlaku:

$$\begin{aligned} a(u+v) &= au + av \\ (a+b)u &= au + bu \\ (ab)u &= a(bu) \\ 1u &= u \end{aligned}$$

(Roman, 2008).

Berikut ini diberikan contoh ruang vektor.

**Contoh 2.3.1** Diberikan lapangan $F$. Himpunan $F^F = \{f | f : F \to F, f \text{ fungsi}\}$ merupakan ruang vektor atas $F$, terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar berikut:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

dan

$$(af)(x) = a(f(x)),$$

untuk setiap $f, g \in F^F$ dan $a, x \in F$.

Akan ditunjukkan bahwa $F^F$ merupakan ruang vektor atas $F$.

1. Diberikan $u, v, w \in F^F$, akan ditunjukkan bahwa $u + (v + w) = (u + v) + w$. Sehingga,

$$\begin{aligned} (u + (v+w))(x) &= u(x) + (v+w)(x) \\ &= u(x) + (v(x) + w(x)) \\ &= (u(x) + v(x)) + w(x) \\ &= (u+v)(x) + w(x) \\ &= ((u+v) + w)(x). \end{aligned}$$

   Jadi, sifat asosiatif pada operasi penjumlahannya terpenuhi.

2. Diberikan $u, v \in F^F$, akan ditunjukkan bahwa $u + v = v + u$ terpenuhi, berlaku:

$$\begin{aligned} (u+v)(x) &= u(x) + v(x) \\ &= v(x) + u(x) \\ &= (v+u)(x). \end{aligned}$$

3. Didefinisikan fungsi nol $0_F \in F^F$, dengan $0_F(x) = 0$, untuk setiap $x \in F$. Untuk setiap $u \in F^F$ diperoleh:

$$\begin{aligned}(0_F + u)(x) &= 0_F(x) + u(x)\\ &= 0 + u(x)\\ &= u(x)\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}(u + 0_F)(x) &= u(x) + 0_F(x)\\ &= u(x) + 0\\ &= u(x).\end{aligned}$$

Dengan demikian, $0_F + u = u + 0_F = u$, untuk setiap $u \in F^F$.

4. Untuk setiap $u \in F^F$ didefinisikan fungsi $-u \in F^F$, dengan $(-u)(x) = -u(x)$. Diperoleh:

$$\begin{aligned}(u + (-u))(x) &= u(x) + (-u)(x)\\ &= u(x) - u(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}((-u) + u)(x) &= (-u)(x) + u(x)\\ &= -u(x) + u(x)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Dengan demikian, $u + (-u) = (-u) + u = 0_F$, untuk setiap $u \in F^F$.

5. Diberikan $a \in F$ dan $u, v \in F^F$. Berlaku:

$$\begin{aligned}(a(u + v))(x) &= a((u + v)(x))\\ &= a(u(x) + v(x))\\ &= au(x) + av(x)\\ &= (au)(x) + (av)(x)\\ &= (au + av)(x).\end{aligned}$$

6. Diberikan $a, b \in F$, $u \in F^F$, dan $x \in F$. Akan ditunjukkan bahwa $(a+b)u = au + bu$. Akibatnya,

$$\begin{aligned}((a+b)u)(x) &= (a+b)(u(x)) \\ &= au(x) + bu(x) \\ &= (au)(x) + (bu)(x) \\ &= (au + bu)(x).\end{aligned}$$

   Jadi, distribusi perkalian skalar terhadap penjumlahan skalar terpenuhi.

7. Diberikan $a, b \in F$ dan $u \in F^F$, akan ditunjukkan bahwa $(ab)u = a(bu)$. Sehingga,

$$\begin{aligned}((ab)u)(x) &= (ab)(u(x)) \\ &= a(b(u(x))) \\ &= (a(bu))(x).\end{aligned}$$

   Jadi, sifat asosiatif pada perkalian skalar terpenuhi.

8. Untuk setiap $u \in F^F$, akan ditunjukkan bahwa $1u = u$. Berlaku:

$$\begin{aligned}(1u)(x) &= 1(u(x)) \\ &= u(x).\end{aligned}$$

   Jadi, elemen identitas pada perkalian skalar terpenuhi.

Dengan demikian, $F^F$ merupakan ruang vektor atas $F$.

**Contoh 2.3.2** Diberikan himpunan

$$L = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $L$ merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$.

1. Diberikan sebarang $f, g \in L$. Karena $f, g \in L$, jadi terdapat $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ sehingga

$$f(x) = a_1 x + b_1 \quad \text{dan} \quad g(x) = a_2 x + b_2.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ &= (a_1x+b_1)+(a_2x+b_2)\\ &= (a_1+a_2)x+(b_1+b_2).\end{aligned}$$

Karena $a_1+a_2 \in \mathbb{R}$ dan $b_1+b_2 \in \mathbb{R}$, sehingga $(f+g)(x)$ juga berbentuk $ax+b$. Jadi,

$$f+g \in L, \text{untuk setiap } f,g \in L.$$

2. Diberikan sebarang $f \in L$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$. Karena $f \in L$, jadi terdapat $a,b \in \mathbb{R}$ sehingga

$$f(x) = ax+b.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned}(\lambda f)(x) &= \lambda f(x)\\ &= \lambda(ax+b)\\ &= (\lambda a)x+\lambda b.\end{aligned}$$

Karena $\lambda a \in \mathbb{R}$ dan $\lambda b \in \mathbb{R}$, sehingga $(\lambda f)(x)$ juga berbentuk $ax+b$. Jadi,

$$\lambda f \in L, \text{untuk setiap } f \in L \text{ dan } \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Didefinisikan fungsi nol $0 \in L$ dengan

$$0(x) = 0,$$

untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Fungsi ini dapat ditulis sebagai

$$0(x) = 0x+0,$$

dengan $0,0 \in \mathbb{R}$, sehingga $0 \in L$.

Selanjutnya, untuk setiap $f \in L$ berlaku

$$(f+0)(x) = f(x)+0 = f(x).$$

Jadi, $0$ adalah elemen nol di $L$.

4. Diberikan sebarang $f \in L$. Karena $f \in L$, jadi terdapat $a, b \in \mathbb{R}$ sehingga

$$f(x) = ax + b.$$

Didefinisikan $-f$ dengan

$$(-f)(x) = -f(x) = -(ax + b) = -ax - b.$$

Karena $-a, -b \in \mathbb{R}$, jadi $-f \in L$.

Selain itu,

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = 0.$$

Jadi, setiap elemen di $L$ memiliki invers aditif.

5. Diberikan sebarang $f, g \in L$. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, diperoleh

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= g(x) + f(x)\\ &= (g + f)(x).\end{aligned}$$

Jadi,

$$f + g = g + f, \text{untuk setiap } f, g \in L.$$

6. Diberikan sebarang $f, g, h \in L$. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, diperoleh

$$\begin{aligned}((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) + h(x)\\ &= (f(x) + g(x)) + h(x)\\ &= f(x) + (g(x) + h(x))\\ &= f(x) + (g + h)(x)\\ &= (f + (g + h))(x).\end{aligned}$$

Jadi,

$$(f + g) + h = f + (g + h), \text{untuk setiap } f, g, h \in L.$$

7. Diberikan sebarang $\lambda \in \mathbb{R}$ dan $f, g \in L$. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, diperoleh

$$\begin{aligned}(\lambda(f+g))(x) &= \lambda(f+g)(x)\\ &= \lambda(f(x)+g(x))\\ &= \lambda f(x) + \lambda g(x)\\ &= (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x)\\ &= (\lambda f + \lambda g)(x).\end{aligned}$$

Jadi,

$$\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g, \text{untuk setiap } f, g \in L \text{ dan } \lambda \in \mathbb{R}.$$

8. Diberikan sebarang $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ dan $f \in L$. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, diperoleh

$$\begin{aligned}((\lambda+\mu)f)(x) &= (\lambda+\mu)f(x)\\ &= \lambda f(x) + \mu f(x)\\ &= (\lambda f)(x) + (\mu f)(x)\\ &= (\lambda f + \mu f)(x).\end{aligned}$$

Jadi,

$$(\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f, \text{untuk setiap } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ dan } f \in L.$$

9. Diberikan sebarang $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ dan $f \in L$. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, diperoleh

$$\begin{aligned}((\lambda\mu)f)(x) &= (\lambda\mu)f(x)\\ &= \lambda(\mu f(x))\\ &= \lambda((\mu f)(x))\\ &= (\lambda(\mu f))(x).\end{aligned}$$

Jadi,

$$(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f), \text{untuk setiap } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ dan } f \in L.$$

10. Diberikan sebarang $f \in L$. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, diperoleh

$$\begin{aligned}(1f)(x) &= 1 \cdot f(x)\\ &= f(x).\end{aligned}$$

Jadi,

$$1f = f, \text{untuk setiap } f \in L.$$

Karena semua aksioma ruang vektor atas $\mathbb{R}$ terpenuhi, jadi $L$ merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$.

Berikut diberikan definisi subruang.

