DERIVASI$-(\alpha, \beta)$ PADA RING SEMIGRUP

Skripsi

Oleh

MARGO ASTOMO
NPM. 2217031050

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

ABSTRACT

$(\alpha, \beta)-$DERIVATIONS OF THE SEMIGROUP RING

By

Margo Astomo

Derivations and their generalizations play an important role in the study of algebraic structures. Among these, (α, β)-derivations extend the classical notion of derivations by incorporating ring endomorphisms. In this Bachelor's thesis, we investigate the construction of (α, β)-derivations on semigroup rings. Let R be a ring and S a semigroup, and consider the semigroup ring $R[S]$. By using function composition, we construct induced mappings on $R[S]$ arising from endomorphisms and (α, β)-derivations on R. We prove that every ring endomorphism of R naturally induces an endomorphism on the semigroup ring $R[S]$. Moreover, if δ is an (α, β)-derivations on R, then the induced mapping defines an $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-derivation on $R[S]$. These results provide a natural extension of generalized derivations from rings to semigroup rings and establish a framework for studying derivations on related algebraic extensions, including polynomial rings as a special case of semigroup rings.

Keywords: *Semigroup ring, derivation,* $(\alpha, \beta)-$*derivation, ring endomorphism.*

ABSTRAK

DERIVASI$-(\alpha, \beta)$ PADA RING SEMIGRUP

Oleh

Margo Astomo

Derivasi dan berbagai generalisasinya memiliki peranan penting dalam kajian struktur aljabar. Salah satu generalisasi tersebut adalah derivasi$-(\alpha, \beta)$ yang memperluas konsep derivasi klasik dengan melibatkan endomorfisme ring. Dalam skripsi ini, dikaji konstruksi derivasi$-(\alpha, \beta)$ pada ring semigrup. Misalkan R suatu ring dan S suatu semigrup, serta dipertimbangkan ring semigrup $R[S]$. Melalui komposisi fungsi, dibangun pemetaan terinduksi pada $R[S]$ yang berasal dari endomorfisma ring dan derivasi$-(\alpha, \beta)$ pada R. Ditunjukkan bahwa setiap endomorfisme ring pada R secara alami menginduksi suatu endomorfisme pada ring semigrup $R[S]$. Selanjutnya, jika δ merupakan suatu derivasi$-(\alpha, \beta)$ pada R, maka pemetaan terinduksi yang didefinisikan pada $R[S]$ membentuk suatu derivasi$-(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$. Hasil ini memberikan perluasan alami dari derivasi tergeneralisasi pada ring ke ring semigrup serta menyediakan kerangka untuk mempelajari derivasi pada perluasan struktur aljabar yang berkaitan, termasuk ring polinomial sebagai kasus khusus dari ring semigrup.

Kata-kata kunci: *Ring semigrup, derivasi, derivasi*$-(\alpha, \beta)$*, endomorfisma ring.*

DERIVASI$-(\alpha, \beta)$ PADA RING SEMIGRUP

MARGO ASTOMO

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

Judul Skripsi : **DERIVASI$-(\alpha, \beta)$ PADA RING SEMIGRUP**

Nama Mahasiswa : *Margo Astomo*

Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031050**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**
NIP 198002062003121003	NIP 198406272006042001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

Scanned with OKEN Scanner

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.** ....

Sekretaris : **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **17 April 2026**

Scanned with OKEN Scanner

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Margo Astomo**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031050**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Derivasi** $-(\alpha, \beta)$ **pada Ring Semigrup**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 17 April 2026
Penulis,

Margo Astomo
NPM. 2217031050

Scanned with OKEN Scanner

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Margo Astomo yang lahir di Dusun Banjar Harapan pada hari Minggu tanggal 12 September 2004. Penulis merupakan anak kelima dari lima bersaudara, dari pasangan Bapak Wasis dan Ibu Sawiyem.

Penulis menempuh pendidikan pertamanya di SD Negeri 4 Suka Agung pada tahun 2010. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan tingkat menengah pertama di SMP Negeri 2 Pardasuka pada tahun 2016. Penulis lalu melanjutkan pendidikan tingkat menengah atas di SMA Negeri 1 Ambarawa pada tahun 2019.

Penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada tahun 2022 melalui jalur SNMPTN. Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif mengikuti organisasi seperti anggota Bidang Kaderisasi dan Kepemimpinan HIMATIKA FMIPA pada tahun 2023 dan menjadi Anggota Dewan Perwakilan Mahasiswa FMIPA Universitas Lampung pada tahun 2025.

