

**ANALISIS PERFORMA ESTIMATOR *GENERALIZED LEAST SQUARES*
PADA MODEL REGRESI LINEAR DENGAN PELANGGARAN ASUMSI
INDEPENDENSI GALAT AUTOREGRESIF ORDE SATU**

Skripsi

Oleh

**DEVINTA ARIANTI
NPM. 2217031055**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

ABSTRACT

ANALYSIS OF THE PERFORMANCE OF THE GENERALIZED LEAST SQUARES ESTIMATOR IN LINEAR REGRESSION MODELS WITH VIOLATIONS OF THE ASSUMPTION OF FIRST-ORDER AUTOREGRESSIVE ERROR INDEPENDENCE

By

Devinta Arianti

The classical linear regression model assumes that errors are independent and have constant variance. However, in practice, autocorrelation often occurs, causing Ordinary Least Squares (OLS) estimators to become inefficient. The Generalized Least Squares (GLS) estimator can be used to overcome this problem by transforming the model using the error covariance matrix, while Estimated Generalized Least Squares (EGLS) is used when the error covariance matrix is unknown and needs to be estimated. This study aims to examine the properties of the GLS estimator and compare the performance of the OLS, GLS, and EGLS estimators in linear regression models with first-order autoregressive (AR(1)) errors through a simulation study. The comparison is based on the criteria of bias, variance, and Mean Squared Error (MSE) at various sample sizes and levels of autocorrelation. The results show that the GLS estimator has the highest efficiency, as indicated by the smallest variance and MSE values. The EGLS estimator also shows better efficiency than OLS, but is still lower than GLS. In addition, an increase in sample size tends to reduce the variance and MSE values, while an increase in the level of autocorrelation causes a decrease in estimator efficiency, especially for the OLS estimator.

Keywords: Linear regression, AR(1) autocorrelation, OLS, GLS, EGLS, Monte Carlo simulation.

ABSTRAK

ANALISIS PERFORMA ESTIMATOR *GENERALIZED LEAST SQUARES* PADA MODEL REGRESI LINEAR DENGAN PELANGGARAN ASUMSI INDEPENDENSI GALAT AUTOREGRESIF ORDE SATU

Oleh

Devinta Arianti

Model regresi linear klasik mengasumsikan bahwa galat saling independen dan memiliki varians konstan. Namun, dalam praktiknya sering terjadi autokorelasi yang menyebabkan estimator *Ordinary Least Squares* (OLS) menjadi tidak efisien. Estimator *Generalized Least Squares* (GLS) dapat digunakan untuk mengatasi masalah tersebut melalui transformasi model dengan memanfaatkan matriks kovarians galat, sedangkan *Estimated Generalized Least Squares* (EGLS) digunakan ketika matriks kovarians galat tidak diketahui dan perlu diestimasi. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji sifat estimator GLS serta membandingkan performa estimator OLS, GLS, dan EGLS pada model regresi linear dengan galat autoregresif orde satu (AR(1)) melalui studi simulasi. Perbandingan dilakukan berdasarkan kriteria bias, varians, dan *Mean Squared Error* (MSE) pada berbagai ukuran sampel dan tingkat autokorelasi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa estimator GLS memiliki tingkat efisiensi tertinggi yang ditunjukkan oleh nilai varians dan MSE yang paling kecil. Estimator EGLS juga menunjukkan efisiensi yang lebih baik dibandingkan OLS, namun masih lebih rendah dibandingkan GLS. Selain itu, peningkatan ukuran sampel cenderung menurunkan nilai varians dan MSE sedangkan peningkatan tingkat autokorelasi menyebabkan penurunan efisiensi estimator terutama pada estimator OLS.

Kata-kata kunci: Regresi linear, autokorelasi AR(1), OLS, GLS, EGLS, simulasi Monte Carlo.

**ANALISIS PERFORMA ESTIMATOR *GENERALIZED LEAST SQUARES*
PADA MODEL REGRESI LINEAR DENGAN PELANGGARAN ASUMSI
INDEPENDENSI GALAT AUTOREGRESIF ORDE SATU**

DEVINTA ARIANTI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

Judul Skripsi : **ANALISIS PERFORMA ESTIMATOR
GENERALIZED LEAST SQUARES PADA
MODEL REGRESI LINEAR DENGAN
PELANGGARAN ASUMSI INDEPENDENSI
GALAT AUTOREGRESIF ORDE SATU**

Nama Mahasiswa : **Devinta Arianti**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031055**


Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

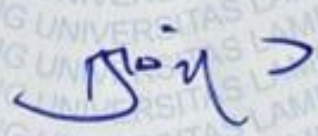


1. **Komisi Pembimbing**


Prof. Dr. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.
NIP 195701011984031020



Dr. Edwin Russel, S.E., M.Sc.
NIP 198406192024061001

2. Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama,
FMIPA Universitas Lampung

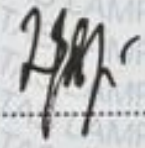

Mulyono, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP. 197406112000031002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Prof. Dr. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.**.....


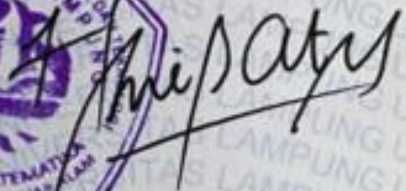
Sekretaris : **Dr. Edwin Russel, S.E., M.Sc.**.....


**Penguji
Bukan Pembimbing** : **Widiarti, S.Si., M.Si.**.....




2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam




Dr. Ing. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 22 April 2026

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Devinta Arianti**
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031055**
Jurusan : **Matematika**
Judul Skripsi : **Analisis Performa Estimator *Generalized Least Squares* pada Model Regresi Linear dengan Pelanggaran Asumsi Independensi Galat Autoregresif Orde Satu**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 22 April 2026

Penulis,


Devinta Arianti

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Devinta Arianti yang lahir di Kedaton 1 Lampung Timur pada tanggal 11 Januari 2004. Penulis merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara. Penulis menempuh pendidikan formal di Sekolah Dasar (SD) Negeri 1 Tulungbalak pada tahun 2010-2016, kemudian Sekolah Menengah Pertama (SMP) Negeri 1 Kotagajah pada tahun 2016-2019, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) Negeri 1 Kotagajah pada tahun 2019-2022.

Pada tahun 2022, penulis diterima sebagai mahasiswa Program Studi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN. Selama menempuh pendidikan di perguruan tinggi, penulis aktif dalam kegiatan organisasi di antaranya sebagai Anggota Bidang Keilmuan Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) pada periode 2023, serta sebagai Sekretaris Koordinator Divisi Sponsor dan Keamanan pada kegiatan Dies Natalis Matematika ke-25 (DINAMIKA XXV).

Selain itu, pada tanggal 23 Desember 2024 hingga 31 Januari 2025, penulis melaksanakan Kerja Praktik di Dinas Penanaman Modal dan Pelayanan Terpadu Satu Pintu (DPMPTSP) Kota Metro sebagai bentuk implementasi ilmu yang telah diperoleh selama masa perkuliahan. Selanjutnya, sebagai wujud pelaksanaan Tri Dharma Perguruan Tinggi dalam bidang pengabdian kepada masyarakat, penulis mengikuti kegiatan Kuliah Kerja Nyata (KKN) yang dilaksanakan pada bulan Juli sampai Agustus 2025 di Kelurahan Enggal, Kecamatan Enggal, Kota Bandar Lampung.

KATA INSPIRASI

”Maka, sesungguhnya berserta kesulitan ada kemudahan”

(Qs. Al-Insyirah: 5)

”Tidak ada mimpi yang terlalu tinggi. Tak ada mimpi yang patut untuk diremehkan. Lambungkan setinggi yang kau inginkan dan gapailah dengan selayaknya yang kau harapkan.”

(Maudy Ayunda)

”Berbagai cobaan dan hal yang buat kau ragu, jadikan percikan tuk menempa tekadmu, jalan hidupmu hanya milikmu sendiri, rasakan nikmatnya hidupmu hari ini.”

(Hindia)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah Tercinta

Terima kasih atas setiap doa yang tak pernah terputus, atas kerja keras yang sering kali tak terlihat, dan atas pengorbanan yang mungkin tak pernah Ayah ceritakan. Di balik diam dan lelahmu, selalu ada kekuatan besar yang menguatkan penulis untuk terus melangkah. Ayah adalah sosok yang mengajarkan penulis arti keteguhan, kesabaran, dan tanggung jawab. Dalam setiap langkah yang penulis tempuh, ada harapan Ayah yang selalu ingin penulis wujudkan. Meski perjalanan ini tidak selalu mudah, penulis tahu penulis tidak pernah benar-benar sendiri, karena ada doa Ayah yang selalu menyertai. Skripsi ini adalah bentuk kecil dari rasa terima kasih penulis, yang mungkin tidak akan pernah sebanding dengan semua yang telah Ayah berikan. Semoga Allah SWT. senantiasa melimpahkan kesehatan dan keberkahan dalam hidup Ayah.