**Definisi 2.3.2** Diberikan suatu ruang vektor $V$ dan $W \subseteq V$. Himpunan $W$ disebut subruang dari $V$ jika memenuhi:

1. Terdapat $0 \in W$.
2. Jika $x, y \in W$, maka $x + y \in W$.
3. Jika $x \in W$ dan $\alpha$ skalar, maka $\alpha x \in W$.

(Samimullah, 2021).

Berikut contoh subruang.

**Contoh 2.3.3** Diberikan ruang vektor $M_2(\mathbb{R})$ dan

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $W$ merupakan subruang dari $M_2(\mathbb{R})$.

1. Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$. Karena $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$, diperoleh $W \neq \varnothing$.
2. Diberikan sebarang $A, B \in W$, dengan

   $$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   berlaku

   $$A + B = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W.$$

3. Diberikan sebarang skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ dan $A \in W$, dengan

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

berlaku

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W.$$

Dengan demikian, $W$ merupakan subruang dari $M_2(\mathbb{R})$.

Selanjutnya, akan dibahas mengenai transformasi linear.

**Definisi 2.3.3** Diberikan suatu fungsi $T : V \to W$ dari ruang vektor $V$ ke ruang vektor $W$ dinamakan transformasi linear jika memenuhi:

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$,
2. $T(ku) = kY(u)$,

untuk setiap $u,\ v \in V$ dan $k \in F$ (Abidin, 2014).

Dalam kasus spesifik dengan $V = W$, pemetaan linear $T : V \to V$ disebut sebagai operator linear pada $V$. Himpunan semua pemetaan linear dari $V$ ke $W$ dinotasikan dengan $\mathcal{L}(V,\ W)$ dan himpunan semua operator linear dinotasikan dengan $End(V)$ atau $\mathfrak{gl}(V)$ (Utama dkk., 2021). Berikut ini diberikan contoh transformasi linear.

**Contoh 2.3.4** Diberikan fungsi $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yang didefinisikan dengan $T(x, y) = (2x + y, x - y)$, untuk setiap $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Diberikan sebarang $u = (x_1, y_1)$ dan $v = (x_2, y_2)$, jadi $u+v = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ sehingga:

$$\begin{aligned} T(u + v) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) \\ &= (2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \\ &= (2x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (2x_2 + y_2, x_2 - y_2) \\ &= T(u) + T(v). \end{aligned}$$

2. Diberikan sebarang $k \in F$ dan $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$. Berlaku $ku = (kx_1, ky_1)$ sehingga:

$$\begin{aligned} T(ku) &= T(kx_1, ky_1) \\ &= (2kx_1 + ky_1, kx_1 - ky_1) \\ &= k(2x_1 + y_1, x_1 - y_1) \\ &= kT(u). \end{aligned}$$

Jadi, $T$ merupakan transformasi linear.

Berikut ini diberikan definisi pemetaan bilinear.

**Definisi 2.3.4** Diberikan sebarang ruang vektor $V$ atas lapangan $F$. Pemetaan bilinear pada $V$ adalah suatu fungsi

$$\langle -, - \rangle : V \times V \to V$$

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

yang memenuhi sifat linear kiri dan kanan, yaitu:

$$\begin{aligned} \langle \alpha x + \beta x', y \rangle &= \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x', y \rangle \\ \langle x, \alpha y + \beta y' \rangle &= \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, y' \rangle \end{aligned}$$

untuk setiap $x, x', y, y' \in V$ dan $\alpha, \beta \in F$ (Utama dkk., 2021).

Berikut ini diberikan contoh pemetaan bilinear.

**Contoh 2.3.5** Diberikan ruang vektor $\mathbb{R}$ atas lapangan $\mathbb{R}$. Didefinisikan pemetaan $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan rumus $\phi(x, y) = 2xy$. Akan ditunjukkan pemetaan $\phi$ merupakan pemetaan bilinear.

1. Diberikan sebarang $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$\begin{aligned} \phi(x_1 + x_2, y) &= 2(x_1 + x_2)y \\ &= 2x_1y + 2x_2y \\ &= \phi(x_1, y) + \phi(x_2, y). \end{aligned}$$

2. Diberikan sebarang $x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$\begin{aligned}\phi(x, y_1 + y_2) &= 2x(y_1 + y_2) \\ &= 2xy_1 + 2xy_2 \\ &= \phi(x, y_1) + \phi(x, y_2).\end{aligned}$$

Jadi, $\phi$ adalah pemetaan bilinear (Ruhama, 2012).

Selain struktur ruang vektor, transformasi linear, dan pemetaan bilinear, dalam beberapa aplikasi diperlukan operasi tambahan yang hanya didefinisikan pada ruang vektor tertentu. Operasi tersebut, seperti perkalian titik/hasil kali skalar (*dot product*) dan perkalian silang/hasil kali vektor (*cross product*).

Berikut ini diberikan definisi mengenai hasil kali titik.

**Definisi 2.3.5** Diberikan $x, y \in \mathbb{R}^3$, dengan $x = (x_1, x_2, x_3)$ dan $y = (y_1, y_2, y_3)$. hasil kali titik antara $x$ dan $y$ didefinisikan sebagai

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Hasil kali titik bersifat komutatif, yaitu $x \cdot y = y \cdot x$, dan memenuhi $x \cdot x = \|x\|^2$ (Stewart, 2015).

Untuk memperjelas definisi hasil kali titik, diberikan contoh berikut.

**Contoh 2.3.6** Diberikan $x, y \in \mathbb{R}^3$, dengan $x = (1, 2, 3)$ dan $y = (4, 5, 6)$. Diperoleh,

$$x \cdot y = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32.$$

Selanjutnya diberikan definisi mengenai hasil kali silang.

**Definisi 2.3.6** Diberikan $x, y \in \mathbb{R}^3$, dengan $x = (x_1, x_2, x_3)$ dan $y = (y_1, y_2, y_3)$. Hasil kali silang antara $x$ dan $y$ didefinisikan sebagai

$$x \times y = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}.$$

Hasil kali titik bersifat bilinear dan antisimetris, yaitu $x \times y = -(y \times x)$, serta ortogonal terhadap $x$ dan $y$ (Larson & Hostetler, 2010).

Berikut diberikan contoh hasil kali titik.

**Contoh 2.3.7** Diberikan $x, y \in \mathbb{R}^3$, dengan $x = (1, 2, 3)$ dan $y = (4, -1, 2)$. Diperoleh,

$$x \times y = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Berikut diberikan identitas penting yang melibatkan hasil kali titik bertingkat.

**Definisi 2.3.7** Untuk setiap vektor $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, hasil kali titik bertingkat didefinisikan sebagai

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)\, b - (a \cdot b)\, c.$$

Identitas ini disebut BAC-CAB *identity* dan digunakan untuk menyederhanakan hasil kali titik bertingkat (Marsden & Tromba, 2012).

Berikut diberikan contoh penggunaan identitas *BAC–CAB* untuk menentukan hasil kali titik bertingkat.

**Contoh 2.3.8** Diberikan vektor

$$x = (2, -1, 3), \qquad y = (1, 0, 2), \qquad z = (0, 4, -1).$$

Dengan menggunakan identitas

$$x \times (y \times z) = (x \cdot z)\, y - (x \cdot y)\, z,$$

diperoleh

$$x \cdot z = -7 \quad \text{dan} \quad x \cdot y = 8.$$

Sehingga,

$$x \times (y \times z) = (-7)(1, 0, 2) - 8(0, 4, -1) = (-7, 0, -14) - (0, 32, -8) = (-7, -32, -6).$$

## 2.4 Aljabar Lie

Aljabar Lie adalah struktur aljabar yang penting dalam teori grup dan fisika matematika, terutama dalam teori representasi dan lapangan (*field*).

Struktur ini dilengkapi dengan komutator yang memenuhi dua sifat dasar, yaitu antisimetri dan identitas Jacobi.

Berikut diberikan definisi dari *bracket* Lie dan aljabar Lie.

**Definisi 2.4.1** Diberikan ruang vektor $\mathfrak{g}$ atas lapangan $F$. Suatu pemetaan bilinear $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, (x, y) \mapsto [x, y]$ disebut *bracket* Lie pada $\mathfrak{g}$ jika dan hanya jika:

1. untuk setiap $x, y \in \mathfrak{g}$, berlaku $[x, y] = -[y, x]$,
2. untuk setiap $x, y, z \in \mathfrak{g}$, berlaku $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$.

Suatu ruang vektor yang dilengkapi dengan *bracket* Lie disebut sebagai aljabar Lie (Utama dkk., 2021).

Aljabar Lie banyak digunakan dalam berbagai cabang matematika dan fisika, khususnya dalam teori grup dan teori representasi. Selain itu, aljabar Lie juga muncul dalam kajian derivasi yaitu derivasi Lie (Basdouri dkk., 2023).

Berikut merupakan beberapa contoh aljabar Lie.

**Contoh 2.4.1** Diberikan ruang vektor $M_2(\mathbb{R})$. Didefinisikan operasi *bracket* Lie untuk setiap $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ sebagai $[X, Y] = XY - YX$. Akan ditunjukkan $X, Y, Z \in M_2(\mathbb{R})$ memenuhi sifat-sifat *bracket* Lie dan merupakan suatu aljabar Lie.