Pada bulan Januari 2025, penulis melaksanakan Kerja Praktik di Bank BTN KCS Bandar Lampung (sekarang menjadi Bank Syariah Nasional). Penulis juga melakukan kegiatan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kelurahan Kangkung Kecamatan Bumi Waras Kota Bandar Lampung pada bulan Juli hingga Agustus 2025.

KATA INSPIRASI

"Motivasi-motivasi itu hanya untuk membuat anda senang, yang benar-benar menentukan keberhasilan adalah usaha — dan kadang juga keberuntungan."

– (Coky Pardede) –

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Derivasi$-(\alpha, \beta)$ pada Ring Semigrup” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.
Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si. M.Sc. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

2. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung serta selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.

4. Bapak Tiryono, M.Sc., Ph.D., selaku dosen pembimbing akademik.

5. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Kedua orang tua tercinta, Bapak Wasis dan Ibu Sawiyem, yang senantiasa memberikan kasih sayang, doa yang tiada henti, nasihat, perhatian, dukungan moril maupun materil, serta semangat dan motivasi kepada penulis dalam setiap langkah kehidupan, khususnya selama menempuh pendidikan hingga penyelesaian skripsi ini. Terima kasih atas segala pengorbanan, kesabaran, dan ketulusan yang diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan studi ini.

7. Kakak-kakak tercinta, Mba Tumini, Mba Patmah, Mas Untung Warsono, dan Mba Subekti beserta keluarga besar, yang selalu memberikan doa, dukungan, perhatian, nasihat, motivasi, serta semangat kepada penulis selama menjalani perkuliahan hingga penyusunan skripsi ini. Terima kasih atas kebersamaan, bantuan, dan dorongan yang diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan studi ini dengan baik.

8. Aprial Wahyudi Pratama, Coky Arya Pratama, dan Zulfakhri Dwintara yang selalu bersama dalam proses bimbingan ini, berbagi kebingungan, revisi, dan akhirnya berbagi kelegaan.

9. Kodri, Rafael, Josep, Alfredo, Fajar, Luqman, Udin, Yuda, dan Luis—tim lengkap dari serius sampai bercanda, semua ada porsinya, dari yang tiba-tiba bijak sampai yang tiba-tiba hilang arah pembicaraan.

10. Teman-teman Jurusan Matematika Angkatan 2022 yang telah menjadi bagian dari perjalanan perkuliahan ini, dengan berbagai pengalaman dan kebersamaan selama masa studi.

11. Teman-teman HIMATIKA periode 2023 dan DPM FMIPA periode 2025 yang telah berkontribusi dalam pengalaman organisasi, kebersamaan, serta proses pembelajaran selama studi.

12. Teman-teman Ojek-KU yang bareng-bareng cari rezeki, serta Ojek-KU sebagai sarana memperoleh penghasilan selama masa studi.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 17 April 2026

Margo Astomo
NPM.2217031050

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Derivasi pada ring merupakan salah satu konsep penting dalam aljabar abstrak yang bertujuan untuk menjelaskan perubahan struktural di dalam ring melalui pemetaan aditif yang mengikuti aturan Leibniz. Konsep ini awalnya berasal dari kalkulus diferensial, tetapi kemudian diterapkan dalam konteks aljabar. Herstein dan Hungerford menunjukkan bahwa derivasi dapat digunakan untuk mempelajari sifat komutativitas, struktur ideal, serta perilaku pusat ring, khususnya pada ring nonkomutatif (Herstein, 1968; Hungerford, 1974). Dalam perkembangannya, derivasi tidak hanya dipandang sebagai operator yang menyerupai turunan, tetapi juga sebagai alat untuk memahami bagaimana elemen-elemen di dalam ring saling berhubungan.

Seiring dengan perkembangan teori ring, timbul perlunya perluasan konsep derivasi untuk menggambarkan secara lebih jelas struktur yang lebih kompleks. Hal ini menghasilkan beberapa generalisasi, salah satunya adalah derivasi$-(\alpha, \beta)$. Pada generalisasi ini, aturan Leibniz dimodifikasi dengan dua endomorfisma α dan β, yang menghasilkan bentuk $d(xy) = d(x)\alpha(y) + \beta(x)d(y)$. Ali dan Chaudhry mengembangkan konsep derivasi$-(\alpha, \beta)$ pada ring semiprima dan menunjukkan bagaimana keberadaan dua endomorfisma α dan β memengaruhi karakterisasi aljabar dari ring tersebut (Ali & Chaudry, 2011). Kajian ini menjadi acuan utama dalam analisis derivasi yang melibatkan lebih dari satu pemetaan endomorfisma. Huang menelaah derivasi tergeneralisasi pada ring prima dan semiprima, khususnya mengenai perubahan bentuk aturan Leibniz ketika endomorfisma tambahan dilibatkan dalam definisi derivasi (Huang, 2012). Hasil penelitian tersebut memperluas pemahaman mengenai hubungan antara derivasi dan struktur internal ring.