Almarhumah Ibunda Tercinta

Ibu yang senantiasa penulis rindukan dan cintai, semoga Ibu berada dalam tempat terbaik di sisi-Nya, dalam limpahan rahmat dan kasih sayang Allah SWT. Tidak ada hari yang terlewati tanpa doa dan ingatan untuk Ibu, yang telah memberikan begitu banyak cinta, perhatian, dan pengorbanan selama hidup. Skripsi ini penulis persembahkan sebagai bentuk bakti, cinta, dan rasa terima kasih yang tak terhingga kepada Ibu. Andai waktu mengizinkan, penulis ingin kembali memeluk Ibu, menyampaikan secara langsung betapa besar rasa rindu ini, serta mengucapkan terima kasih atas segala hal yang telah Ibu berikan. Tidak lupa, penulis juga

memohon maaf atas segala kekhilafan dan hal-hal yang mungkin belum sempat penulis perbaiki semasa Ibu masih bersama. Semoga Allah SWT. senantiasa melimpahkan rahmat, ampunan, dan menempatkan Ibu di tempat terbaik di sisi-Nya. Cinta dan doa untuk Ibu akan selalu hidup dalam hati penulis, kini dan sepanjang waktu.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Analisis Performa Estimator *Generalized Least Squares* pada Model Regresi Linear dengan Pelanggaran Asumsi Independensi Galat Autoregresif Orde Satu" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Mustofa Usman, M.A., Ph.D. selaku Pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Edwin Russel, S.E., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Drs. Tiryono, M.Sc., Ph.D. selaku dosen pembimbing akademik.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Keluarga tercinta yang selalu memberikan doa, dukungan, dan kasih sayang tanpa henti diantaranya Ayah, Almh. Ibu, Mamas, Mbak, dan Ponakan yang menjadi sumber semangat untuk penulis.
8. Sahabat penulis sejak SMA diantaranya Najwa, Cici, Merly, Erika, dan Sefia yang telah banyak memberikan tawa dan selalu meluangkan waktu untuk saling membantu.
9. Teman seperjuangan semasa kuliah, diantaranya Irania, Titah, Aneska, Nadia, Icha, Meilina, dan Amalia. Terimakasih sudah memberikan kesempatan untuk berada diantara kalian yang sangat membantu dan memotivasi selama berada di bangku perkuliahan.
10. Teman-teman KKN Enggal, terimakasih karena selalu bersedia menjadi tempat pulang untuk penulis.
11. Rekan seperjuangan skripsi serta teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika angkatan 2022.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 22 April 2026
Penulis,

Devinta Arianti

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR GAMBAR	xiv
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Tujuan Penelitian	3
1.3 Manfaat Penelitian	4
II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Konsep Dasar Matriks	5
2.1.1 Operasi Matriks	5
2.1.2 Transpos Matriks	6
2.1.3 Invers Matriks	6
2.1.4 Matriks Identitas	7
2.1.5 Matriks Diagonal	7
2.1.6 Matriks Segitiga	7
2.1.7 Matriks Simetrik	8
2.1.8 Positif Definit dan Positif Semidefinit	9
2.2 Induksi Matematika	9
2.3 Model Linear Umum	10
2.4 Model Regresi Linear	11
2.5 Asumsi Klasik Model Regresi Linear	12
2.6 <i>Least Squares Estimators</i>	12
2.7 Teorema Gauss-Markov	15
2.8 Estimator <i>Generalized Least Squares</i> (GLS)	17
2.9 Pelanggaran Asumsi Independensi	20
2.9.1 Pengaruh Autokorelasi	20
2.9.2 Autoregresif Orde Satu (AR(1))	21
2.9.3 Pendugaan Parameter ρ	23
2.10 Ukuran Performa Estimator	24

2.10.1	Bias	24
2.10.2	Varians Estimator	25
2.10.3	<i>Mean Squared Error</i>	25
III	METODE PENELITIAN	26
3.1	Waktu dan Tempat Penelitian	26
3.2	Data Penelitian	26
3.3	Metode Penelitian	26
IV	HASIL DAN PEMBAHASAN	34
4.1	Pembentukan Matriks Transformasi dan Invers Kovarians Galat pada Estimator GLS	34
4.1.1	Model Regresi dengan Struktur Kovarians Galat	34
4.1.2	Matriks Kovarians Galat Ω	35
4.1.3	Pembentukan Matriks Transformasi	36
4.1.4	Invers Matriks Kovarians Galat Ω^{-1}	44
4.1.5	Transformasi Model	45
4.2	Pembuktian sifat-sifat estimator GLS	47
4.2.1	Linear	47
4.2.2	Tak Bias	47
4.2.3	Varians	48
4.2.4	Pembuktian GLS adalah BLUE ketika $Var(\varepsilon) \neq \sigma^2\mathbf{I}$	49
4.3	Hasil Simulasi	52
4.3.1	Analisis Performa Estimator GLS pada Model dengan Galat AR(1)	52
4.3.2	Perbandingan Performa Estimator OLS, GLS, dan EGLS pada Model Regresi Linear dengan Autokorelasi Galat AR(1)	64
V	KESIMPULAN	76
5.1	Kesimpulan	76
5.2	Saran	77
	DAFTAR PUSTAKA	78

DAFTAR TABEL

4.1	Perbandingan Performa OLS dan GLS pada Model Regresi dengan Galat AR(1)	52
4.2	Performa Estimator EGLS pada Model Regresi dengan Galat AR(1)	65

DAFTAR GAMBAR

3.1	Diagram Alur Penelitian	33
4.1	Nilai Bias Estimator OLS dan GLS untuk $\beta_0 = 4.0$	58
4.2	Nilai Bias Estimator OLS dan GLS untuk $\beta_1 = 2.5$	59
4.3	Nilai Bias Estimator OLS dan GLS untuk $\beta_2 = 1.8$	59
4.4	Nilai Bias Estimator OLS dan GLS untuk $\beta_3 = 0.6$	60
4.5	Nilai Varians Estimator OLS dan GLS untuk $\beta_0 = 4.0$	60
4.6	Nilai Varians Estimator OLS dan GLS untuk $\beta_1 = 2.5$	61
4.7	Nilai Varians Estimator OLS dan GLS untuk $\beta_2 = 1.8$	61
4.8	Nilai Varians Estimator OLS dan GLS untuk $\beta_3 = 0.6$	62
4.9	Nilai MSE Estimator OLS dan GLS untuk $\beta_0 = 4.0$	62
4.10	Nilai MSE Estimator OLS dan GLS untuk $\beta_1 = 2.5$	63
4.11	Nilai MSE Estimator OLS dan GLS untuk $\beta_2 = 1.8$	63
4.12	Nilai MSE Estimator OLS dan GLS untuk $\beta_3 = 0.6$	64
4.13	Nilai Bias Estimator OLS, GLS, dan EGLS untuk $\beta_0 = 4.0$	70
4.14	Nilai Bias Estimator OLS, GLS, dan EGLS untuk $\beta_1 = 2.5$	70
4.15	Nilai Bias Estimator OLS, GLS, dan EGLS untuk $\beta_2 = 1.8$	71
4.16	Nilai Bias Estimator OLS, GLS, dan EGLS untuk $\beta_3 = 0.6$	71
4.17	Nilai Varians Estimator OLS, GLS, dan EGLS untuk $\beta_0 = 4.0$	72
4.18	Nilai Varians Estimator OLS, GLS, dan EGLS untuk $\beta_1 = 2.5$	72
4.19	Nilai Varians Estimator OLS, GLS, dan EGLS untuk $\beta_2 = 1.8$	73
4.20	Nilai Varians Estimator OLS, GLS, dan EGLS untuk $\beta_3 = 0.6$	73
4.21	Nilai MSE Estimator OLS, GLS, dan EGLS untuk $\beta_0 = 4.0$	74
4.22	Nilai MSE Estimator OLS, GLS, dan EGLS untuk $\beta_1 = 2.5$	74
4.23	Nilai MSE Estimator OLS, GLS, dan EGLS untuk $\beta_2 = 1.8$	75
4.24	Nilai MSE Estimator OLS, GLS, dan EGLS untuk $\beta_3 = 0.6$	75

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Model linear merupakan kerangka dasar yang sangat penting dalam statistika untuk merepresentasikan hubungan linear antara suatu peubah acak dengan sejumlah parameter yang tidak diketahui. Salah satu bentuk khusus yang paling banyak digunakan dari model linear adalah model regresi linear, yaitu model yang digunakan untuk memodelkan dan menggambarkan hubungan antara satu variabel respon dan satu atau lebih variabel penjelas (Montgomery et al., 2008). Model regresi linear banyak digunakan karena kesederhanaannya serta kemampuannya dalam melakukan pendugaan parameter dan inferensi statistik (Kutner et al., 2005).

Dalam model regresi linear klasik, pendugaan parameter umumnya dilakukan menggunakan metode *Ordinary Least Squares* (OLS). Menurut Myers dan Milton (1991), OLS atau metode kuadrat terkecil adalah metode dengan meminimumkan jumlah kuadrat selisih antara nilai aktual dan nilai estimasi variabel respon. Metode OLS menghasilkan estimator yang bersifat tak bias dan efisien apabila seluruh asumsi klasik terpenuhi khususnya asumsi bahwa galat memiliki nilai harapan nol, ragam konstan, dan bersifat saling independen (Montgomery et al., 2008). Di bawah asumsi-asumsi tersebut, teorema Gauss-Markov menjamin bahwa estimator OLS merupakan *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE) (Rencher dan Schaalje, 2008).

Namun, dalam praktik analisis data terutama pada data runtun waktu dan data panel, asumsi independensi galat dalam model regresi linear sering kali tidak terpenuhi. Galat pada suatu pengamatan dapat berkorelasi dengan galat pada pengamatan lainnya sehingga menimbulkan autokorelasi. Salah satu bentuk autokorelasi yang paling umum dijumpai adalah galat yang mengikuti proses autoregresif orde satu atau AR(1), di mana galat pada waktu ke- t bergantung secara linear pada galat pada waktu sebelumnya (Gujarati dan Porter, 2009).