1. Untuk setiap $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$, berlaku $[X, Y] = -[Y, X]$

$$\begin{aligned}\Big[X, Y\Big] &= XY - YX \\ &= -YX + XY \\ &= -(YX - XY) \\ &= -[Y, X].\end{aligned}$$

2. Untuk setiap $X, Y, Z \in M_2(\mathbb{R})$, berlaku

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]].$$

i. Akan diselidiki $[X,[Y,Z]]$. Dari definisi *bracket* Lie, $[Y,Z] = YZ - ZY$, diperoleh:

$$\begin{aligned}[X,[Y,Z]] &= [X,(YZ-ZY)] \\ &= X(YZ-ZY) - (YZ-ZY)X \\ &= XYZ - XZY - YZX + ZYX.\end{aligned}$$

ii. Akan diselidiki $[[X,Y],Z]+[Y,[X,Z]]$. Dari definisi *bracket* Lie, diperoleh:

$$\begin{aligned}[[X,Y],Z]+[Y,[X,Z]] &= [(XY-YX),Z]+[Y,(XZ-ZX)] \\ &= ((XY-YX)Z - Z(XY-YX)) \\ &\quad + ((Y(XZ-ZX) - (XZ-ZX)Y)) \\ &= (XYZ - YXZ - ZXY + ZYX) \\ &\quad + (YXZ - YZX - XZY + ZXY) \\ &= XYZ + ZYX - YZX - XZY \\ &= XYZ - XZY - YZX + ZYX.\end{aligned}$$

Karena semua syarat terpenuhi, jadi terbukti $M_2(\mathbb{R})$ merupakan suatu aljabar Lie.

**Contoh 2.4.2** Diberikan ruang vektor $X, Y, Z \in M_2(\mathbb{R})$, dengan

$$X = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix},$$

untuk setiap $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$. Didefinisikan operasi *bracket* Lie untuk setiap $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ sebagai $[X,Y] = XY - YX$.

Akan ditunjukkan $X, Y, Z \in M_2(\mathbb{R})$ memenuhi sifat-sifat *bracket* Lie dan merupakan suatu aljabar Lie.

1. Untuk setiap $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$, berlaku $[X, Y] = -[Y, X]$

$$\begin{aligned}
\Big[X, Y\Big] &= \left[\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}\right] \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & b_1b_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2a_1 & 0 \\ 0 & b_2b_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1a_2 - a_2a_1 & 0 \\ 0 & b_1b_2 - b_2b_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
-\Big[Y, X\Big] &= -\left[\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}\right] \\
&= -\left(\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= -\left(\begin{bmatrix} a_2a_1 & 0 \\ 0 & b_2b_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & b_1b_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= -\left(\begin{bmatrix} a_2a_1 - a_1a_2 & 0 \\ 0 & b_2b_1 - b_1b_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} -a_2a_1 + a_1a_2 & 0 \\ 0 & -b_2b_1 + b_1b_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Jadi, $[X, Y] = -[Y, X]$.

2. Untuk setiap $X, Y, Z \in M_2(\mathbb{R})$, berlaku

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]].$$

i. Akan diselidiki $[X,[Y,Z]]$. Dari definisi *bracket* Lie, $[Y,Z]=YZ-ZY$, diperoleh:

$$\begin{aligned}
[X,[Y,Z]] &= \left[\begin{bmatrix}a_1 & 0\\ 0 & b_1\end{bmatrix}, \left[\begin{bmatrix}a_2 & 0\\ 0 & b_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a_3 & 0\\ 0 & b_3\end{bmatrix}\right]\right]\\
&= \left[\begin{bmatrix}a_1 & 0\\ 0 & b_1\end{bmatrix}, \left(\begin{bmatrix}a_2a_3 & 0\\ 0 & b_2b_3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}a_3a_2 & 0\\ 0 & b_3b_2\end{bmatrix}\right)\right]\\
&= \begin{bmatrix}a_1 & 0\\ 0 & b_1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}a_2a_3 & 0\\ 0 & b_2b_3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}a_3a_2 & 0\\ 0 & b_3b_2\end{bmatrix}\right)\\
&\quad - \left(\begin{bmatrix}a_2a_3 & 0\\ 0 & b_2b_3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}a_3a_2 & 0\\ 0 & b_3b_2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_1 & 0\\ 0 & b_1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}a_1 & 0\\ 0 & b_1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right) - \left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_1 & 0\\ 0 & b_1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

ii. Akan diselidiki $[[X,Y],Z]$. Dari definisi *bracket* Lie, $[X,Y]=XY-YX$, diperoleh:

$$\begin{aligned}
[[X,Y],Z] &= \left[\left[\begin{bmatrix}a_1 & 0\\ 0 & b_1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a_2 & 0\\ 0 & b_2\end{bmatrix}\right], \begin{bmatrix}a_3 & 0\\ 0 & b_3\end{bmatrix}\right]\\
&= \left[\left(\begin{bmatrix}a_1a_2 & 0\\ 0 & b_1b_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}a_2a_1 & 0\\ 0 & b_2b_1\end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix}a_3 & 0\\ 0 & b_3\end{bmatrix}\right]\\
&= \left(\begin{bmatrix}a_1a_2 & 0\\ 0 & b_1b_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}a_2a_1 & 0\\ 0 & b_2b_1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_3 & 0\\ 0 & b_3\end{bmatrix}\\
&\quad - \begin{bmatrix}a_3 & 0\\ 0 & b_3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}a_1a_2 & 0\\ 0 & b_1b_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}a_2a_1 & 0\\ 0 & b_2b_1\end{bmatrix}\right)\\
&= \left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_3 & 0\\ 0 & b_3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}a_3 & 0\\ 0 & b_3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)\\
&= \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

iii. Akan diselidiki $[Y,[X,Z]]$. Dari definisi *bracket* Lie, $[X,Z]=XZ-ZX$, diperoleh:

$$\begin{aligned}
[Y,[X,Z]] &= \left[\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, \left[\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix}\right]\right] \\
&= \left[\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, \left(\begin{bmatrix} a_1a_3 & 0 \\ 0 & b_1b_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_3a_1 & 0 \\ 0 & b_3b_1 \end{bmatrix}\right)\right] \\
&= \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a_3a_1 & 0 \\ 0 & b_3b_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1a_3 & 0 \\ 0 & b_1b_3 \end{bmatrix}\right) \\
&\quad - \left(\begin{bmatrix} a_3a_1 & 0 \\ 0 & b_3b_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1a_3 & 0 \\ 0 & b_1b_3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) - \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Jadi, $[X,[Y,Z]]=[[X,Y],Z]+[Y,[X,Z]]$.

**Contoh 2.4.3** Diberikan himpunan

$$L=\left\{\begin{bmatrix} j & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; j,k\in\mathbb{R}\right\}.$$

Misalkan

$$X=\begin{bmatrix} j_1 & k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y=\begin{bmatrix} j_2 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z=\begin{bmatrix} j_3 & k_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

untuk setiap $j_1,j_2,j_3,k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}$.

Didefinisikan operasi *bracket* Lie pada $L$ untuk setiap $X,Y\in L$ sebagai

$$[X,Y]=XY-YX.$$

Akan ditunjukkan bahwa $L$ dengan operasi *bracket* Lie tersebut merupakan suatu aljabar Lie.

1. Untuk setiap $X, Y \in L$, berlaku $[X, Y] = -[Y, X]$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= XY - YX \\
&= \begin{bmatrix} j_1 & k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_2 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j_2 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 & k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} j_1 j_2 & j_1 k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j_2 j_1 & j_2 k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} j_1 j_2 - j_2 j_1 & j_1 k_2 - j_2 k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & j_1 k_2 - j_2 k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

   Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
-[Y, X] &= -(YX - XY) \\
&= -\left( \begin{bmatrix} j_2 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 & k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j_1 & k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_2 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= -\left( \begin{bmatrix} j_2 j_1 & j_2 k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j_1 j_2 & j_1 k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= -\begin{bmatrix} j_2 j_1 - j_1 j_2 & j_2 k_1 - j_1 k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & j_1 k_2 - j_2 k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

   Jadi, diperoleh

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

2. Untuk setiap $X, Y, Z \in L$, berlaku

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]].$$

i. Akan diselidiki $[X,[Y,Z]]$.

Terlebih dahulu,

$$\begin{aligned}[Y,Z] &= YZ - ZY \\ &= \begin{bmatrix} j_2 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j_3 & k_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j_3 & k_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j_2 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} j_2j_3 & j_2k_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j_3j_2 & j_3k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & j_2k_3 - j_3k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}[X,[Y,Z]] &= X[Y,Z] - [Y,Z]X \\ &= \begin{bmatrix} j_1 & k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & j_2k_3 - j_3k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & j_2k_3 - j_3k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j_1 & k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & j_1(j_2k_3 - j_3k_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & j_1j_2k_3 - j_1j_3k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

ii. Akan diselidiki $[[X,Y],Z]$.