Dhara dan Pattanayak membahas generalisasi derivasi$-(\sigma, \tau)$ pada ring semiprima dan meneliti bagaimana identitas tertentu antara komutator dan antikomutator memengaruhi struktur ring (Dhara & Pattanayak, 2012). Mereka menunjukkan bahwa ketika generalisai derivasi$-(\sigma, \tau)$ memenuhi kondisi tertentu pada ideal, maka ring tersebut harus memiliki ideal pusat taknol. Hasil ini membantu memperjelas hubungan antara perilaku derivasi tergeneralisasi dan kecenderungan ring menuju sifat komutatif. Garg dan Sharma mengkaji generalisasi derivasi$-(\alpha, \beta)$ pada ring prima dengan menelaah identitas-identitas aljabar yang melibatkan dua generalisasi derivasi dan pasangan automorfisma (Garg & Sharma, 2016). Kajian tersebut menunjukkan bahwa kondisi tertentu pada pemetaan tersebut dapat memaksa ideal atau Lie ideal berada di dalam pusat ring. Hasil ini membantu memperjelas peran generalisai derivasi$-(\alpha, \beta)$ dalam memahami kecenderungan suatu ring menuju struktur yang lebih sederhana atau lebih dekat ke komutatif.

Reddy mengkaji generalisasi derivasi$-(\sigma, \tau)$ pada ring prima dengan melihat bagaimana identitas yang melibatkan dua endomorfisma σ dan τ memengaruhi perilaku elemen-elemen ring (Reddy & Subbarayudu, 2016). Penelitian ini menunjukkan bahwa derivasi$-(\sigma, \tau)$ dapat memberikan gambaran yang lebih jelas tentang bagaimana elemen-elemen dalam ring saling berhubungan. Tiwari, dkk. mengkaji generalisasi derivasi multiplikasi pada ideal dalam ring semiprima, khususnya dengan melihat perubahan identitas aljabar ketika derivasi diperluas menggunakan pemetaan tambahan (Tiwari dkk., 2017). Penelitian ini menunjukkan bahwa generalisasi derivasi dapat memberikan informasi lebih tentang bagaimana elemen-elemen di dalam ideal saling berhubungan, sehingga membantu memahami struktur ring secara lebih menyeluruh.

Chauduri mengkonstruksi bentuk derivasi$-(\sigma, \tau)$ pada ring grup $R[G]$ dengan memanfaatkan perluasan linear dari derivasi pada elemen grup, serta menelaah sifat-sifat yang muncul dari pasangan homomorfisma σ dan τ dalam struktur ring grup (Chauduri, 2018). Alekseev dan Arutyunov menganalisis derivasi pada aljabar semigrup dengan menempatkan struktur semigrup sebagai komponen utama dalam menentukan sifat derivasi yang muncul. Temuan mereka menunjukkan adanya keterkaitan langsung antara karakter semigrup dan bentuk derivasi yang didefinisikan di atasnya (Alekseev & Arutyunov, 2020).

Ali dkk. menyusun tinjauan komprehensif mengenai perkembangan terbaru teori derivasi pada ring, termasuk *skew derivation*, derivasi tergeneralisasi, dan derivasi$-(\alpha, \beta)$, serta menempatkan derivasi tergeneralisasi sebagai salah satu fokus utama dalam penelitian aljabar modern (Ali dkk., 2024). Waluyo dkk. mengembangkan kajian mengenai $(\sigma, \tau)-$derivasi pada ring grup dan memberikan formulasi yang dapat dijadikan pembanding ketika derivasi diterapkan pada ring semigrup, di mana struktur indeks tidak memiliki invers sebagaimana pada grup (Waluyo dkk., 2025).

Dengan demikian, studi derivasi$-(\alpha, \beta)$ pada ring semigrup $R[S]$ tidak hanya berkontribusi pada pengembangan teori derivasi, tetapi juga memberikan penjelasan yang lebih mendalam mengenai pengaruh struktur semigrup terhadap sifat-sifat aljabar ring yang bersangkutan. Melalui penelitian ini, diharapkan dapat diperoleh karakterisasi baru serta pemahaman yang lebih kuat mengenai hubungan antara derivasi, endomorfisma, dan struktur semigrup dalam konteks aljabar abstrak.