Keberadaan galat dengan struktur autoregresif orde satu menyebabkan matriks varians–kovarians galat tidak lagi berbentuk diagonal, sehingga asumsi independensi galat dalam model regresi linear dilanggar (Greene, 2012). Pelanggaran asumsi ini berdampak langsung terhadap sifat-sifat estimator OLS. Meskipun estimator OLS tetap bersifat tak bias, estimator tersebut tidak lagi efisien karena tidak memiliki ragam minimum di antara kelas estimator linear tak bias (Kutner et al., 2005). Oleh karena itu, diperlukan metode pendugaan alternatif yang mampu memperhitungkan struktur varians–kovarians galat.

Metode *Generalized Least Squares* (GLS) dikembangkan sebagai perluasan dari metode kuadrat terkecil untuk menangani kondisi ketika asumsi klasik tidak terpenuhi khususnya pada kasus autokorelasi. Jika matriks varians–kovarians galat diketahui, estimator GLS memenuhi sifat *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE) berdasarkan Teorema Aitken (Greene, 2012). Namun, dalam aplikasi nyata matriks kovarians galat umumnya tidak diketahui dan harus diduga dari data sehingga menghasilkan pendekatan *Feasible Generalized Least Squares* (FGLS) atau disebut juga *Estimated GLS* (EGLS) (Gujarati dan Porter, 2009).

Pada penelitian sebelumnya, Fang et al. (2024) menunjukkan bahwa estimator GLS lebih efisien dibandingkan OLS pada data runtun waktu dengan residual yang berkorelasi serial. Poojari et al. (2025) menemukan bahwa pada galat autoregresif, estimator OLS cenderung memiliki *mean squared error* yang lebih besar dibandingkan estimator yang mempertimbangkan struktur kovarians galat. Selanjutnya Oloyede (2022) melalui pendekatan *Bayesian Generalized Least Squares* menunjukkan bahwa pemodelan struktur kovarians galat yang berkorelasi secara serial menghasilkan pendugaan parameter yang lebih efisien dan stabil. Selain itu, Ayansola dan Adejumo (2024) melalui simulasi mengevaluasi performa FGLS dalam model dengan heteroskedastisitas dan autokorelasi, sementara Badawaire et al. (2025) mengembangkan estimator berbasis GLS untuk menangani berbagai pelanggaran asumsi klasik, menegaskan bahwa pengembangan dan evaluasi GLS masih menjadi fokus penting dalam penelitian terkini.

Meskipun berbagai penelitian terdahulu telah membahas metode *Generalized Least Squares* (GLS) dalam mengatasi pelanggaran asumsi klasik, sebagian besar penelitian tersebut lebih berfokus pada penerapan empiris atau pengembangan estimator alternatif. Penelitian yang secara khusus mengevaluasi performa estimator GLS pada model regresi linear dengan galat autoregresif orde satu (AR(1)) melalui pendekatan simulasi Monte Carlo masih relatif terbatas, terutama kajian yang secara

jelas membedakan kondisi ketika parameter kovarians galat diketahui dan ketika parameter tersebut diestimasi dari data. Selain itu, pembahasan mengenai pendekatan transformasi sebagai dasar teoretis metode GLS masih relatif terbatas, khususnya dalam menjelaskan secara rinci proses pembentukan matriks transformasi dan invers kovarians galat untuk mengatasi autokorelasi dalam model regresi linear.

Berdasarkan celah penelitian tersebut, penelitian ini difokuskan pada analisis performa estimator *Generalized Least Squares* (GLS) pada model regresi linear dengan pelanggaran asumsi independensi galat yang mengikuti proses autoregresif orde satu (AR(1)). Evaluasi performa dilakukan melalui pendekatan simulasi Monte Carlo dengan menggunakan ukuran bias, varians, dan *Mean Squared Error* (MSE) pada berbagai tingkat autokorelasi galat dan ukuran sampel. Penelitian ini secara khusus membandingkan performa GLS pada kondisi ketika parameter kovarians galat diketahui dan ketika parameter tersebut diestimasi dari data, serta penjelasan mengenai bagaimana metode GLS mengatasi autokorelasi melalui transformasi matriks masih terbatas. GLS mentransformasi model menggunakan matriks yang diturunkan dari kovarians galat sehingga galat yang berkorelasi menjadi tidak berkorelasi dan memenuhi asumsi regresi klasik.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah

1. Menjelaskan proses pembentukan matriks transformasi dan invers matriks kovarians galat dalam metode GLS untuk mengatasi autokorelasi pada model regresi linear.
2. Membuktikan sifat-sifat estimator GLS serta menunjukkan bahwa estimator GLS merupakan *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE) ketika asumsi independensi galat tidak terpenuhi.
3. Menganalisis performa estimator GLS pada model regresi linear dengan galat autoregresif orde satu (AR(1)) berdasarkan kriteria bias, varians, dan MSE pada berbagai tingkat autokorelasi dan ukuran sampel.
4. Membandingkan performa estimator GLS ketika matriks kovarians galat diketahui dan diestimasi (EGLS), serta membandingkannya dengan estimator OLS berdasarkan kriteria bias, varians, dan MSE pada berbagai tingkat autokorelasi dan ukuran sampel.

1.3 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan memberikan manfaat teoretis dan praktis dalam pengembangan metode estimasi pada model regresi linear yang mengalami autokorelasi, khususnya melalui pemahaman mengenai pembentukan matriks transformasi dan invers kovarians galat estimator *Generalized Least Squares* (GLS) serta pembuktian sifat-sifat estimator GLS termasuk pembuktian bahwa GLS merupakan *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE) ketika asumsi independensi galat tidak terpenuhi. Selain itu, penelitian ini memberikan gambaran analitis dan simulatif mengenai performa estimator GLS pada model dengan galat autoregresif orde satu (AR(1)) berdasarkan kriteria bias, varians, dan MSE, serta menjadi referensi dalam membandingkan efektivitas OLS, GLS, dan EGLS pada berbagai tingkat autokorelasi dan ukuran sampel.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini membahas berbagai definisi dasar yang relevan dan diperlukan sebagai acuan dalam pembahasan penelitian, sehingga dapat mendukung proses penyelesaian penelitian ini.

2.1 Konsep Dasar Matriks

Matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri matriks (Anton dan Rorres, 2004). Konsep dasar matriks yang digunakan dalam penelitian ini meliputi

2.1.1 Operasi Matriks

Matriks-matriks dapat dioperasikan seperti penjumlahan, pengurangan, dan perkalian (Usman dan Warsono, 2009). Jika **A** dan **B** adalah matriks berukuran $m \times n$, maka

1. Penjumlahan Matriks

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (2.1.1)$$

2. Pengurangan Matriks

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{C}, \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad (2.1.2)$$

3. Perkalian Matriks Jika **A** berukuran $m \times n$ dan **B** berukuran $n \times s$, maka **AB = C** di mana **C** adalah matriks berukuran $m \times s$ dengan

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^s a_{ij}b_{jk} \quad (2.1.3)$$

2.1.2 Transpos Matriks

Jika \mathbf{A} adalah matriks $m \times n$, maka transpos dari \mathbf{A} dinyatakan dengan \mathbf{A}^T didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari \mathbf{A} . Sehingga, kolom pertama dari \mathbf{A}^T adalah baris pertama dari \mathbf{A} , kemudian kolom kedua dari \mathbf{A}^T adalah baris kedua dari \mathbf{A} dan seterusnya (Anton dan Rorres, 2004). Terdapat sifat-sifat utama dari operasi transpos jika ukuran matriks sedemikian rupa sehingga operasi-operasi berikut dapat dilakukan, maka

1. $((\mathbf{A})^T)^T = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ dan $(\mathbf{A} - \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T$
3. $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$, dengan k adalah skalar sembarang
4. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

2.1.3 Invers Matriks

\mathbf{A} dikatakan mempunyai invers dilambangkan dengan \mathbf{A}^{-1} , jika $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Jika suatu matriks mempunyai invers maka matriks tersebut dikatakan matriks nonsingular, tetapi jika matriks tersebut tidak mempunyai invers maka dikatakan matriks singular (Usman dan Warsono, 2009).

Menurut Zimmerman (2020), terdapat beberapa sifat invers matriks diantaranya

1. Untuk setiap matriks nonsingular \mathbf{A} dan skalar c tak nol, $(c\mathbf{A})^{-1} = \left(\frac{1}{c}\right)\mathbf{A}^{-1}$.
2. Untuk setiap matriks nonsingular \mathbf{A} , $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.
3. Misalkan \mathbf{A} menyatakan matriks diagonal berukuran $n \times n$ yaitu $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$. Maka, \mathbf{A} nonsingular jika dan hanya jika $a_i \neq 0$ untuk semua $i = 1, 2, \dots, n$, dalam hal ini $\mathbf{A}^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)$.
4. Untuk setiap matriks nonsingular \mathbf{A} dan \mathbf{B} dengan dimensi yang sama, $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

2.1.4 Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks bujursangkar dengan bilangan 1 pada diagonal utamanya dan 0 pada entri-entri lainnya, seperti

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dan seterusnya}$$

Matriks dengan bentuk seperti ini disebut matriks identitas dan dinyatakan dengan \mathbf{I} . Jika ukurannya penting maka akan ditulis sebagai \mathbf{I}_n untuk matriks identitas $n \times n$ (Anton dan Rorres, 2004).

2.1.5 Matriks Diagonal

Suatu matriks bujursangkar yang semua entrinya yang tidak terletak pada diagonal utama adalah nol disebut matriks diagonal (Anton dan Rorres, 2004). Suatu matriks diagonal umum \mathbf{D} yang berukuran $n \times n$, dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Suatu matriks diagonal dapat dibalik, jika dan hanya jika seluruh entrinya pada posisi diagonal adalah bilangan tak nol. Dalam hal ini invers dari matriks \mathbf{D} adalah

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$$

2.1.6 Matriks Segitiga

Jika semua elemen matriks bujursangkar yang terletak di bawah dan di sebelah kiri diagonal adalah nol, matriks tersebut disebut matriks segitiga atas (*upper triangular*).