Terlebih dahulu,

$$\begin{aligned}[X,Y] &= XY - YX \\ &= \begin{bmatrix} j_1 & k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j_2 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j_2 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j_1 & k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & j_1k_2 - j_2k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}[[X,Y],Z] &= [X,Y]Z - Z[X,Y] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & j_1k_2 - j_2k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_3 & k_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j_3 & k_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & j_1k_2 - j_2k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & j_3(j_1k_2 - j_2k_1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -j_3j_1k_2 + j_3j_2k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

iii. Akan diselidiki $[Y,[X,Z]]$.

Terlebih dahulu,

$$\begin{aligned}[X,Z] &= XZ - ZX \\ &= \begin{bmatrix} j_1 & k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_3 & k_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j_3 & k_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 & k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & j_1k_3 - j_3k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}[Y,[X,Z]] &= Y[X,Z] - [X,Z]Y \\ &= \begin{bmatrix} j_2 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & j_1k_3 - j_3k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & j_1k_3 - j_3k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_2 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & j_2(j_1k_3 - j_3k_1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & j_1j_2k_3 - j_2j_3k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$[[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]] = \begin{bmatrix} 0 & -j_3j_1k_2 + j_3j_2k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & j_1j_2k_3 - j_2j_3k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -j_1j_3k_2 + j_2j_3k_1 + j_1j_2k_3 - j_2j_3k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & j_1j_2k_3 - j_1j_3k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena

$$[X,[Y,Z]] = \begin{bmatrix} 0 & j_1j_2k_3 - j_1j_3k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]].$$

Jadi, $L$ dengan operasi *bracket* Lie $[X,Y] = XY - YX$ merupakan suatu aljabar Lie.

**Contoh 2.4.4** Diberikan himpunan

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} t & y \\ 0 & k \end{bmatrix} \;\middle|\; t,y,k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Misalkan

$$X = \begin{bmatrix} t_1 & y_1 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} t_2 & y_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} t_3 & y_3 \\ 0 & k_3 \end{bmatrix},$$

untuk setiap $t_1, t_2, t_3, y_1, y_2, y_3, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$.

Didefinisikan operasi *bracket* Lie pada $L$ untuk setiap $X, Y \in L$ sebagai

$$[X,Y] = XY - YX.$$

Akan ditunjukkan bahwa $L$ dengan operasi *bracket* Lie tersebut merupakan suatu aljabar Lie.

1. Untuk setiap $X, Y \in L$, berlaku

$$[X,Y] = -[Y,X].$$

Diperoleh

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= XY - YX \\
&= \begin{bmatrix} t_1 & y_1 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_2 & y_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_2 & y_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & y_1 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} t_1t_2 & t_1y_2 + y_1k_2 \\ 0 & k_1k_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_2t_1 & t_2y_1 + y_2k_1 \\ 0 & k_2k_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} t_1t_2 - t_2t_1 & t_1y_2 + y_1k_2 - t_2y_1 - y_2k_1 \\ 0 & k_1k_2 - k_2k_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & t_1y_2 + y_1k_2 - t_2y_1 - y_2k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$[X,Y] = \begin{bmatrix} 0 & t_1y_2 + y_1k_2 - t_2y_1 - y_2k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.4.1}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
-[Y,X] &= -(YX - XY) \\
&= -\left( \begin{bmatrix} t_2 & y_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & y_1 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_1 & y_1 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_2 & y_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \right) \\
&= -\left( \begin{bmatrix} t_2t_1 & t_2y_1 + y_2k_1 \\ 0 & k_2k_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_1t_2 & t_1y_2 + y_1k_2 \\ 0 & k_1k_2 \end{bmatrix} \right) \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & t_2y_1 + y_2k_1 - t_1y_2 - y_1k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & t_1y_2 + y_1k_2 - t_2y_1 - y_2k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$-[Y,X] = \begin{bmatrix} 0 & t_1y_2 + y_1k_2 - t_2y_1 - y_2k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.4.2}$$

Jadi, berdasarkan (2.4.1) dan (2.4.2), diperoleh

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

2. Untuk setiap $X, Y, Z \in L$, berlaku

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]].$$

i. Akan diselidiki $[X, [Y, Z]]$.

Terlebih dahulu,

$$\begin{aligned}
[Y, Z] &= YZ - ZY \\
&= \begin{bmatrix} t_2 & y_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_3 & y_3 \\ 0 & k_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_3 & y_3 \\ 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_2 & y_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} t_2t_3 & t_2y_3 + y_2k_3 \\ 0 & k_2k_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_3t_2 & t_3y_2 + y_3k_2 \\ 0 & k_3k_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & t_2y_3 + y_2k_3 - t_3y_2 - y_3k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Misalkan

$$\alpha = t_2y_3 + y_2k_3 - t_3y_2 - y_3k_2.$$

Sehingga

$$[Y, Z] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
[X, [Y, Z]] &= X[Y, Z] - [Y, Z]X \\
&= \begin{bmatrix} t_1 & y_1 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & y_1 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & t_1\alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \alpha k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & (t_1 - k_1)\alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Jadi,

$$[X,[Y,Z]] = \begin{bmatrix} 0 & (t_1-k_1)(t_2y_3+y_2k_3-t_3y_2-y_3k_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (2.4.3)$$

ii. Akan diselidiki $[[X,Y],Z]$.

Terlebih dahulu,

$$\begin{aligned} [X,Y] &= XY - YX \\ &= \begin{bmatrix} 0 & t_1y_2+y_1k_2-t_2y_1-y_2k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Misalkan

$$\beta = t_1y_2+y_1k_2-t_2y_1-y_2k_1.$$

Sehingga

$$[X,Y] = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} [[X,Y],Z] &= [X,Y]Z - Z[X,Y] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_3 & y_3 \\ 0 & k_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_3 & y_3 \\ 0 & k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \beta k_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & t_3\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & (k_3-t_3)\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jadi,

$$[[X,Y],Z] = \begin{bmatrix} 0 & (k_3-t_3)(t_1y_2+y_1k_2-t_2y_1-y_2k_1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (2.4.4)$$

iii. Akan diselidiki $[Y,[X,Z]]$.

Terlebih dahulu,

$$\begin{aligned}[X,Z] &= XZ - ZX \\ &= \begin{bmatrix} 0 & t_1y_3 + y_1k_3 - t_3y_1 - y_3k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Misalkan

$$\gamma = t_1y_3 + y_1k_3 - t_3y_1 - y_3k_1.$$

Sehingga

$$[X,Z] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}[Y,[X,Z]] &= Y[X,Z] - [X,Z]Y \\ &= \begin{bmatrix} t_2 & y_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_2 & y_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & t_2\gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \gamma k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & (t_2 - k_2)\gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Jadi,

$$[Y,[X,Z]] = \begin{bmatrix} 0 & (t_2 - k_2)(t_1y_3 + y_1k_3 - t_3y_1 - y_3k_1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.4.5}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}[[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]] &= \begin{bmatrix} 0 & (k_3 - t_3)\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (t_2 - k_2)\gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & (k_3 - t_3)\beta + (t_2 - k_2)\gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$[[X,Y],Z]+[Y,[X,Z]] = \begin{bmatrix} 0 & (k_3-t_3)\beta+(t_2-k_2)\gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.4.6}$$

Dengan mensubstitusikan nilai $\beta$ dan $\gamma$, diperoleh

$$\begin{aligned}(k_3-t_3)\beta+(t_2-k_2)\gamma &= (k_3-t_3)(t_1y_2+y_1k_2-t_2y_1-y_2k_1) \\ &\quad +(t_2-k_2)(t_1y_3+y_1k_3-t_3y_1-y_3k_1) \\ &= (t_1-k_1)(t_2y_3+y_2k_3-t_3y_2-y_3k_2).\end{aligned}$$

Jadi diperoleh,

$$[[X,Y],Z]+[Y,[X,Z]] = \begin{bmatrix} 0 & (t_1-k_1)(t_2y_3+y_2k_3-t_3y_2-y_3k_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.4.7}$$

Jadi, berdasarkan (2.4.3) dan (2.4.7), diperoleh

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z]+[Y,[X,Z]].$$

Dengan demikian, $L$ dengan operasi *bracket* Lie $[X,Y] = XY - YX$ merupakan suatu aljabar Lie.

**Contoh 2.4.5** Diberikan himpunan

$$L = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax+b,\ a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Dari Contoh 2.3.2 telah ditujukkan bahwa $L$ merupakan ruang vektor.

Diberikan sebarang

$$f(x) = a_1x+b_1, \quad g(x) = a_2x+b_2, \quad h(x) = a_3x+b_3,$$

untuk setiap $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

Didefinisikan operasi *bracket* Lie pada $L$ untuk setiap $f, g \in L$ sebagai

$$[f,g](x) = 0.$$

Akan ditunjukkan bahwa $L$ dengan operasi *bracket* Lie tersebut merupakan suatu aljabar Lie.