1.2 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. mengkaji konsep ring semigrup $R[S]$, endomorfisma ring, dan derivasi$-(\alpha, \beta)$;
2. mengkaji sifat derivasi$-(\alpha, \beta)$ pada ring semigrup $R[S]$;
3. menunjukkan kaitan derivasi$-(\alpha, \beta)$ pada ring R dengan derivasi pada ring semigrup $R[S]$.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. memberikan pemahaman yang lebih mendalam mengenai konsep derivasi$-(\alpha, \beta)$ dalam struktur ring semigrup $R[S]$;
2. menambah literatur dan wawasan dalam bidang aljabar abstrak, khususnya mengenai generalisasi derivasi dan penerapannya pada ring semigrup;

3. menjadi acuan bagi penelitian selanjutnya yang berkaitan dengan pengembangan konsep derivasi$-(\alpha, \beta)$ pada berbagai struktur aljabar lain.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini, akan dibahas definisi-definisi yang menjadi landasan teori untuk mendukung penyelesaian penelitian ini.

2.1 Semigrup dan Grup

Pada bagian ini akan dibahas konsep dasar yang berkaitan dengan operasi biner, semigrup, dan grup.

Definisi 2.1.1 Operasi biner $*$ pada himpunan S merupakan fungsi dari $S \times S$ ke S. Untuk setiap $(a, b) \in S \times S$, $*(a, b)$ di S dinotasikan dengan $a * b$ (Fitriani & Faisol, 2022).

Berikut diberikan contoh operasi biner.

Contoh 2.1.2 Operasi penjumlahan biasa pada himpunan bilangan $\mathbb{R}$ merupakan operasi biner (Fitriani & Faisol, 2022).

Suatu grup adalah suatu struktur aljabar yang terdiri dari suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu.

Definisi 2.1.3 Sistem matematika $\langle G, * \rangle$ adalah grup jika memenuhi aksioma-aksioma berikut (Fitriani & Faisol, 2022):

1. operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$;
2. terdapat elemen identitas e, yaitu untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$;
3. untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen invers $a' \in G$ sehingga berlaku $a * a' = a' * a = e$.

Berikut diberikan contoh grup.

Contoh 2.1.4 Himpunan bilangan $\mathbb{Z}$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan bilangan (Fitriani & Faisol, 2022).

Selain grup, terdapat struktur aljabar lain yang lebih umum, yaitu semigrup, yang hanya menekankan hukum asosiatif operasi biner tanpa harus memenuhi keberadaan elemen identitas atau elemen invers.

Definisi 2.1.5 Suatu himpunan tak kosong S terhadap operasi biner $*$ disebut semigrup jika memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1. Operasi $*$ bersifat tertutup di S, untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a * b \in S$.
2. Operasi biner $*$ bersifat asosiatif, untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.

(Whitelaw, 1995).

Berikut diberikan contoh semigrup.

Contoh 2.1.6 Pasangan himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$ dengan operasi penjumlahan $+$ merupakan semigrup komutatif (Surodjo & Susanti, 2023).

2.2 Ring Semigrup

Setelah membahas operasi biner pada grup dan semigrup, langkah berikutnya adalah mendefinisikan ring.

Definisi 2.2.1 Diberikan suatu himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi yakni $+$ (operasi penjumlahan) dan $\cdot$ (operasi perkalian), selanjutnya dilambangkan dengan $\langle R, +, \cdot \rangle$. Struktur $\langle R, +, \cdot \rangle$ dinamakan ring, jika memenuhi aksioma:

1. $\langle R, + \rangle$ grup Abelian, yaitu memenuhi:
   (a) untuk setiap $a, b \in R$, berlaku $a + b \in R$;
   (b) untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$;
   (c) terdapat $e \in R$ sedemikian sehingga $a + e = e + a = a$ untuk setiap $a \in R$;

(d) untuk setiap $a \in R$, terdapat $a^{-1} \in R$, sedemikian sehingga $a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$, yang selanjutnya disebut sebagai invers dari a;

(e) untuk setiap $a, b \in R$, berlaku $a + b = b + a$.

2. $\langle R, \cdot \rangle$ semigrup, yaitu memenuhi:

   (a) untuk setiap $a, b \in R$, berlaku $a \cdot b \in R$;

   (b) untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

3. Berlaku sifat distributif kiri dan distributif kanan, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku:

   (a) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$;

   (b) $(a + b) \cdot c) = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

(Rasiman, 2018).

Berikut diberikan contoh ring.

Contoh 2.2.2 Himpunan $2\mathbb{Z} = \{\, 2k \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian biasa pada bilangan bulat (Wahyuni dkk., 2021).