Dengan demikian, bentuk umum matriks segitiga atas adalah

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix}$$

Demikian pula, jika semua elemen matriks bujursangkar yang terletak di atas dan di sebelah kanan diagonal adalah nol, maka matriks tersebut disebut matriks segitiga bawah (*lower triangular*). Lebih umumnya, matriks \mathbf{A} berukuran $n \times n$ $\mathbf{A} = (a_{ij})$ adalah matriks segitiga atas jika $a_{ij} = 0$ untuk $j < i = 1, \dots, n$, dan merupakan matriks segitiga bawah jika $a_{ij} = 0$ untuk $j > i = 1, \dots, n$. Yang dimaksud dengan matriks segitiga adalah matriks bujur sangkar yang merupakan matriks segitiga atas atau segitiga bawah (Harville, 2008).

Jika \mathbf{A} adalah matriks segitiga atas berukuran $p \times p$, maka

1. \mathbf{A}^{-1} , jika ada adalah matriks segitiga atas.
2. Jika \mathbf{A}^{-1} ada, maka elemen diagonal ke- i adalah a_{ii}^{-1} .
3. Transpos dari \mathbf{A} adalah matriks segitiga bawah.
4. Hasil kali dua matriks segitiga atas berukuran $p \times p$ adalah matriks segitiga atas berukuran $p \times p$.

2.1.7 Matriks Simetrik

Suatu matriks \mathbf{A} dikatakan simetrik jika $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Dengan demikian, matriks simetrik adalah matriks bujursangkar yang elemen ke- ij -nya sama dengan elemen ke- ji -nya.

Misalnya

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

matriks \mathbf{A} adalah matriks simetrik karena $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ (Harville, 2008).

2.1.8 Positif Definit dan Positif Semidefinit

Menurut Rencher dan Schaalje 2008, jika matriks simetrik \mathbf{A} memiliki sifat $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} > 0$ untuk semua \mathbf{y} yang mungkin kecuali $\mathbf{y} = 0$ maka bentuk kuadrat $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$ dikatakan definit positif dan \mathbf{A} dikatakan matriks positif definit. Demikian pula, jika $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \geq 0$ untuk semua \mathbf{y} dan terdapat setidaknya satu $\mathbf{y} \neq 0$ sehingga $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = 0$ dan \mathbf{A} dikatakan positif semidefinit.

Menurut Zimmerman (2020) jika \mathbf{A} adalah matriks positif definit, maka matriks tersebut nonsingular yang berarti \mathbf{A}^{-1} ada dan jika \mathbf{A} adalah matriks positif semidefinit maka matriks tersebut singular.

2.2 Induksi Matematika

Dalam penelitian ini, diperlukan suatu metode pembuktian yang mampu menunjukkan kebenaran suatu pernyataan matematis secara umum, tidak hanya pada kasus-kasus tertentu. Oleh karena itu, salah satu metode pembuktian yang digunakan dalam penelitian ini adalah induksi matematika.

Menurut Rosen (2019), induksi matematika merupakan teknik pembuktian yang digunakan untuk membuktikan bahwa suatu pernyataan matematis benar untuk semua bilangan bulat positif n atau untuk semua indeks dalam suatu himpunan yang terurut. Secara umum, induksi matematika dapat digunakan untuk membuktikan pernyataan yang menyatakan bahwa $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n , di mana $P(n)$ adalah fungsi proposisional. Pembuktian dengan induksi matematika memiliki dua langkah yaitu,

1. Langkah dasar, menunjukkan bahwa $P(1)$ adalah benar.
2. Langkah induktif, menunjukkan bahwa untuk semua bilangan bulat positif k jika $P(k)$ benar maka $P(k+1)$ juga benar.

Asumsi bahwa $P(k)$ benar disebut hipotesis induktif. Setelah menyelesaikan kedua langkah dalam pembuktian dengan induksi matematika, maka telah ditunjukkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan bulat positif n .

2.3 Model Linear Umum

Diberikan model sebagai berikut

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.3.4)$$

dengan \mathbf{Y} adalah $n \times 1$ vektor peubah acak yang teramati; \mathbf{X} adalah matriks $n \times p$ di mana $n > p$ yang unsur-unsurnya adalah bilangan tertentu yang diketahui; $\boldsymbol{\beta}$ adalah $p \times 1$ vektor parameter yang tidak diketahui nilainya; dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah $n \times 1$ vektor galat yang tidak teramati di mana $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ dan $cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Sigma}$. Model 2.3.4 tersebut di namakan model linear umum (Usman dan Warsono, 2009).

Model 2.3.4 mempunyai pengertian-pengertian khusus tergantung pada distribusi dari $\boldsymbol{\varepsilon}$, struktur kovarians matriks $\boldsymbol{\Sigma}$, dan peringkat struktur dari matriks \mathbf{X} . Jika peringkat atau rank matriks \mathbf{X} sama dengan jumlah kolomnya maka dinamakan berperingkat penuh atau *full rank*, namun jika peringkat matriksnya tidak penuh modelnya dinamakan model tidak penuh atau *non-full rank model*. Diasumsikan dua kasus untuk distribusi $\boldsymbol{\varepsilon}$ yaitu

Kasus 1. $\boldsymbol{\varepsilon}$ diasumsikan berdistribusi normal dengan nilai tengah nol dan kovarians matriks $\sigma^2\mathbf{I}$ dengan $\sigma^2 > 0$ dan tidak diketahui nilainya. Secara simbolik dilambangkan dengan $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2)$.

Kasus 2. Distribusi $\boldsymbol{\varepsilon}$ tidak diketahui, tetapi mempunyai nilai tengah nol dan kovarians matriks $\sigma^2\mathbf{I}$ dengan $\sigma^2 > 0$ dan tidak diketahui. Diasumsikan ruang parameter untuk kasus-kasus tersebut adalah $\boldsymbol{\Psi}$ dengan

$$\boldsymbol{\Psi} = [(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2), \boldsymbol{\beta} \text{ dalam } E_p, \sigma^2 > 0]$$

Untuk kasus pertama, yang juga sering disebut teori normal seringkali digeneralisasikan dengan $\boldsymbol{\varepsilon}$ berdistribusi $N(0, \sigma^2\boldsymbol{\Omega})$ dengan $\sigma^2 > 0$ yang tidak diketahui nilainya dan $\boldsymbol{\Omega}$ adalah matriks yang diketahui nilainya. Untuk kasus kedua seringkali asumsi-asumsi yang kaku disyaratkan seperti misalnya \mathbf{Y}_i adalah independen dan berdistribusi identik dengan fungsi distribusi kumulatif yang kontinu.

2.4 Model Regresi Linear

Menurut Montgomery et al. (2008), model regresi linear merupakan model yang digunakan untuk menggambarkan hubungan antara suatu variabel respons dan satu atau lebih variabel penjelas melalui suatu fungsi yang linear dalam parameter. Model regresi linear dinyatakan sebagai:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon \quad (2.4.5)$$

di mana Y merupakan variabel respons, X_1, X_2, \dots, X_k adalah variabel penjelas, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ parameter yang tidak diketahui nilainya, dan ε adalah galat acak.

Istilah linear dalam regresi linear tidak mengacu pada linearitas hubungan antara variabel respons dan variabel penjelas, melainkan pada linearitas model terhadap parameter-parameter regresi. Dengan demikian, suatu model tetap dikategorikan sebagai regresi linear selama parameter muncul secara linear dalam persamaan model.

Montgomery et al. (2008) menjelaskan model regresi linear dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.4.6)$$

di mana

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{bmatrix}$$

Secara umum, \mathbf{Y} merupakan vektor berukuran $n \times 1$ yang berisi hasil pengamatan, \mathbf{X} merupakan matriks berukuran $n \times p$ yang memuat nilai-nilai variabel penjelas, $\boldsymbol{\beta}$ merupakan vektor berukuran $p \times 1$ yang berisi koefisien regresi, dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ merupakan vektor berukuran $n \times 1$ yang berisi galat acak. Matriks \mathbf{X} biasanya disebut sebagai matriks model, karena matriks ini merupakan tabel data asli dari permasalahan yang diperluas ke dalam bentuk model regresi yang ingin diestimasi.

2.5 Asumsi Klasik Model Regresi Linear

Menurut Greene (2012), terdapat beberapa asumsi klasik model regresi linear yang harus dipenuhi diantaranya:

1. Linearitas: $Y_i = X_{i1}\beta_1 + X_{i2}\beta_2 + \dots + X_{iK}\beta_K$. Model menyatakan bahwa hubungan antara variabel dependen Y_i dan variabel independen X_{i1}, \dots, X_{iK} bersifat linear dalam parameter.
2. Tidak ada multikolinearitas sempurna yang berarti tidak ada hubungan linier yang pasti di antara variabel independen mana pun dalam model tersebut. Asumsi ini menjamin bahwa matriks $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ dapat diinvers, jika asumsi ini dilanggar maka parameter regresi tidak dapat diestimasi secara unik.
3. Nilai harapan galat pada observasi ke- i bersyarat pada variabel independen adalah nol.

$$E(\varepsilon_i | X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jK}) = 0$$

4. Homoskedastisitas dan nonautokorelasi yaitu setiap galat ε_i memiliki nilai varians yang sama, σ^2 dan tidak berkorelasi dengan setiap galat lainnya, ε_j .

$$\begin{aligned} \text{Var}(\varepsilon_i) &= \sigma^2 \mathbf{I} \\ \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) &= 0, \quad i \neq j \end{aligned}$$

5. Data yang dihasilkan secara eksogen, variabel independen dapat berupa konstanta atau variabel acak tetapi proses pembangkitannya tidak dipengaruhi oleh galat.