1. Untuk setiap $f, g \in L$, berlaku $[f, g](x) = -[g, f](x)$.

   Diperoleh

   $$[f, g](x) = 0.$$

   Di sisi lain,

   $$\begin{aligned} -[g, f](x) &= -0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Jadi, diperoleh

   $$[f, g](x) = -[g, f](x).$$

2. Untuk setiap $f, g, h \in L$, berlaku

   $$[f, [g, h]](x) = [[f, g], h](x) + [g, [f, h]](x).$$

   i. Dari ruas kiri diperoleh

   $$[f, [g, h]](x) = [f, 0](x) = 0$$

   .

   ii. Dari ruas kanan diperoleh

   $$\begin{aligned} [[f, g], h](x) + [g, [f, h]](x) &= [0, h](x) + [g, 0](x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

   sehingga diperoleh

   $$[f, [g, h]](x) = [[f, g], h](x) + [g, [f, h]](x).$$

Jadi, $L$ dengan operasi *bracket* Lie $[f, g] = 0$ merupakan suatu aljabar Lie.

Selanjutnya diberikan definisi jumlah langsung (*direct sum*) pada aljabar Lie.

**Definisi 2.4.2** Diberikan aljabar Lie $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_n$ atas lapangan $F$. Jumlah langsung (*direct sum*) dari aljabar-aljabar tersebut adalah himpunan

$$\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n$$

yang terdiri atas semua elemen berbentuk $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dengan $x_i \in \mathcal{L}_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$. Operasi *bracket* pada jumlah langsung didefinisikan secara komponen, yaitu

$$[(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)] = ([x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n]).$$

Dengan definisi tersebut, $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n$ merupakan aljabar Lie (Humphreys, 1972).

Berikut diberikan contoh jumlahan langsung.

**Contoh 2.4.6** Misalkan $\mathfrak{g}_1$ dan $\mathfrak{g}_2$ adalah dua aljabar Lie atas lapangan $F$, dengan

$$\mathfrak{g}_1 = \text{span}\{e_1\}, \qquad \mathfrak{g}_2 = \text{span}\{e_2\},$$

dan *bracket* pada masing-masing aljabar Lie didefinisikan, yaitu

$$[e_1, e_1] = 0, \qquad [e_2, e_2] = 0.$$

Diperoleh jumlah langsung dari $\mathfrak{g}_1$ dan $\mathfrak{g}_2$ adalah

$$\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 = \{(ae_1, be_2) \mid a, b \in F\}.$$

Operasi *bracket* pada $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ didefinisikan secara komponen. Untuk sebarang

$$(ae_1, be_2),\ (ce_1, de_2) \in \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2,$$

diperoleh

$$[(ae_1, be_2), (ce_1, de_2)] = ([ae_1, ce_1], [be_2, de_2]) = (0, 0).$$

Jadi, $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ merupakan aljabar Lie Abel berdimensi 2.

Karena semua sifat-sifat *bracket* Lie terpenuhi, jadi terbukti $X, Y, Z \in M_2(\mathbb{R})$ merupakan suatu aljabar Lie dengan *bracket* Lie yang didefiniskan dengan $[X, Y] = XY - YX$ untuk setiap $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$.

Sama seperti pada struktur aljabar lainnya, suatu aljabar Lie dapat memiliki himpunan bagian yang juga membentuk aljabar Lie dengan menggunakan operasi *bracket* Lie yang sama. Dalam kajian aljabar Lie dikenal beberapa konsep penting, antara lain subaljabar Lie, ideal, dan homomorfisma Lie.

Berikut diberikan definisi subaljabar Lie dan ideal Lie.

**Definisi 2.4.3** Diberikan $\mathfrak{h}$ yang merupakan suatu subruang dari aljabar Lie $\mathfrak{g}$. Subruang $\mathfrak{h}$ disebut subaljabar Lie dari $\mathfrak{g}$ jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in \mathfrak{h}$ berlaku

$$[x, y] \in \mathfrak{h}.$$

Selanjutnya, $\mathfrak{h}$ disebut ideal dari $\mathfrak{g}$ jika dan hanya jika untuk setiap $x \in \mathfrak{h}$ dan setiap $y \in \mathfrak{g}$ berlaku

$$[x, y] \in \mathfrak{h}.$$

(Utama dkk., 2021)

Berikut ini disajikan contoh subaljabar Lie

**Contoh 2.4.7** Diberikan

$$\mathfrak{g} = GL(2, \mathbb{R}),$$

yaitu aljabar Lie dari semua matriks real berordo $2 \times 2$ dengan *bracket* Lie

$$[A, B] = AB - BA.$$

Didefinisikan

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \;\middle|\; a, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Akan ditunjukkan $\mathfrak{h}$ merupakan subaljabar Lie $\mathfrak{g}$.

1. Diberikan $A \in \mathfrak{h}$ dengan $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, untuk setiap $a, d \in \mathbb{R}$. Karena $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{h}$, diperoleh $\mathfrak{h} \neq \varnothing$.

2. Diberikan sebarang $A, B \in \mathfrak{h}$, dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}.$$

Berlaku

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{h}.$$

3. Diberikan $\lambda \in \mathbb{R}$ dan $A \in \mathfrak{h}$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix},$$

berlaku

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & 0 \\ 0 & \lambda d \end{bmatrix} \in \mathfrak{h}.$$

4. Diberikan sebarang $A, B \in \mathfrak{h}$, dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}.$$

Berlaku,

$$\begin{aligned} [A, B] &= AB - BA \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & d_1 d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 a_1 & 0 \\ 0 & d_2 d_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{h}. \end{aligned}$$

Karena $\mathfrak{h}$ merupakan subruang dan tertutup terhadap *bracket* Lie, jadi $\mathfrak{h}$ merupakan subaljabar Lie dari $GL(2, \mathbb{R})$.

Selanjutnya diberikan contoh ideal Lie.

**Contoh 2.4.8** Diberikan

$$\mathfrak{g} = GL(2, \mathbb{R}),$$

yaitu aljabar Lie dari semua matriks real berordo $2 \times 2$ dengan *bracket* Lie

$$[A, B] = AB - BA.$$

Didefinisikan

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathfrak{h}$ merupakan ideal Lie dari $\mathfrak{g}$.

1. Diberikan $A \in \mathfrak{h}$ dengan

   $$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \text{untuk setiap } a \in \mathbb{R}.$$

   Karena $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{h}$, diperoleh $\mathfrak{h} \neq \varnothing$.

2. Diberikan sebarang $A, B \in \mathfrak{h}$, dengan

   $$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}.$$

   Berlaku

   $$A + B = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & a_1 + a_2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{h}.$$

3. Diberikan $\lambda \in \mathbb{R}$ dan $A \in \mathfrak{h}$, dengan

   $$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

   Berlaku

   $$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & 0 \\ 0 & \lambda a \end{bmatrix} \in \mathfrak{h}.$$

4. Diberikan sebarang

$$x \in \mathfrak{h}, \quad y \in \mathfrak{g},$$

dengan

$$x = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $[x, y] \in \mathfrak{h}$.

$$\begin{aligned} [x, y] &= xy - yx \\ &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ay_1 & ay_2 \\ ay_3 & ay_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ay_1 & ay_2 \\ ay_3 & ay_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{h}. \end{aligned}$$

Karena $\mathfrak{h}$ merupakan subruang dari $\mathfrak{g}$, dan memenuhi untuk setiap $x \in \mathfrak{h}$ dan setiap $y \in \mathfrak{g}$ berlaku

$$[x, y] \in \mathfrak{h}.$$

Jadi $\mathfrak{h}$ merupakan ideal Lie dari $GL(2, \mathbb{R})$.

Selanjutnya diberikan definisi homomorfisma Lie.

**Definisi 2.4.4** Diberikan aljabar Lie $\mathfrak{g}$ dan $\mathfrak{g}'$ dengan *bracket* Lie masing-masing $[\cdot, \cdot]$ dan $[\cdot, \cdot]'$. Suatu pemetaan $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ disebut homomorfisma Lie jika untuk setiap $x, y \in \mathfrak{g}$ berlaku

$$\pi([x, y]) = [\pi(x), \pi(y)]'.$$

(Utama dkk., 2021).

Berikut diberikan contoh homomorfisma Lie.

**Contoh 2.4.9** Diberikan aljabar Lie

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}),$$

dengan *bracket* Lie didefinisikan oleh

$$[A, B] = AB - BA.$$

Didefinisikan

$$\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}', \quad \pi(A) = A.$$

Akan ditunjukkan $\pi([A, B]) = [\pi(A), \pi(B)]'$.

Diberikan sebarang $A, B \in \mathfrak{g}$, jadi

$$\begin{aligned} \pi([A, B]) &= \pi(AB - BA) \\ &= \pi(AB) - \pi(BA) \\ &= AB - BA, \end{aligned}$$

di sisi lain,

$$[\pi(A), \pi(B)]' = [A, B]'$$

Karena $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ dengan *bracket* Lie yang sama, sehingga

$$[A, B]' = [A, B] = AB - BA.$$

Dengan demikian,

$$\pi([A, B]) = [\pi(A), \pi(B)]'.$$

Oleh karena itu, $\pi$ merupakan homomorfisma Lie.

Secara umum, operasi *bracket* dalam aljabar Lie dapat memiliki berbagai bentuk tergantung pada struktur aljabarnya. Misalnya, Hom–Lie *bracket* merupakan perubahan bentuk dari *bracket* klasik yang diperkenalkan untuk memperluas konsep aljabar Lie (Makhlouf & Silvestrov, 2008).