Definisi 2.2.3 Misalkan R suatu ring, dan nyatakan $R[x]$ sebagai himpunan semua barisan elemen dari R, yaitu $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ sedemikian sehingga hanya sejumlah hingga komponen a_i yang tidak bernilai nol. $R[x]$ membentuk suatu ring dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan sebagai berikut:

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) + (b_0, b_1, b_2, \ldots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots),$$

dan

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots)(b_0, b_1, b_2, \ldots) = (c_0, c_1, c_2, \ldots),$$

dengan

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n = \sum_{k+j=n} a_k b_j.$$

(Hungerford, 1974)

Berikut diberikan contoh ring polinomial.

Contoh 2.2.4 Misalkan $f(x) = 4x^3+2x^2+x+3$ dan $g(x) = 3x^4+3x^3+3x^2+x+4$, dengan $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$.
Koefisien dari $f(x)$ adalah $a_0 = 3,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ a_4 = a_5 = \cdots = 0$, dan koefisien dari $g(x)$ adalah $b_0 = 4,\ b_1 = 1,\ b_2 = 3,\ b_3 = 3,\ b_4 = 3,\ b_5 = b_6 = \cdots = 0$.
Dengan demikian, koefisien dari hasil penjumlahan $f(x) + g(x)$, yaitu $c_n = a_n + b_n \pmod 5$, diperoleh:

$$\begin{aligned}
c_0 &= 3 + 4 = 7 \equiv 2 \pmod 5,\\
c_1 &= 1 + 1 = 2,\\
c_2 &= 2 + 3 = 5 \equiv 0 \pmod 5,\\
c_3 &= 4 + 3 = 7 \equiv 2 \pmod 5,\\
c_4 &= 0 + 3 = 3,
\end{aligned}$$

dan $c_5 = c_6 = \cdots = 0$.
Oleh karena itu, $f(x) + g(x) = 2 + 2x + 2x^3 + 3x^4$.
Hasil penjumlahan $f(x)$ dan $g(x)$ tetap merupakan elemen dari ring polinomial $\mathbb{Z}_5[x]$, karena penjumlahan koefisien dilakukan di dalam ring $\mathbb{Z}_5$ (Wahyuni dkk., 2016).

Ring polinomial $R[x]$ dapat dipandang sebagai kasus khusus dari ring yang dibangun atas suatu semigrup. Dalam hal ini, eksponen x^i merepresentasikan elemen-elemen semigrup $(\mathbb{Z}_0^+, +)$. Dengan mengganti semigrup tersebut dengan semigrup umum $(S, *)$, diperoleh generalisasi yang disebut ring semigrup, sebagaimana didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.5 Misalkan R suatu ring asosiatif dan $\langle S, * \rangle$ suatu semigrup. Didefinisikan ring semigrup dari S atas R sebagai berikut. Misalkan T menyatakan himpunan semua fungsi $f : S \to R$ yang berhingga tak nol, yaitu hanya sejumlah hingga elemen $s \in S$ dengan $f(s) \neq 0$. Untuk setiap $f, g \in T$ dan setiap $s \in S$, didefinisikan operasi:

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s),$$

dan

$$(fg)(s) = \sum_{t*u=s} f(t)g(u),$$

di mana simbol $\sum_{t*u=s}$ menyatakan penjumlahan atas semua pasangan (t, u) dari S yang memenuhi $t * u = s$. Jika tidak ada pasangan (t, u) yang memenuhi kondisi tersebut, maka $(fg)(s) = 0$. Dengan dua operasi di atas, $\langle T, +, \cdot \rangle$ membentuk suatu ring yang disebut ring semigrup dari S atas R, dan dinotasikan dengan $R[S]$ atau $R[X; S]$. Jika operasi semigrup pada S dinyatakan secara perkalian, maka elemen-elemen dari $R[S]$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\sum_{s \in S} f(s)s \quad \text{atau} \quad \sum_{s \in S} sf(s).$$

Kasus khusus terjadi jika $S = \mathbb{Z}_0^+$ (semigrup bilangan bulat tak negatif dengan operasi penjumlahan). Dalam hal ini, $R[S]$ identik dengan ring polinomial $R[X]$ dalam satu peubah atas R (Gilmer, 1984)

Berikut diberikan contoh ring semigrup.

Contoh 2.2.6 Diberikan ring $\mathbb{Z}_4$ serta semigrup $\mathbb{Z}_3$ terhadap operasi penjumlahan, sehingga dapat dikonstruksi ring semigrup $\mathbb{Z}_4[\mathbb{Z}_3]$, yaitu himpunan

$$\mathbb{Z}_4[\mathbb{Z}_3] = \{f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_4 \mid \text{supp}(f) \text{ berhingga}\}$$

(Listiana, 2022)

Definisi 2.2.7 Misalkan R dan $R^|$ adalah ring. Suatu fungsi $f : R \to R^|$ disebut homomorfisma jika untuk setiap $a, b \in R$ berlaku:

1. $f(a + b) = f(a) + f(b)$;
2. $f(ab) = f(a)f(b)$.