2.6 Least Squares Estimators

Menurut Myers dan Milton (1991), *least squares estimators* atau metode kuadrat terkecil adalah metode dengan meminimumkan jumlah kuadrat selisih antara nilai aktual dan nilai estimasi variabel dependen. Dalam penggunaan metode ini, hanya diasumsikan bahwa vektor ε galat acak memiliki nilai tengah $E(\varepsilon) = 0$ dan varians $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 \mathbf{I}$. Untuk memperoleh *least squares estimators* untuk $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ dalam model linear, pertama-tama nyatakan respons dalam bentuk residual seperti

$$\begin{aligned}
Y_1 &= b_0 + b_1X_{11} + b_2X_{12} + \dots + b_kX_{1k} + e_1 \\
Y_2 &= b_0 + b_1X_{21} + b_2X_{22} + \dots + b_kX_{2k} + e_2 \\
&\vdots \\
Y_n &= b_0 + b_1X_{n1} + b_2X_{n2} + \dots + b_kX_{nk} + e_n
\end{aligned}$$

Kemudian sekarang menjadi bentuk matriks sebagai berikut

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

dan dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{e} \quad (2.6.7)$$

dengan \mathbf{Y} adalah vektor berukuran $n \times 1$, \mathbf{e} adalah vektor acak galat, dan \mathbf{b} adalah vektor $(k + 1) \times 1$ estimator untuk koefisien $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$. \mathbf{X} adalah matriks *full rank* $n \times (k + 1)$ bilangan riil. Dalam metode kuadrat terkecil digunakan untuk menemukan estimator $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ sedemikian sehingga

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^2 \quad (2.6.8)$$

sekecil mungkin. Teorema 2.6 memberikan estimator ini.

Teorema 2.6

Misalkan $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ di mana \mathbf{X} adalah matriks *full rank* $n \times (k + 1)$, $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor $(k + 1) \times 1$ dengan parameter yang tidak diketahui, dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah vektor acak berukuran $n \times 1$ dengan nilai tengah $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ dan varians $Var(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\mathbf{I}$. *Least squares estimator* untuk $\boldsymbol{\beta}$ dinotasikan dengan \mathbf{b} dan memberikan estimator

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \quad (2.6.9)$$

Bukti:

Vektor galat \mathbf{e} dapat dituliskan sebagai $\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b}$ dan dengan demikian

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b})$$

Menyederhanakan

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^T \mathbf{e} &= (\mathbf{Y}^T - \mathbf{b}^T \mathbf{X}^T)(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T \mathbf{X}\mathbf{b} - \mathbf{b}^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y} + \mathbf{b}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{b}\end{aligned}$$

karena $\mathbf{b}^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$ adalah 1×1 maka $\mathbf{b}^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y} = (\mathbf{b}^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y})^T = \mathbf{Y}^T \mathbf{X}\mathbf{b}$. Kemudian substitusikan kembali ke $\mathbf{e}^T \mathbf{e}$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^T \mathbf{e} &= \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2\mathbf{Y}^T \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{b}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})\mathbf{b} \\ &= \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2(\mathbf{X}^T \mathbf{Y})^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})\mathbf{b}\end{aligned}$$

Untuk meminimalkan $\mathbf{e}^T \mathbf{e}$ sebagai fungsi n, persamaan ini diturunkan terhadap \mathbf{b} dengan menetapkan sama dengan nol pada turunannya.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{e}^T \mathbf{e}}{\partial \mathbf{b}} &= -2\mathbf{X}^T \mathbf{Y} + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})\mathbf{b} + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^T \mathbf{b} \\ &= -2\mathbf{X}^T \mathbf{Y} + 2(\mathbf{X}^T \mathbf{X})\mathbf{b}\end{aligned}$$

Dengan menjadikan turunan ini menjadi nol maka

$$-2\mathbf{X}^T \mathbf{Y} + 2(\mathbf{X}^T \mathbf{X})\mathbf{b} = 0$$

atau

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})\mathbf{b} = \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$$

Untuk menyelesaikan persamaan \mathbf{b} , kalikan setiap sisi persamaan dengan $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ untuk memperoleh *least squares estimators*

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \quad (2.6.10)$$

Dengan hasil *least squares estimator* tersebut, teorema 2.6 terbukti (Myers dan Milton, 1991).

Dengan nilai harapan dari *least squares estimator* adalah

$$\begin{aligned}
 E(\hat{\beta}_{OLS}) &= E[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}] \\
 &= E[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon})] \\
 &= E[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}] \\
 &= E(\boldsymbol{\beta}) + E[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}] \\
 &= \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T E(\boldsymbol{\varepsilon}) \\
 &= \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T (0) \\
 &= \boldsymbol{\beta}
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa estimator OLS bersifat takbias. Kemudian diperoleh variansnya sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 Var(\hat{\beta}_{OLS}) &= Var[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}] \\
 &= Var[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon})] \\
 &= Var[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}] \\
 &= Var[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}] \\
 &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T Var(\boldsymbol{\varepsilon}) ((\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T)^T \\
 &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \sigma^2 \mathbf{I} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \\
 &= \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \\
 &= \sigma^2 \mathbf{I} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \\
 Var(\hat{\beta}_{OLS}) &= \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}
 \end{aligned}$$

2.7 Teorema Gauss-Markov

Teorema Gauss-Markov menjamin bahwa diantara kelas estimator linear tak bias untuk $\boldsymbol{\beta}$, estimator \mathbf{b} adalah yang terbaik dalam arti varians $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$ diminimalkan. Karena alasan ini *least squares estimator* \mathbf{b} disebut estimator BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*) (Myers dan Milton, 1991). Misalkan $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ di mana \mathbf{X} adalah matriks *full rank* $n \times (k + 1)$, $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor $(k + 1) \times 1$ dengan parameter yang tidak diketahui, dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah vektor acak berukuran $n \times 1$ dengan nilai tengah $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ dan varians $Var(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}$. *Least squares estimator* \mathbf{b} adalah *best linear unbiased estimator* untuk $\boldsymbol{\beta}$.

Bukti:

Biarkan \mathbf{b}^* menunjukkan estimator linear tak bias lainnya untuk β . Estimator ini dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\mathbf{b}^* = [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T + \mathbf{B}] \mathbf{Y}$$

dimana \mathbf{B} adalah matriks $(k + 1) \times n$ bilangan riil. Dengan mengambil

$$\begin{aligned} E[\mathbf{b}^*] &= [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T + \mathbf{B}] E(\mathbf{Y}) \\ &= [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T + \mathbf{B}] \mathbf{X} \beta \\ &= [\mathbf{I} + \mathbf{B} \mathbf{X}] \beta \end{aligned}$$

Karena \mathbf{b}^* adalah estimator tak bias untuk β , maka $E[\mathbf{b}^*] = \beta$ dan karenanya $[\mathbf{I} + \mathbf{B} \mathbf{X}] \beta = \beta$. Jadi $\mathbf{I} + \mathbf{B} \mathbf{X}$ adalah matriks identitas yang menyiratkan bahwa $\mathbf{B} \mathbf{X} = 0$.

Kemudian,

$$\begin{aligned} \mathbf{var} \mathbf{b}^* &= \mathbf{var}[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T + \mathbf{B}] \mathbf{Y} \\ &= [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T + \mathbf{B}] \sigma^2 \mathbf{I} [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T + \mathbf{B}]^T \\ &= \sigma^2 [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T + \mathbf{B}] [\mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} + \mathbf{B}^T] \\ &= \sigma^2 [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{B} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} + \mathbf{B} \mathbf{B}^T] \end{aligned}$$

Karena $\mathbf{B} \mathbf{X} = 0$, $\mathbf{X}^T \mathbf{B}^T = 0$, dan $\mathbf{var} \mathbf{b}^*$ dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \mathbf{var} \mathbf{b}^* &= \sigma^2 [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} + \mathbf{B} \mathbf{B}^T] \\ &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \sigma^2 + \mathbf{B} \mathbf{B}^T \sigma^2 \\ &= \mathbf{var} \mathbf{b} + \mathbf{B} \mathbf{B}^T \sigma^2 \end{aligned}$$

Entri ke- i dari diagonal utama $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ adalah

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}^2 \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

Entri diagonal utama diminimalkan ketika $\mathbf{B} = 0$. Dari sini mudah dilihat bahwa

$\text{var } b_0, \text{var } b_1, \dots, \text{var } b_k$ diminimalkan dengan memisalkan $\mathbf{B} = 0$. Dalam kasus ini, teorema terbukti dengan $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}$ (Myers dan Milton, 1991).

Sehingga, \mathbf{b} adalah *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE). Namun, dalam praktiknya asumsi ini sering kali dilanggar. Pada data cacahan, varians biasanya lebih besar ketika nilai rata-rata lebih besar. Pada data runtun waktu, observasi yang berdekatan dalam waktu seringkali berkorelasi. Suatu model linear dengan struktur matriks kovarian yang lebih umum adalah $\Sigma = \sigma^2 \Omega$, di mana Ω tidak harus merupakan matriks identitas (Agresti, 2015). Dalam kasus pelanggaran ini, *least squares estimator* tidak lagi menjadi estimator yang BLUE karena kehilangan efisiensinya sehingga varians yang dihasilkan tidak lagi minimum.