Berikut diberikan definisi Hom-Lie *bracket*.

**Definisi 2.4.5** Diberikan Hom-Lie aljabar

$$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \alpha),$$

dengan:

1. $\mathfrak{g}$ ruang vektor,
2. $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ adalah Hom-Lie *bracket*,
3. $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ adalah pemetaan linear,

yang memenuhi:

1. $[x, y] = -[y, x]$, untuk setiap $x, y \in \mathfrak{g}$.
2. $[\alpha(x), [y, z]] + [\alpha(y), [z, x]] + [\alpha(z), [x, y]] = 0$, untuk setiap $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Jika $\alpha = \mathrm{id}$ (identitas), maka diperoleh aljabar Lie biasa (Makhlouf & Silvestrov, 2008).

Berikut merupakan contoh Hom-Lie *bracket*.

**Contoh 2.4.10** Diberikan $\mathbb{R}^3$ dengan hasil kali titik $x \times y$. Untuk suatu skalar tetap $k \in \mathbb{R}$, didefinisikan pemetaan linear

$$\alpha : g \to g, \qquad \alpha(x) = k\, x,$$

dan didefinisikan Hom-Lie *bracket*

$$[x, y]_\alpha \;=\; \alpha(x \times y) \;=\; k\,(x \times y), \qquad \forall\, x, y \in g.$$

Akan ditunjukkan bahwa $(g, [\cdot,\cdot]_\alpha, \alpha)$ adalah aljabar Lie dengan Hom-Lie *bracket*, yaitu memenuhi bilinear, antisimetri, dan Hom-Jacobi.

1. Akan ditunjukkan untuk $a, b \in \mathbb{R}$ dan $x, x', y \in g$ berlaku sifat linear kiri dan kanan, yaitu

   a. $[ax + bx', y]_\alpha = a[x, y]_\alpha + b[x', y]_\alpha$.

$$\begin{aligned}
[ax + bx', y]_\alpha &= \alpha((ax + bx') \times y) \\
&= k((ax + bx') \times y) \\
&= k(a(x \times y) + b(x' \times y)) \\
&= ka(x \times y) + kb(x' \times y) \\
&= a[x, y]_k + b[x', y]_k \\
&= a[x, y]_\alpha + b[x', y]_\alpha.
\end{aligned}$$

   b. $[x, ay + by']_\alpha = a[x, y]_\alpha + b[x, y']_\alpha$.

$$\begin{aligned}
[x, ay + by']_\alpha &= \alpha(x \times (ay + by')) \\
&= k(x \times (ay + by')) \\
&= k(a(x \times y) + b(x \times y')) \\
&= ka(x \times y) + kb(x \times y') \\
&= a[x, y]_k + b[x, y']_k \\
&= a[x, y]_\alpha + b[x, y']_\alpha.
\end{aligned}$$

   Jadi $[\cdot, \cdot]_\alpha$ bilinear.

2. Akan ditunjukkan untuk setiap $x, y \in g$, berlaku $[x, y]_\alpha = -[y, x]_\alpha$.

$$\begin{aligned}
[x, y]_\alpha &= k(x \times y) \\
&= \alpha(x \times y) \\
&= \alpha(-(y \times x)) \\
&= -[y, x]_\alpha.
\end{aligned}$$

   Jadi antisimetri terpenuhi.

3. Akan ditunjukkan untuk setiap $x, y, z \in g$, berlaku $[\alpha(x), [y, z]_\alpha]_\alpha + [\alpha(y), [z, x]_\alpha]_\alpha + [\alpha(z), [x, y]_\alpha]_\alpha = 0$.

$$
\begin{aligned}
&[\alpha(x), [y, z]_\alpha]_\alpha + [\alpha(y), [z, x]_\alpha]_\alpha + [\alpha(z), [x, y]_\alpha]_\alpha \\
&= [(kx), k(y \times z)]_\alpha + [(ky), k(z \times x)]_\alpha + [(kz), k(x \times y)]_\alpha \\
&= k((kx) \times (k(y \times z))) + k((ky) \times (k(z \times x))) + k((kz) \times (k(x \times y))) \\
&= k(k(x \times (k(y \times z)))) + k(k(y \times (k(z \times x)))) + k(k(z \times (k(x \times y)))) \\
&= k(k^2(x \times (y \times z))) + k(k^2(y \times (z \times x))) + k(k^2(z \times (x \times y))) \\
&= k^3(x \times (y \times z)) + k^3(y \times (z \times x)) + k^3(z \times (x \times y)) \\
&= k^3\big((x \times (y \times z)) + (y \times (z \times x)) + (z \times (x \times y))\big) \\
&= k^3\big(((x \cdot z)y - (x \cdot y)z) + ((y \cdot x)z - (y \cdot z)x) + ((z \cdot y)x - (z \cdot x)y)\big) \\
&= k^3\big((x \cdot z)y - (z \cdot x)y - (x \cdot y)z + (y \cdot x)z - (y \cdot z)x + (z \cdot y)x\big) \\
&= k^3(0) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Karena bilinear, antisimetri, dan Hom-Jacobi terpenuhi, jadi $(\mathbb{R}^3, [\cdot, \cdot]_\alpha, \alpha)$ adalah aljabar Lie dengan *bracket* Hom-Lie atau dikenal sebagai Hom-Lie aljabar. Dengan catatan $k \neq 0, 1$, jika $k = 1$, maka $[x, y]_\alpha = x \times y$ dan $\alpha = \mathrm{id}$ (identitas), sehingga akan kembali pada aljabar Lie klasik $(\mathbb{R}^3, \times)$.

## 2.5 Derivasi

Derivasi adalah konsep yang telah lama dipelajari. Dari waktu ke waktu, derivasi terbukti memiliki berbagai aplikasi penting karena kaitannya yang erat dengan struktur ring serta kemampuannya untuk mengungkapkan banyak sifat dari struktur lainnya, seperti aljabar, aljabar Lie, dan lainnya.

**Definisi 2.5.1** Dalam suatu ring $R$, jika didefinisikan suatu pemetaan $d : R \to R$ yang memenuhi:

1. $d(a + b) = d(a) + d(b)$;
2. $d(ab) = d(a)b + ad(b)$, untuk setiap $a, b \in R$,

maka pemetaan tersebut disebut sebagai derivasi pada ring $R$ (Ali dkk., 2024).

Berikut akan dijelaskan mengenai contoh derivasi.

**Contoh 2.5.1** Diberikan ring $A,\ B \in M_2(\mathbb{Z})$, dengan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$B = \begin{bmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan $a,\ b,\ m,\ n \in \mathbb{Z}$. Didefinisikan pemetaan $d : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z})$, dengan

$$d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Akan diselidiki $d$ merupakan derivasi pada $M_2(\mathbb{Z})$.

1. Akan ditunjukkan $d(A + B) = d(A) + d(B)$

$$\begin{aligned} d(A+B) &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a+m & b+n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(b+n) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -b-n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= d(A) + d(B). \end{aligned}$$

2. Akan ditunjukkan $d(AB) = d(A)B \ + \ Ad(B)$

$$\begin{aligned} d(AB) &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} am & an \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -an \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} d(A)B + Ad(B) &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -an \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -an \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Karena (1) dan (2) terpenuhi, jadi $d$ merupakan derivasi pada $M_2(\mathbb{Z})$.

## 2.6 Derivasi *Inner*

Pada bagian ini akan dibahas terkait dengan derivasi *inner* pada aljabar Lie.

**Definisi 2.6.1** Diberikan suatu aljabar Lie $\mathfrak{g}$ atas ruang vektor $V$. Suatu pemetaan $ad_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, untuk setiap $x, \ y \in \mathfrak{g}$ yang didefinisikan dengan

$$ad_x(y) = [x, \ y] = xy - yx$$

disebut derivasi *inner* (Utama dkk., 2021).

Berikut ini merupakan contoh derivasi *inner* pada aljabar Lie.

**Contoh 2.6.1** Diberikan ring $M_2(\mathbb{C})$ dan $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Dapat didefinisikan derivasi *inner* $d_X(A)$ sebagai:

$$\begin{aligned} d_X(A) &= XA - AX \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (ae+bg)-(ea+fc) & (af+bh)-(eb+fd) \\ (ce+dg)-(ga+hc) & (cf+dh)-(gb+hd) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Berikut diberikan contoh penerapan definisi derivasi *inner* pada aljabar Lie $M_2(\mathbb{C})$.

**Contoh 2.6.2** Pilih aljabar Lie $M_2(\mathbb{C})$ dengan komutator. Diberikan

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Derivasi *inner* yang ditentukan oleh $X$ diberikan oleh

$$d_X(A) = [X, A] = XA - AX,$$

sehingga

$$XA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix},$$

dan

$$AX = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh

$$d_X(A) = XA - AX = \begin{bmatrix} 13-3 & -2-6 \\ 5-5 & -1-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, $d_X$ merupakan derivasi *inner* pada $M_2(\mathbb{C})$.