Suatu homomorfisma ring dari suatu ring ke dirinya sendiri disebut endomorfisma (Amritaj dkk., 2021).

Contoh 2.2.8 Diberikan ring polinomial $R[x]$ atas ring R. Didefinisikan suatu pemetaan $\sigma : R[x] \to R[x]$ dengan

$$\sigma(f(x)) = f(x^2), \quad \text{untuk setiap} \quad f(x) \in R[x].$$

Akan ditunjukkan bahwa σ merupakan endomorfisma ring pada ring polinomial $R[x]$. Diberikan sebarang $f(x), g(x) \in R[x]$.

1. Akan ditunjukkan $\sigma(f(x) + g(x)) = \sigma(f(x)) + \sigma(g(x))$.

$$\begin{aligned} \sigma(f(x) + g(x)) &= (f + g)(x^2) \\ &= f(x^2) + g(x^2) \\ &= \sigma(f(x)) + \sigma(g(x)). \end{aligned}$$

2. Akan ditunjukkan $\sigma(f(x)g(x)) = \sigma(f(x))\sigma(g(x))$.

$$\begin{aligned} \sigma(f(x)g(x)) &= (fg)(x^2) \\ &= f(x^2)g(x^2) \\ &= \sigma(f(x))\sigma(g(x)). \end{aligned}$$

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa σ merupakan endomorfisma ring pada ring polinomial $R[X]$.

2.3 Derivasi$-(\alpha, \beta)$

Derivasi merupakan suatu pemetaan yang berkaitan erat dengan struktur internal sebuah ring. Struktur ini dibangun melalui operasi penjumlahan dan perkalian yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Pada bagian ini disajikan definisi formal mengenai derivasi pada suatu ring.

Definisi 2.3.1 Diberikan suatu ring R. Suatu pemetaan $d : R \to R$ disebut derivasi pada R apabila memenuhi:

(i) $d(a + b) = d(a) + d(b)$, dan

(ii) $d(ab) = d(a)b + a\,d(b)$ untuk setiap $a, b \in R$.

(Ali dkk., 2024)

Berikut diberikan contoh derivasi pada ring.

Contoh 2.3.2 Diberikan ring $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ dan pemetaan $\delta : M_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ dengan $\delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$.

Perhatikan bahwa untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ berlaku

$$
\begin{aligned}
\delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right) &= \delta\left(\begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -(b+y) \\ c+z & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -y \\ z & 0 \end{bmatrix} \\
&= \delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) + \delta\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right).
\end{aligned}
$$

Selanjutnya,

$$
\begin{aligned}
\delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right) &= \delta\left(\begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -(ay+bw) \\ cx+dz & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -bz & -bw \\ cx & cy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bz & -ay \\ dz & -cy \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -y \\ z & 0 \end{bmatrix} \\
&= \delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \delta\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right).
\end{aligned}
$$

Berdasarkan penjabaran tersebut, pemetaan δ merupakan suatu derivasi pada $M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ (Ernanto, 2018).

Dari Definisi 2.3.1, terdapat bentuk lain yang melibatkan suatu endomorfisma pada ring. Bentuk tersebut diberikan dalam definisi berikut.

Definisi 2.3.3 Suatu pemetaan aditif $d : R \to R$ dikatakan sebagai *skew derivation* (atau derivasi σ) apabila memenuhi:

$$d(ab) = d(a)b + \sigma(a)d(b), \quad \text{untuk setiap} \quad a, b \in R,$$

dengan σ merupakan suatu automorfisma pada R. Setiap derivasi biasa merupakan kasus khusus dari *skew derivatio*n, karena identitas tersebut direduksi menjadi aturan Leibniz ketika σ adalah automorfisma identitas.
Dengan mempertimbangkan endomorfisma tambahan pada R, misalnya α dan β, serta mendefinisikan suatu pemetaan aditif $d : R \to R$ yang memenuhi

$$d(xy) = d(x)\alpha(y) + \beta(x)d(y) \quad \text{untuk setiap } x, y \in R,$$

diperoleh suatu generalisasi yang dikenal sebagai derivasi$-(\alpha, \beta)$ (Ali dkk., 2024).

Berikut diberikan contoh derivasi$-(\alpha, \beta)$.