2.8 Estimator *Generalized Least Squares* (GLS)

Dalam situasi di mana asumsi klasik tidak terpenuhi terutama ketika terdapat autokorelasi pada galat, estimator *Generalized Least Squares* (GLS) dapat diterapkan. (Gujarati dan Porter, 2009) mengungkapkan bahwa GLS pada dasarnya adalah OLS yang diterapkan pada variabel-variabel yang telah ditransformasi sehingga memenuhi asumsi standar regresi. Estimator yang dihasilkan disebut estimator GLS, dan estimator inilah yang bersifat BLUE meskipun terjadi pelanggaran asumsi klasik. Tujuan *Generalized Least Squares* (GLS) adalah mencari penduga β yang meminimalkan varians dan tak bias dengan mempertimbangkan struktur kovarian Ω .

Menurut Myers dan Milton (1991) untuk memperoleh estimator GLS, pertama diasumsikan bahwa ε mengikuti distribusi normal multivariat. Fungsi kepadatan untuk $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ sebagai berikut:

$$f(\varepsilon; \beta, \Omega) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2} \varepsilon^T \Omega^{-1} \varepsilon\right] \quad (2.8.11)$$

Untuk mendapatkan estimator kemungkinan maksimum untuk β kita harus memperoleh vektor β^* yang memaksimalkan fungsi 2.8.11. Karena Ω adalah matriks simetris positif definit dan non-singular maka Ω^{-1} juga demikian. Oleh karena itu, menurut definisi $\varepsilon^T \Omega^{-1} \varepsilon$ adalah positif, dan oleh karena itu untuk memaksimalkan f kita harus meminimalkan $\varepsilon^T \Omega^{-1} \varepsilon$. Vektor β^* harus diperoleh sedemikian rupa sehingga

$$\varepsilon^T \Omega^{-1} \varepsilon = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta^*)^T \Omega^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta^*) \quad (2.8.12)$$

minimum. Istilah ini mirip dengan *residual sum of squares* yang diminimalkan dalam *ordinary least squares*. Oleh karena itu, kita akan menotasikan dengan SS_{Res} . Untuk meminimalkan "*residual*" *sum of squares* ini, pertama-tama kita turunkan persamaan 2.8.12 terhadap β^* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial SS_{Res,\Omega}}{\partial \beta^*} &= \frac{\partial (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta^*)^T \Omega^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta^*)}{\partial \beta^*} \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta^*} [\mathbf{Y}^T \Omega^{-1} \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T \Omega^{-1} \mathbf{X}\beta^* - \beta^{*T} \mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{Y} + \beta^{*T} \mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{X}\beta^*] \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta^*} [\mathbf{Y}^T \Omega^{-1} \mathbf{Y} - 2\beta^{*T} \mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{Y} + \beta^{*T} \mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{X}\beta^*]\end{aligned}$$

Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa turunan pertama terhadap β^* yaitu:

$$\frac{\partial SS_{Res,\Omega}}{\partial \beta^*} = -2\mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{Y} + 2\mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{X}\beta^*$$

Kemudian atur turunan ini sama dengan nol. Dari persamaan tersebut diperoleh:

$$\begin{aligned}-2\mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{Y} + 2\mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{X}\beta^* &= 0 \\ -\mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{Y} + \mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{X}\beta^* &= 0 \\ \mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{X}\beta^* &= \mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{Y} \\ (\mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{X}\beta^* &= (\mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{Y}\end{aligned}$$

Diperoleh solusi dari persamaan ini adalah

$$\beta^* = (\mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{Y} \quad (2.8.13)$$

dengan nilai tengah dan variansnya adalah

$$E(\beta^*) = \beta \quad (2.8.14)$$

$$Var(\beta^*) = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{X})^{-1} \quad (2.8.15)$$

Estimator β^* disebut estimator GLS yang serupa dengan solusi OLS \mathbf{b} dan tereduksi menjadi \mathbf{b} ketika $Var(\varepsilon) = \sigma^2 \mathbf{I}$. Matriks yang muncul di dalam solusi tergeneralisasi memberikan jenis pembobotan yang memperhitungkan struktur varians kovarians khusus dari ε . Menurut Gujarati dan Porter (2009), jika matriks Ω diketahui maka estimator GLS merupakan estimator dengan semua sifat *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE).

Pendugaan GLS untuk varians menurut Usman dan Warsono (2009) didefinisikan sebagai berikut:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n - K} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta^*)^T \Omega^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta^*) \quad (2.8.16)$$

Penduga varians ini adalah takbias.

Pendekatan Transformasi :

Secara khusus, dapat ditunjukkan bahwa β^* adalah *best linear unbiased estimator* untuk β . Untuk menunjukkannya, perhatikan bahwa karena Ω dan Ω^{-1} adalah matriks positif definit maka dapat ditulis

$$\Omega^{-1} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} \quad \text{dan} \quad \Omega = \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{R}^T)^{-1} \quad (2.8.17)$$

di mana \mathbf{R} adalah matriks nonsingular.

Model aslinya adalah

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon \quad (2.8.18)$$

Model ini dapat ditulis ulang dengan mengalikannya dengan \mathbf{R} untuk mendapatkan model sebagai berikut

$$\mathbf{R}\mathbf{Y} = \mathbf{R}\mathbf{X}\beta + \mathbf{R}\varepsilon \quad (2.8.19)$$

atau

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\beta + \varepsilon^* \quad (2.8.20)$$

di mana $\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z} = \mathbf{R}\mathbf{X}$, dan $\varepsilon^* = \mathbf{R}\varepsilon$. Vektor ε^* mempertahankan status vektor galat acak dan $E(\varepsilon^*) = 0$. Kemudian, diperoleh struktur varians-kovarians dari ε^* ,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\varepsilon^*) &= \text{Var}(\mathbf{R}\varepsilon) \\ &= \mathbf{R}\text{Var}(\varepsilon)\mathbf{R}^T \\ &= \sigma^2 \mathbf{R}\Omega\mathbf{R}^T \\ &= \sigma^2 \mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} (\mathbf{R}^T)^{-1} \mathbf{R}^T \\ &= \sigma^2 \mathbf{I} \end{aligned}$$

Akibatnya, model yang ditransformasi memungkinkan untuk memperkirakan β dalam konteks di mana galat tidak berautokorelasi. Dengan menerapkan teorema Gauss-Markov,

$$\mathbf{b} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{Y} \quad (2.8.21)$$

estimator BLUE dari β . Namun,

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{Y} \\ &= [(\mathbf{R}\mathbf{X})^T \mathbf{R}\mathbf{X}]^{-1} (\mathbf{R}\mathbf{X})^T \mathbf{R}\mathbf{Y} \\ &= [\mathbf{X}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{Y} \\ &= (\mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{Y} \\ &= \beta^* \end{aligned}$$

Dengan demikian, estimator *generalized least squares* adalah BLUE (Myers dan Milton, 1991).

2.9 Pelanggaran Asumsi Independensi

Pada salah satu asumsi klasik dijelaskan bahwa tidak ada autokorelasi pada galat yaitu $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ yang artinya untuk galat ε_i dan ε_j tidak memiliki korelasi/autokorelasi. Namun dalam praktiknya, asumsi tersebut sering kali dilanggar yang mengakibatkan komponen non-diagonal dari matriks varians-kovariansnya tidak sama lagi dengan nol.

Pelanggaran independensi terjadi ketika

$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0$$

Kasus yang paling umum adalah autokorelasi, terutama dalam data deret waktu. Menurut Kutner et al. 2005, pada data deret waktu asumsi galat yang tidak berkorelasi atau independen sering kali tidak tepat. Sebaliknya, galat seringkali berkorelasi positif dari waktu ke waktu. Galat yang berkorelasi dari waktu ke waktu disebut autokorelasi atau korelasi serial.

2.9.1 Pengaruh Autokorelasi

Montgomery et al. (2008), menjelaskan bahwa keberadaan autokorelasi menghasilkan struktur ketergantungan yang lebih kompleks pada galat dibandingkan

dengan yang diasumsikan oleh asumsi klasik model regresi linear. Ketika korelasi galat tidak nol, model tidak mampu menangkap proses sebenarnya yang terjadi pada data. Dengan demikian, autokorelasi bukan hanya menyebabkan pelanggaran asumsi tetapi juga mengindikasikan bahwa model yang digunakan tidak memadai untuk data runtun waktu. Konsekuensinya, setiap metode regresi yang bergantung pada asumsi independensi galat menjadi tidak valid. Menurut Kutner et al. (2005), ketika galat dalam model regresi *positively autocorrelated*, penggunaan estimator *ordinary least squares* menghasilkan beberapa konsekuensi penting yaitu

1. Koefisien regresi yang diestimasi tetap tidak bias, tetapi tidak lagi memiliki varians minimum dan dapat menjadi sangat tidak efisien.
2. *Mean Squared Error* dapat mengestimasi varians galat secara terlalu kecil, sehingga menghasilkan kesimpulan yang keliru.
3. Standar deviasi koefisien regresi yang dihitung dengan estimator *ordinary least squares* mengalami *underestimation* dan tidak mencerminkan standar deviasi yang sebenarnya.
4. Uji t dan uji F yang sebelumnya bergantung pada asumsi independensi galat, tidak lagi sepenuhnya valid ketika terdapat autokorelasi.

2.9.2 Autoregresif Orde Satu (AR(1))

Bentuk autokorelasi yang paling banyak digunakan dalam literatur adalah autoregresif orde pertama, di mana galat pada waktu t bergantung pada galat waktu sebelumnya. Kutner et al. (2005), memperkenalkan paling sederhana dari autokorelasi yaitu proses autoregresif orde pertama (*first-order autoregressive process*):

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t, \quad |\rho| < 1 \quad (2.9.22)$$

dengan ε_t adalah vektor galat pada waktu t , ε_{t-1} adalah galat pada waktu sebelumnya, ρ merupakan koefisien autokorelasi, dan u_t adalah galat acak yang independen $u_t \sim N(0, \sigma_u^2)$.