## 2.7 Homoderivasi pada Ring

Homoderivasi memiliki aplikasi penting dalam teori aljabar dan analisis matematis, khususnya dalam memodelkan fenomena yang lebih kompleks daripada yang dijelaskan oleh derivasi tunggal. Konsep ini memiliki hubungan erat dengan struktur aljabar non-assosiatif. Berikut adalah definisi homoderivasi yang lebih mendalam.

**Definisi 2.7.1** Homoderivasi adalah pemetaan aditif yang berinteraksi dengan operasi perkalian dalam ring (Alharfie & Muthana, 2019). Homoderivasi pada ring $R$ adalah pemetaan aditif $h : R \to R$ yang memenuhi persamaan:

$$h(xy) = h(x)h(y) + h(x)y + xh(y), \text{ untuk setiap } x,\ y\ \in R.$$

Dalam hal ini, homoderivasi memperluas konsep derivasi, yang biasanya hanya menyatakan $d(xy) = d(x)y + xd(y)$. Oleh karena itu, homoderivasi mencakup elemen-elemen yang lebih kompleks dalam menjelaskan hubungan antara elemen-elemen dalam ring. Jika $h(x)h(y) = 0\ \forall x,\ y \in R$, maka homoderivasi $h$ akan menjadi derivasi (Melaibari dkk., 2016).

**Contoh 2.7.1** Diberikan ring $M_2(\mathbb{R})$. Didefinisikan $h : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, dengan

$$h\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}.$$

Akan diselidiki $h$ merupakan homoderivasi pada $M_2(\mathbb{R})$.

Diberikan sebarang $A,\ B \in M_2(\mathbb{R})$, dengan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dan

$$B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

dengan $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$.

1. Akan ditunjukkan $h(A+B) = h(A) + h(B)$

$$\begin{aligned} h(A+B) &= h\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \\ &= h\left(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(d+h) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -d-h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -h \end{bmatrix} \\ &= h(A) + h(B). \end{aligned}$$

2. Akan ditunjukkan sifat homoderivasi, yaitu $h(AB) = h(A)h(B) + h(A)B + Ah(B)$

$$\begin{aligned} h(AB) &= h\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \\ &= h\left(\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(cf+dh) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} h(A)h(B) + h(A)B + Ah(B) = {} & h\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) h\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) + h\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \\ & \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} h\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \\ = {} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & dh \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -dg & -dh \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -bh \\ 0 & -dh \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -bh \\ -dg & -dh \end{bmatrix}.$$

Karena tidak terpenuhi, jadi $h$ bukan merupakan homoderivasi pada $M_2(\mathbb{R})$.

Berikut ini diberikan contoh homoderivasi pada ring.

**Contoh 2.7.2** Diberikan ring

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Didefinisikan $h : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z})$, dengan

$$h\left( \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}.$$

Akan diselidiki $h$ merupakan homoderivasi pada $M$.

Diberikan sebarang $A,\ B \in M$, dengan

$$A = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

dan

$$B = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$$

dengan $j,\ k,\ r,\ p \in \mathbb{Z}$.

1. Akan ditunjukkan $h(A + B) = h(A) + h(B)$

$$h(A + B) = h\left( \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \right)$$
$$= h\left( \begin{bmatrix} j + r & 0 \\ 0 & k + p \end{bmatrix} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(k+p) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k-p \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -p \end{bmatrix} \\
&= h(A) + h(B).
\end{aligned}
$$

2. Akan ditunjukkan sifat homoderivasi, yaitu $h(AB) = h(A)h(B) + h(A)B + Ah(B)$

$$
\begin{aligned}
h(AB) &= h\left( \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \right) \\
&= h\left( \begin{bmatrix} jr & 0 \\ 0 & kp \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -kp \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Di sisi lain,

$$
\begin{aligned}
h(A)h(B) + h(A)B + Ah(B) &= h\left( \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \right) h\left( \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \right) + h\left( \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \right) \\
&\quad \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} h\left( \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -p \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & kp \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -kp \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -kp \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -kp \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Karena 1 dan 2 terpenuhi, jadi $h$ merupakan homoderivasi pada $M$.

## 2.8 Derivasi Lie

Selanjutnya akan dibahas lebih lanjut mengenai derivasi Lie, yaitu sebuah pemetaan linear pada suatu aljabar Lie yang memenuhi kondisi tertentu.

**Definisi 2.8.1** Diberikan aljabar Lie $\mathfrak{g}$. Suatu pemetaan aditif $d : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ disebut derivasi Lie jika memenuhi:

$$d[a,\ b] = [d(a),\ b] + [a,\ d(b)],$$

untuk setiap $a,\ b \in \mathfrak{g}$ (Utama dkk., 2021).

**Contoh 2.8.1** Diberikan aljabar Lie $M_2(\mathbb{Z})$, didefinisikan pemetaan

$$d : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}),$$

dengan

$$d(A) = [B,\ A] = BA - AB,$$

untuk suatu $B \in M_2(\mathbb{R})$.

Akan diselidiki $d$ merupakan derivasi Lie dengan *bracket* Lie yang didefinisikan sebagai

$$[A,\ C] = AC - CA.$$

$d$ dikatakan derivasi Lie jika untuk setiap $A,\ C \in M_2(\mathbb{R})$, memenuhi:

$$d([A,\ C]) = [d(A),\ C] + [A,\ d(C)].$$

Diberikan sebarang $A,\ C \in M_2(\mathbb{R})$.

Akan ditunjukkan $d([A,\ C]) = [d(A),\ C] + [A,\ d(C)]$

$$\begin{aligned} d([A,\ C]) &= d([AC - CA]) \\ &= [B,\ (AC - CA)] \\ &= B(AC - CA) - (AC - CA)B \\ &= BAC - BCA - ACB + CAB. \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
[d(A),\ C] + [A,\ d(C)] &= [(BA - AB),\ C] + [A,\ (BC - CB)] \\
&= ((BA - AB)C - C(BA - AB)) \\
&\quad + (A(BC - CB) - (BC - CB)A) \\
&= (BAC - ABC - CBA + CAB) \\
&\quad + (ABC - ACB - BCA + CBA) \\
&= BAC - ABC - CBA + CAB \\
&\quad + ABC - ACB - BCA + CBA \\
&= BAC - ABC - CBA + CAB \\
&\quad + ABC - ACB - BCA + CBA \\
&= BAC + CAB - ACB - BCA \\
&= BAC - BCA - ACB + CAB.
\end{aligned}$$

Karena telah ditunjukkan bahwa

$$d([A,\ C]) = [d(A),\ C] + [A,\ d(C)].$$

Jadi, terbukti $d$ merupakan derivasi Lie.

# BAB III

# METODE PENELITIAN

## 3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

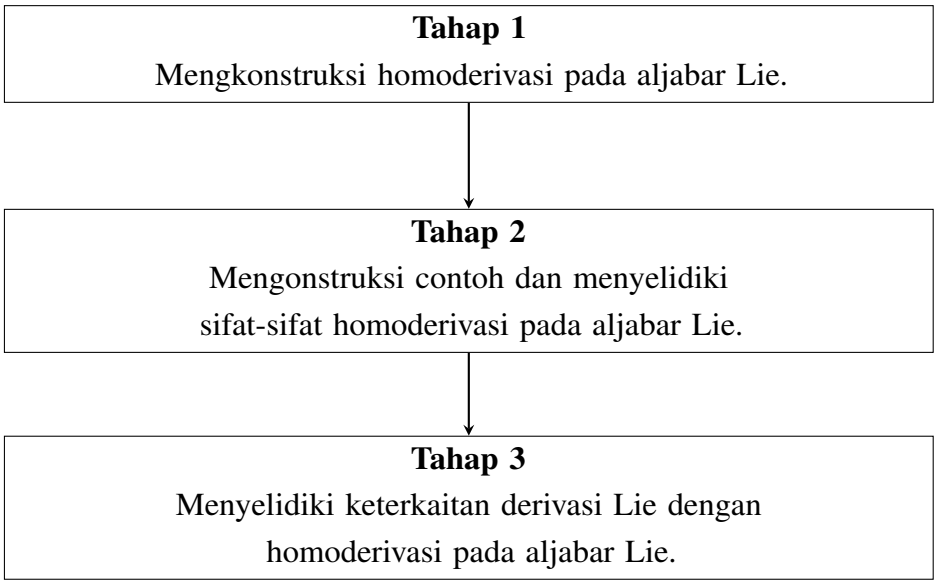
Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 di Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamat di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

## 3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur dan analisis teoritis, dengan mengumpulkan referensi seperti jurnal, artikel ilmiah, buku, dan sumber lainnya yang terkait dengan penelitian ini. Secara umum langkah-langkah penelitian ini sebagai berikut:

1. mempelajari materi terkait operasi komutator *bracket* Lie, aljabar Lie, teori ring, derivasi, derivasi Lie, dan homoderivasi;
2. mengonstruksi homoderivasi pada aljabar Lie;
3. mengonstruksi contoh dan menyelidiki sifat-sifat homoderivasi pada aljabar Lie;
4. menyelidiki hubungan derivasi Lie dan homoderivasi pada aljabar Lie;.