Contoh 2.3.4 Diberikan ring polinomial $R[x]$ dan pemetaan $\delta : R[x] \to R[x]$ dengan

$$\delta\left(\sum_{i=0}^{n} p_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{n} i p_i x^{i-1},$$

untuk setiap $\sum_{i=0}^{n} p_i x^i \in R[x]$.
Akan ditunjukkan bahwa δ merupakan suatu derivasi pada ring polinomial $R[x]$.
Diberikan sebarang $\alpha = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$, $\beta = \sum_{j=0}^{m} q_j x^j \in R[x]$.

1. Akan ditunjukkan $\delta(\alpha + \beta) = \delta(\alpha) + \delta(\beta)$.

$$\begin{aligned}\delta(\alpha) + \delta(\beta) &= \delta\left(\sum_{i=0}^{n} p_i x^i\right) + \delta\left(\sum_{j=0}^{m} q_j x^j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} i p_i x^{i-1} + \sum_{j=1}^{m} j q_j x^{j-1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} ip_i x^{i-1} + \sum_{i=1}^{n} iq_i x^{i-1}, \quad n \geq m,\ q_i = 0 \text{ untuk setiap } i > m \\
&= \sum_{i=1}^{n} i(p_i + q_i)x^{i-1} \\
&= \delta\left(\sum_{i=0}^{n}(p_i + q_i)x^i\right) \\
&= \delta\left(\sum_{i=0}^{n} p_i x^i + \sum_{j=0}^{m} q_j x^j\right) \\
&= \delta(\alpha + \beta).
\end{aligned}
$$

Jadi $\delta(\alpha + \beta) = \delta(\alpha) + \delta(\beta)$.

2. Akan ditunjukkan $\delta(\alpha\beta) = \delta(\alpha)\beta + \alpha\delta(\beta)$.

$$
\begin{aligned}
\delta(\alpha)\beta + \alpha\delta(\beta) &= \delta\left(\sum_{i=0}^{n} p_i x^i\right)\sum_{j=0}^{m} q_j x^j + \sum_{i=0}^{n} p_i x^i\, \delta\left(\sum_{j=0}^{m} q_j x^j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} ip_i x^{i-1}\sum_{j=0}^{m} q_j x^j + \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \sum_{j=1}^{m} jq_j x^{j-1} \\
&= \sum_{k=0}^{m+n-1}\left(\sum_{k=i+j-1} ip_i q_j\right)x^k + \sum_{k=0}^{m+n-1}\left(\sum_{k=i+j-1} p_i j q_j\right)x^k \\
&= \sum_{k=0}^{m+n-1}\left(\sum_{k=i+j-1}(i+j)p_i q_j\right)x^k \\
&= \sum_{k=1}^{m+n}\left(\sum_{k=i+j}(i+j)p_i q_j\right)x^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{m+n}\left(\sum_{k=i+j} kp_i q_j\right)x^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{m+n} k\left(\sum_{k=i+j} p_i q_j\right)x^{k-1}
\end{aligned}
$$

$$= \delta\left(\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{k=i+j} p_i q_j\right) x^k\right)$$

$$= \delta(\alpha\beta).$$

Jadi $\delta(\alpha\beta) = \delta(\alpha)\beta + \alpha\delta(\beta)$.

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa δ merupakan derivasi pada $R[X]$ (Waluyo dkk., 2025).

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun akademik 2025/2026 dan bertempat di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro No.1, Gedong Meneng, Bandar Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. mengkaji konsep ring, semigrup, ring semigrup $R[S]$, endomorfisma ring, dan derivasi$-(\alpha, \beta)$;
2. mengkonstruksi pemetaan $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ dan $\bar{\delta}$ pada ring semigrup $R[S]$ melalui komposisi fungsi;
3. membuktikan bahwa $\bar{\alpha}$ dan $\bar{\beta}$ merupakan endomorfisma ring pada $R[S]$;
4. menunjukkan derivasi$-(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ pada $R[S]$ serta memberikan contohnya.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah diperoleh, dapat disimpulkan bahwa setiap endomorfisma ring $\alpha : R \to R$ dapat diperluas menjadi endomorfisma $\bar{\alpha} : R[S] \to R[S]$ melalui komposisi fungsi. Selanjutnya, jika $\delta : R \to R$ merupakan suatu derivasi$-(\alpha, \beta)$, maka pemetaan $\bar{\delta} : R[S] \to R[S]$ yang didefinisikan oleh $\bar{\delta}(f) = \delta \circ f$ merupakan $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-derivasi pada ring semigrup $R[S]$. Dengan demikian, struktur derivasi$-(\alpha, \beta)$ pada ring R dapat dikonstruksi pada ring semigrup $R[S]$ melalui komposisi fungsi.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, terdapat beberapa saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya. Penelitian ini masih terbatas pada konstruksi derivasi-(α, β) pada ring semigrup $R[S]$, sehingga disarankan untuk memperluas kajian pada struktur aljabar yang lebih umum, seperti ring semigrup tak komutatif, semiring, maupun struktur modul. Penggunaan semigrup dalam penelitian ini juga masih terbatas pada contoh sederhana, sehingga perlu dikembangkan pada jenis semigrup lain yang lebih kompleks, seperti semigrup hingga atau semigrup dengan relasi tertentu, untuk melihat pengaruh struktur semigrup terhadap sifat derivasi yang terbentuk. Di samping itu, contoh yang digunakan dalam penelitian ini masih bersifat standar, sehingga disarankan untuk mengkonstruksi contoh yang lebih variatif dan non-trivial pada ring yang lebih kompleks guna memperkaya pemahaman terhadap perilaku derivasi-(α, β).