Dari persamaan 2.9.22 menurut Kutner et al. (2005), untuk mencari bentuk umum dari autoregresif orde satu adalah

1. Tuliskan kembali ε_t tersebut untuk periode $t - 1$

$$\varepsilon_{t-1} = \rho\varepsilon_{t-1-1} + u_{t-1}$$

$$\varepsilon_{t-1} = \rho\varepsilon_{t-2} + u_{t-1}$$

Substitusikan ε_{t-1} ke persamaan ε_t

$$\varepsilon_t = \rho(\rho\varepsilon_{t-2} + u_{t-1}) + u_t$$

$$\varepsilon_t = \rho^2\varepsilon_{t-2} + \rho u_{t-1} + u_t$$

2. Kemudian tuliskan kembali ε_t untuk periode $t - 2$

$$\varepsilon_{t-2} = \rho\varepsilon_{t-1-2} + u_{t-2}$$

$$\varepsilon_{t-2} = \rho\varepsilon_{t-3} + u_{t-2}$$

Substitusikan ε_{t-2} ke persamaan ε_t

$$\varepsilon_t = \rho^2(\rho\varepsilon_{t-3} + u_{t-2}) + \rho u_{t-1} + u_t$$

$$\varepsilon_t = \rho^3\varepsilon_{t-3} + \rho^2 u_{t-2} + \rho u_{t-1} + u_t$$

3. Lanjutkan secara berulang hingga diperoleh

$$\varepsilon_t = \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s u_{t-s} \quad (2.9.23)$$

dengan demikian, galat ε_t pada periode ke t adalah kombinasi linear dari suku gangguan saat ini dan sebelumnya.

Meskipun galat ε_t dalam model regresi saling berkorelasi, galat tetap memiliki nilai rata-rata nol dan varians konstan yaitu:

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad (2.9.24)$$

$$Var(\varepsilon_t) = \frac{\sigma_u^2}{1 - \rho^2} \quad (2.9.25)$$

Kovarians antara galat yang berurutan yaitu ε_t dan ε_{t-1} adalah:

$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \rho \left(\frac{\sigma_u^2}{1 - \rho^2} \right) \quad (2.9.26)$$

Koefisien korelasi antara ε_t dan ε_{t-1} yang dilambangkan dengan $\rho(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})$

didefinisikan sebagai:

$$\rho(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \frac{Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})}{\sqrt{Var(\varepsilon_t)Var(\varepsilon_{t-1})}} \quad (2.9.27)$$

Karena varians masing-masing galat menurut 2.9.25 adalah $\frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2}$, maka dengan menggunakan 2.9.26 diperoleh:

$$\rho(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \frac{\rho \left(\frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2} \right)}{\sqrt{\frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2}} \sqrt{\frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2}}} = \rho \quad (2.9.28)$$

Dengan demikian, parameter autokorelasi ρ adalah koefisien korelasi antara galat yang berurutan.

Selanjutnya, kovarians antar galat yang berjarak s periode dapat ditunjukkan sebagai:

$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = \rho^s \left(\frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2} \right), \quad s \neq 0 \quad (2.9.29)$$

yang disebut sebagai fungsi autokovarians (*autocovariance function*). Oleh karena itu, koefisien korelasi antara ε_t dan ε_{t-s} adalah

$$\rho(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = \rho^s, \quad s \neq 0 \quad (2.9.30)$$

Persamaan 2.9.30 disebut fungsi autokorelasi (*autocorrelation function*). Dengan demikian, jika $\rho > 0$ maka seluruh galat saling berkorelasi, namun semakin jauh jarak waktunya maka semakin kecil tingkat korelasinya. Satu-satunya kondisi di mana galat tidak berkorelasi adalah ketika $\rho = 0$.

Dari hasil varians dan kovarians dari galat pada 2.9.25 dan 2.9.29, matriks varians-kovarians dari galat untuk model regresi autoregresif orde pertama yaitu:

$$Var(\varepsilon) = \sigma_u^2 \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \Omega$$

dengan Ω adalah bentuk matriks simetrik dan positif definit.

2.9.3 Pendugaan Parameter ρ

Menurut Wooldridge (2013), koefisien autokorelasi ρ jarang diketahui dalam praktik sehingga ρ perlu diduga. Gujarati dan Porter (2009) menjelaskan bahwa apabila galat

mengikuti proses autoregresif orde satu, yaitu $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$ dengan u_t merupakan galat acak yang saling independen, maka parameter autokorelasi ρ dapat diduga secara sederhana menggunakan residual hasil estimasi OLS dari model regresi awal. Oleh karena itu, Gujarati dan Porter (2009) menyarankan untuk meregresikan residual OLS pada residual satu periode sebelumnya melalui persamaan:

$$\hat{\varepsilon}_t = \rho\hat{\varepsilon}_{t-1} + u_t$$

Sehingga diperoleh penduga OLS dari ρ adalah

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^n \hat{\varepsilon}_{t-1} \hat{\varepsilon}_t}{\sum_{t=2}^n \hat{\varepsilon}_{t-1}^2} \quad (2.9.31)$$

2.10 Ukuran Performa Estimator

Pada bagian ini, terdapat beberapa kriteria dasar untuk mengevaluasi estimator yang digunakan sebagai penilaian kualitas suatu estimator apakah estimator tersebut layak digunakan dalam analisis. Beberapa ukuran performa estimator yang paling umum digunakan adalah bias, varians, dan *Mean Squared Error* (MSE).

2.10.1 Bias

Menurut Casella dan Berger (2002), bias dari suatu estimator didefinisikan sebagai selisih antara nilai harapan estimator dan parameter sebenarnya. Bias dari suatu estimator W terhadap parameter θ adalah selisih antara nilai harapan dari W dan θ . Secara matematis bias dituliskan sebagai berikut:

$$Bias_{\theta}(W) = E_{\theta}(W) - \theta \quad (2.10.32)$$

Suatu estimator yang biasnya identik (untuk semua θ) sama dengan nol disebut tak bias (*unbiased*) dan memenuhi

$$E_{\theta}(W) = \theta \quad (2.10.33)$$

Bias mencerminkan kecenderungan sistematis estimator untuk memberikan nilai yang terlalu tinggi atau terlalu rendah dibanding parameter sebenarnya. Bias positif menunjukkan bahwa estimator cenderung melebihkan nilai parameter, sedangkan bias negatif menunjukkan kecenderungan meremehkan nilai parameter.

2.10.2 Varians Estimator

Varians estimator mengukur seberapa besar penyebaran nilai estimator terhadap nilai harapannya. Menurut Casella dan Berger (2002), varians estimator diperoleh dengan:

$$Var(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] \quad (2.10.34)$$

Varians merupakan ukuran ketidakpastian sampling. Dua estimator yang sama-sama tak bias dapat memiliki varians yang berbeda. Estimator dengan varians lebih kecil dianggap lebih efisien karena memberikan hasil yang lebih stabil dari satu sampel ke sampel lainnya. Oleh karena itu, varians menjadi ukuran penting dalam menilai kestabilan suatu estimator.

2.10.3 Mean Squared Error

Menurut Wooldridge (2013), *Mean Squared Error* (MSE) adalah nilai harapan dari kuadrat jarak antara suatu estimator dengan nilai parameter populasi, MSE sama dengan varians estimator ditambah kuadrat biasnya. Salah satu cara untuk membandingkan estimator yang tidak selalu bersifat tak bias adalah dengan menghitung MSE dari estimator tersebut. Jika W merupakan estimator dari parameter θ , maka MSE dari W didefinisikan sebagai:

$$MSE(W) = E[(W - \theta)^2] \quad (2.10.35)$$

MSE mengukur seberapa jauh, secara rata-rata, estimator menyimpang dari nilai parameter yang sebenarnya. Dapat ditunjukkan bahwa:

$$MSE(W) = Var(W) + [Bias(W)]^2 \quad (2.10.36)$$

sehingga nilai MSE bergantung pada varians dan bias (jika ada). Dengan demikian, MSE memungkinkan kita untuk membandingkan dua estimator ketika salah satu atau keduanya bersifat bias. Estimator dengan sedikit bias tetapi varians kecil dapat memiliki MSE lebih rendah dibanding estimator yang tak bias tetapi memiliki varians besar. Dengan demikian, MSE memberikan ukuran menyeluruh terhadap kesalahan total estimator, sehingga sering digunakan dalam studi simulasi dan evaluasi kinerja estimator dalam berbagai kondisi data.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran periode 2025/2026 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data yang dibangkitkan berdasarkan parameter yang telah ditentukan melalui simulasi Monte Carlo menggunakan *software* SAS Studio. Data yang dihasilkan berbentuk data runtun waktu, di mana galat mengikuti struktur autoregresif orde satu (AR(1)). Melalui data simulasi ini dianalisis performa estimator *Generalized Least Squares* (GLS) dalam mengestimasi parameter model.

3.3 Metode Penelitian

Langkah-langkah penelitian yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Pembentukan matriks transformasi dan invers kovarians galat pada estimator GLS.
 - a) Menentukan model regresi dengan struktur kovarians galat.
 - b) Membentuk matriks kovarians galat Ω .
 - c) Melakukan dekomposisi matriks kovarians galat.

- d) Membentuk matriks transformasi.
 - e) Menentukan invers matriks kovarians galat.
 - f) Membuktikan bahwa galat hasil transformasi memenuhi asumsi klasik model regresi.
2. Pembuktian sifat-sifat estimator GLS.

Membuktikan sifat-sifat estimator GLS, serta menunjukkan bahwa estimator GLS merupakan *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE) ketika galat tidak memenuhi asumsi independensi.