Diagram langkah-langkah penelitian dapat dilihat pada Gambar 3.1:




Gambar 3.1 Langkah-langkah penelitian.

# BAB V

# KESIMPULAN DAN SARAN

## 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, homoderivasi pada aljabar Lie merupakan pengembangan dari konsep derivasi Lie dengan tetap memperhatikan struktur *bracket* Lie, khususnya komutator $[a, b] = ab - ba$. Penelitian ini menunjukkan beberapa sifat homoderivasi pada aljabar Lie yang disertai dengan pembuktian dan contoh. Di antaranya, penjumlahan dua homoderivasi pada aljabar Lie yang saling ortogonal kembali menghasilkan homoderivasi pada aljabar Lie. Selain itu, diperoleh bahwa struktur yang terbentuk dari himpunan homoderivasi pada aljabar Lie memiliki keteraturan tertentu yang berkaitan dengan struktur aljabar Lie itu sendiri.

Penelitian ini juga menunjukkan bahwa setiap derivasi Lie merupakan homoderivasi pada aljabar Lie, tetapi belum tentu sebaliknya. Dengan demikian, homoderivasi pada aljabar Lie dapat dipandang sebagai generalisasi dari derivasi Lie. Hubungan tersebut berlaku apabila terpenuhi kondisi-kondisi tertentu yang telah dianalisis dalam penelitian ini.

## 5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian yang telah diperoleh, disarankan agar penelitian selanjutnya dapat memperluas kajian homoderivasi pada kelas aljabar Lie yang lebih khusus, sehingga diperoleh karakterisasi yang lebih spesifik. Selain itu, kajian homoderivasi pada aljabar Lie juga dapat dikembangkan pada struktur *bracket* Lie yang lebih umum untuk melihat kemungkinan munculnya sifat-sifat baru. Penelitian lebih lanjut juga dapat meninjau hubungan homoderivasi pada aljabar Lie dengan konsep lain seperti semi-derivasi, Jordan derivasi, maupun struktur Hom-Lie aljabar.

Diharapkan penelitian lanjutan tersebut dapat memperkaya pemahaman teoritis mengenai homoderivasi pada aljabar Lie serta membuka peluang eksplorasi aplikasi dalam bidang matematika lainnya.

# DAFTAR PUSTAKA


Abidin, W. 2014. Transformasi linear pada suatu fungsi. *Journal Sains dan Teknologi*, 8(1), 31-38.

Alharfie, E. F., & Muthana, N. M. 2019. On homoderivations and commutativity of rings. *Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute*, 9, 301-304.

Al-Khalaf, A., Artemavych, O. D., & Taha, I. 2018a. Derivations in differentially prime rings. *Journal of algebra and its applications*, 17(7), 1-12.

Al-Khalaf, A., Artemavych, O. D., & Taha, I. 2018b. Rings with simple Lie rings of Lie and Jordan derivations. *Journal of Algebra and Its Applications*, 17(4), 1-11.

Ali, S., Rafiquee, N. N., & Varshney, V. 2024. Certain types of derivations in rings: A survey. *J. Indones. Math. Soc.*, 30(02), 256-306.

Atteya, M. 2020. Commutativity with derivations of semiprime rings. *Discuss. Math. Gen. Algebra Appl*, 40(2), 165-175.

Basdouri, I., Peyghan, E., & Sadraoui, M. A. 2023. Twisted Lie algebras by invertible derivations. *Mathematical Structures and Applications*, 17(6), 1-19.

Boua, A., & Söğütcü, E. K. 2023. Semiprime rings with generalized homoderivations. *Bol. Soc. Paran. Mat.*, 3s, 41, 1-8.

Brešar, M. 2004. Commuting maps: a survey. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 8(3), 361-397.

Chen, Y., Ren, S., Shan, J., & Zhang, R. 2025. Generalized derivations of $\omega$-Lie algebras. *Mathematics Subject Classification*, 40(17), 1-13.

Chen, Y., & Zhang, R. 2022. A commutative algebra approach to multiplicative Hom-Lie algebras. *Linear and Multilinear Algebra*, 71(7), 1127–1144.

El-Sayiad, M. S. T., Ageeb, A., & Ghareeb, A. 2022. Centralizing $n$-homoderivations of semiprime rings. *Journal of Mathematics*, 2022(1), 1-8.

El-Soufi, M. M., & Ghareeb, A. 2022. Centrally extended $\alpha$-homoderivations on prime and semiprime rings. *Journal of Mathematics*, 2022(1), 1-5.

Ernanto, I. 2018. Sifat-sifat ring faktor yang dilengkapi derivasi. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications*, 1(1), 12-21.

Ermeidis, I., & Jotz, M. 2024. Deformations of ideals in Lie algebras. *Journal of Algebraic Structures*, 1-40.

Faisol, A., & Fitriani, F. 2025. A study of derivations and linear mappings on skew generalized power series modules. *Barekeng Journal of Mathematics and Its Applications*, 19(4), 3047–3058.

Fitriani, & Faisol, A. 2022. *Grup*. Matematika, Yogyakarta.

Fitriani, F., Wijayanti, I. E., Faisol, A., & Ali, S. 2024. On $f$-derivations on polynomial modules. *Journal of Algebra and Its Applications*, 24(6), 1–14.

Futorny, V., & Tantubay, S. 2025. Representations of hamiltonian Lie algebras. *Journal of Mathematical Structures*, 1-10.

Herstein, I. N. 1961. Lie and Jordan structures in simple associative rings. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 67(6), 517-531.

Huang, J., Kudaybergenov, K., & Sukochev, F. 2023. Ring derivations of Murray–von Neumann algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 672, 28-52.

Humphreys, J. E. 1972. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer, New york.

Hummdi, A. Y., Bedir, Z., Söğütcü, E. K., Gölbaşi, Ö., & Rehman, N. U. 2025. Lie ideals and homoderivations in semiprime rings. *Mathematics*, 13(548), 1-13.

Khan, M. S., Ali, S., & Ayedh, M. 2022. Herstein's theorem for prime ideals in rings with involution involving pair of derivations. *Comm. Algebra*, 50(6), 2592-2603.

Larson, R., & Hostetler, R. 2010. *Calculus with Analytic Geometry*. Brooks/Cole, Pacific Grove.

Makhlouf, A., & Silvestrov, S. D. 2008. Hom-algebra structures. *Journal of Generalized Lie Theory and Applications*, 2(2), 51-64.

Marsden, J. E., & Tromba, A. J. 2012. *Vector Calculus*. W. H. Freeman, New York.

Melaibari, A., Muthana, N., & Al-Kenani, A. 2016. Homoderivations on rings. *General Mathematics Notes*, 35(1), 1-8.

Mursyidah, D. L., Fitriani, F., Utami, B. H. S., & Faisol, A. 2025. Nil derivation and $\delta$-ideal on polynomial ring. *Barekeng Journal of Mathematics and Its Applications*, 20(1), 0325–0334.

Rasiman, Rubowo, M. R., & Pramasdyahsari, A. S. 2018. *Teori Ring*. Universitas PGRI Semarang Press, Semarang.

Ruhama, M. A. H. 2012. Sifat-sifat pemetaan bilinear. *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika,* 1(1), 1-9.

Roman, S. 2008. *Advanced Linear Algebra*. Springer, New York.

Samimullah, M. 2021. Subspace of the vector space. *International Journal of Scientific Research and Engineering Development*, 4(1), 474–476.

Sarikaya, A., & Gölbaşı, Ö. 2023. Results on Lie ideals of prime rings with homoderivations. *Extracta Mathematicae, 38*(2), 125–137.

Shahoodh, M. K. 2024. $(\theta,\ \theta)$-derivation pair on semi-rings. *Al-Kut University College Journal*, 9(2), 216-224.

Sitompul, D. E., Fitriani, F., Chasanah, S. L., & Faisol, A. 2024. Jordan derivation on the polynomial ring $R[x]$. *Integral: Journal of Integral Mathematics and Computer Science*, 2(2), 41–47.

Stewart, J. 2015. *Calculus: Early Transcendentals*. Cengage Learning, Boston.

Tammam, M. S. E., Ageeb, A., & Ghareeb, A. 2022. Centralizing $n$-homoderivations of semiprime rings. *Hindawi Journal of Mathematics*, 2022, 1-9.

Thomas, A. B., Puspita, N. P., & Fitriani. 2024. Derivation on several rings. *Jurnal ilmu Matematika dan Terapan*, 18(3), 1729-1738.

Turkmen, S. 2024. Relationship between a homoderivation and a semi-derivation. *Journal of New Theory*, 47, 28-38.

Utama, G. A. Y. T., Kusumastuti, N., & Fran, F. 2021. Representasi adjoin pada aljabar Lie. *Buletin ilmiah Math. Stat. dan Terapannya* 10(4), 427-436.

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, d. A., & Hartanto, A. d. 2021. *Teori Ring dan Modul*. UGM Press, Yogyakarta.

Waluyo, R., Faisol, A., & Fitriani, F. 2025. $(\sigma, \tau)$-derivasi pada ring grup. *Euler: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains, dan Teknologi*, 13(2), 142–146.