DAFTAR PUSTAKA

Alekseev, A., & Arutyunov, A. (2020). Derivations in Semigroup Algebras. *Eurasian Mathematical Journal, 11*(2), 9-18.

Ali, F., & Chaudhry, M. A. (2011). On Generalized $(\alpha, \beta)-$derivations of Semiprime Rings. *Turkish Journal of Mathematics, 35*(3), 399–404. doi: 10.3906/mat-0906-60

Ali, S., Rafiquee, N. N., & Varshney, V. (2024). Certain Types of Derivations in Rings: A Survey. *Journal of the Indonesian Mathematical Society, 30*(2), 256-306.

Amrintaj, B., Priyadharshini, V., Angeshwari, V., & Priyanka, S. (2021). Generalized homomorphism and anti homomorphism of fuzzy ideal of a ring. *International Journal of Creative Research Thoughts*, 9(8), c278-c285.

Chauduri D. (2018). $(\sigma, \tau)-$Derivations of Group Rings. *arXiv preprint*, arXiv:1803.09418 [math.RA], ver. 9, Jul. 2018. doi: 10.48550/arXiv.1803.09418.

Dhara, B., & Pattanayak, S. (2012). Generalized $(\sigma, \tau)-$derivations of Semiprime Rings. *International Journal of Algebra, 6*(1–4), 1–14. doi: 10.5402/2012/120251

Ernanto, I. (2018). Sifat-sifat Ring Faktor yang dilengkapi Derivasi. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications, 1*(1), 12–21. doi: 10.14710/jfma.v1i1.3

Fitriani, & Faisol, A. (2022). *Grup*. Matematika. Yogyakarta.

Garg, N., & Sharma, R. K. (2016). On Generalized $(\alpha, \beta)-$derivations in Prime Rings. *Communications of the Korean Mathematical Society, 30*(3), 261–270. 10.1007/s12215-015-0227-5

Gilmer, R. (1984). *Commutative Semigroup Rings*. Chicago: The University of Chicago Press.

Herstein, I. N. (1968). *Noncommutative Rings*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Huang, S. (2012). On Generalized Derivations of Prime and Semiprime Rings. *Taiwanese Journal of Mathematics, 16*(2), 771–776.

Hungerford. T.W. (1974). *Algebra*. New York: Springer-Verlag.

Listiana. (2022). *Konstruksi homomorfisma ring matriks atas ring semigrup* [Tesis, Universitas Lampung]. Digilib Universitas Lampung.

Rasiman (2018). *Teori Ring*. Universitas PGRI Semarang Press

Reddy, C. J. S., & Subbarayudu, K. (2016). Generalized $(\sigma, \tau)-$derivations in Prime Rings. *IOSR Journal of Mathematics, 12*(5, Ver. VII), 1–21. doi: 10.9790/5728-1205070121

Surodjo, B., & Susanti, Y. (2023). *Teori Semigrup*. Gadjah Mada University Press. Yogyakarta.

Tiwari, S.K., Sharma, R.K. & Dhara, B. (2017). Multiplicative (generalized)-derivation in Semiprime Rings. *Beitr Algebra Geom 58*, 211–225. doi: 10.1007/s13366-015-0279-x

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. (2016). *Teori ring dan modul*. UNY Press.

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. (2021). *Teori Ring dan Modul*. Gadjah Mada University Press. Yogyakarta.

Waluyo, R., Faisol, A. dan Fitriani, F. (2025). $(\sigma, \tau)-$Derivasi pada Ring Grup, Euler *Euler Journal Ilmiah Matematika Sains dan Teknologi*, vol. 13, no. 2, pp. 142–146, 2025. doi: 10.37905/euler.v13i2.31564

Whitelaw, T. A. (1995). *Introduction to Abstract Algebra* (3rd ed.). Chapman and Hall/CRC.