3. Melakukan simulasi data.

Dalam simulasi, analisis dilakukan dalam dua langkah. Pertama, estimator GLS diterapkan menggunakan struktur matriks varians–kovarians galat yang dibentuk berdasarkan nilai parameter autokorelasi yang telah ditentukan. Kedua, parameter struktur galat diestimasi dari data simulasi dan digunakan untuk membentuk matriks varians–kovarians galat yang selanjutnya digunakan dalam prosedur GLS. Untuk studi simulasi Monte Carlo, parameter β ditentukan dan ditetapkan sebagai $\beta_0 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.8, \text{ dan } \beta_3 = 0.6$ (Ayinde et al., 2012).

Menurut Wooldridge (2013), dalam model regresi dengan autokorelasi AR(1) yaitu

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t \quad (3.3.1)$$

Estimator GLS membutuhkan nilai ρ untuk membentuk matriks kovarians galat. Namun, dalam praktiknya nilai ρ jarang diketahui yang mengakibatkan estimator GLS tidak dapat digunakan secara langsung. Oleh karena itu terdapat estimator *Estimated Generalized Least Squares* (EGLS) yang merupakan metode estimasi yang digunakan ketika struktur kovarians galat tidak diketahui, khususnya pada kasus autokorelasi. Dalam pendekatan ini, parameter autokorelasi diestimasi terlebih dahulu menggunakan residual OLS, kemudian digunakan untuk mentransformasi model melalui proses quasi-differencing. Estimasi parameter regresi selanjutnya dilakukan dengan metode OLS pada model yang telah ditransformasi.

Estimator EGLS diperoleh dengan mengganti matriks kovarians galat Ω dengan estimasinya $\hat{\Omega}$. Estimator EGLS didefinisikan sebagai

$$\hat{\beta}_{EGLS} = (\mathbf{X}^T \hat{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \hat{\Omega}^{-1} \mathbf{Y} \quad (3.3.2)$$

di mana

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho} & \hat{\rho}^2 & \dots & \hat{\rho}^{n-1} \\ \hat{\rho} & 1 & \hat{\rho} & \dots & \hat{\rho}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}^{n-1} & \hat{\rho}^{n-2} & \hat{\rho}^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

(Greene, 2012).

Performa estimator dievaluasi berdasarkan ukuran bias, varians, dan *Mean Squared Error* (MSE) pada berbagai kombinasi tingkat autokorelasi galat dan ukuran sampel. Langkah-langkah yang dilakukan dalam simulasi adalah sebagai berikut:

- a) Menentukan model yang digunakan dalam penelitian. Model yang digunakan dalam simulasi adalah model regresi linear dengan tiga variabel penjelas, yang dirumuskan sebagai

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (3.3.4)$$

dengan galat ε_t diasumsikan mengikuti proses autoregresif orde satu, yaitu

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_u^2), \quad |\rho| < 1 \quad (3.3.5)$$

Secara khusus, asumsi pada model 3.3.5 berarti bahwa galat ε_t bergantung pada galat periode sebelumnya. Galat ε_t memiliki rataan nol bersyarat pada X. Dengan demikian, varians dari ε_t adalah

$$Var(\varepsilon_t) = \frac{\sigma_u^2}{1 - \rho^2} \quad (3.3.6)$$

Dari model regresi linear pada Persamaan 3.3.4 dapat ditulis ulang yaitu

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t \quad (3.3.7)$$

Karena masalah dalam persamaan ini adalah autokorelasi pada ε_t , maka perlu dilakukan transformasi untuk menghilangkan autokorelasi tersebut. Untuk $t \geq 2$ dapat ditulis

$$Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{1,t-1} + \beta_2 X_{2,t-1} + \beta_3 X_{3,t-1} + \varepsilon_{t-1} \quad (3.3.8)$$

Selanjutnya, kalikan Persamaan 3.3.8 dengan ρ sehingga dihasilkan

$$\rho Y_{t-1} = \rho \beta_0 + \rho \beta_1 X_{1,t-1} + \rho \beta_2 X_{2,t-1} + \rho \beta_3 X_{3,t-1} + \rho \varepsilon_{t-1} \quad (3.3.9)$$

Kemudian pada Persamaan 3.3.7 dikurangi dengan Persamaan 3.3.9 diperoleh

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0 - \rho\beta_0 + \beta_1 X_{1t} - \rho\beta_1 X_{1,t-1} + \beta_2 X_{2t} - \rho\beta_2 X_{2,t-1} \\ + \beta_3 X_{3t} - \rho\beta_3 X_{3,t-1} + \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$$

Persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi persamaan berikut

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1 - \rho) + \beta_1(X_{1t} - \rho X_{1,t-1}) + \beta_2(X_{2t} - \rho X_{2,t-1}) \\ + \beta_3(X_{3t} - \rho X_{3,t-1}) + u_t, \quad t \geq 2$$

di mana $u_t = \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$. Persamaan ini disebut *quasi-differencing*, kemudian persamaan tersebut dapat ditulis sebagai

$$Y_t^* = \beta_0^* + \beta_k^* X_{k,t}^* + u_t, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.3.10)$$

dengan

$$Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}$$

$$\beta_0^* = \beta_0(1 - \rho)$$

$$\beta_k^* = \beta_k, \quad k = 1, 2, 3$$

$$X_{k,t}^* = (X_{kt} - \rho X_{k,t-1}), \quad k = 1, 2, 3$$

Galat hasil transformasi yaitu u_t tidak lagi berautokorelasi dan memiliki varians konstan. Oleh karena itu, model hasil transformasi memenuhi asumsi Gauss-Markov. Apabila nilai ρ diketahui, maka penerapan OLS pada model quasi-difference akan menghasilkan estimator yang bersifat BLUE.

Model quasi-difference tanpa observasi pertama tetap menghasilkan estimator yang konsisten, namun tidak efisien karena kehilangan satu observasi, sehingga tidak mencapai sifat BLUE secara penuh. Untuk memperbaikinya, persamaan periode pertama ditulis sebagai

$$Y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_{1,1} + \beta_2 X_{2,1} + \beta_3 X_{3,1} + \varepsilon_1 \quad (3.3.11)$$

dengan

$$Var(\varepsilon_1) = \frac{\sigma_u^2}{1 - \rho^2} > \sigma_u^2 = Var(u_t) \quad (3.3.12)$$

Pada kondisi ini, ε_t tidak berautokorelasi dengan u_t . Namun, perbedaan varians antara ε_t dan u_t menyebabkan model hasil transformasi belum memenuhi asumsi homoskedastisitas. Pada persamaan 3.3.12 varians ε_t lebih

besar daripada varians u_t sehingga hasil yang diperoleh tidak BLUE.

Jadi, untuk mengatasi masalah tersebut, pada persamaan 3.3.11 dikalikan dengan $(1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}$ untuk memperoleh varians galat yang sama,

$$(1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}Y_1 = (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}\beta_0 + \beta_1(1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}X_{1,1} + \beta_2(1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}X_{2,1} \\ + \beta_3(1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}X_{3,1} + (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}\varepsilon_1$$

atau

$$Y_1^* = \beta_0^* + \beta_k^*X_{k,1}^* + u_1, \quad \text{untuk } t = 1, k = 1, 2, 3 \quad (3.3.13)$$

dengan

$$Y_1^* = (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}Y_1 \\ \beta_0^* = (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}\beta_0 \\ \beta_k^* = \beta_k, \quad k = 1, 2, 3 \\ X_{k,1}^* = (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}X_{k,1}, \quad k = 1, 2, 3 \\ u_1 = (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}\varepsilon_1$$

Kemudian, dari hasil transformasi galat tersebut dapat ditentukan mean dan variansnya

1. Mean dari galat hasil transformasi dengan diketahui $E(\varepsilon_t) = 0$ maka diperoleh

$$E(u_1) = E\left((1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}\varepsilon_1\right) \\ = (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}E(\varepsilon_1) \\ = (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}(0) \\ = 0$$

Sehingga

$$E(u_1) = 0 \quad (3.3.14)$$

2. Kemudian varians dari u_t dengan diketahui $Var(\varepsilon_1) = \frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} Var(u_1) &= Var\left((1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\varepsilon_1\right) \\ &= \left((1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\right)^2 Var(\varepsilon_1) \\ &= (1-\rho^2) \cdot \frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2} \\ &= \sigma_u^2 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$Var(u_1) = \sigma_u^2 = Var(u_t) \quad (3.3.15)$$

Jika parameter ρ diketahui, maka transformasi tersebut menghasilkan estimator GLS yang bersifat BLUE. Namun dalam praktik, ρ umumnya tidak diketahui sehingga harus diestimasi terlebih dahulu dan prosedur ini dikenal sebagai *Estimated Generalized Least Squares* (EGLS) (Wooldridge, 2013).

- b) Menentukan nilai awal dan parameter simulasi.
- Ukuran sampel n ditetapkan pada empat ukuran, yaitu $n = 30, 50, 100, 200$.
 - Tingkat autokorelasi galat ditetapkan pada $\rho = 0.0, 0.3, 0.6, 0.9$.
 - Nilai parameter sebenarnya $\beta_0 = 4, \beta_1 = 2.5, \beta_2 = 1.8$, dan $\beta_3 = 0.6$.
 - Jumlah replikasi simulasi ditetapkan sebanyak $R = 1000$.
- c) Membangkitkan nilai X_{1t}, X_{2t} , dan X_{3t} berukuran $n \times 4$ dan bersifat tetap.
- d) Membangkitkan galat ε_t secara acak mengikuti proses autoregresif orde satu (AR(1)) yaitu $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$, $u_t \sim N(0, 1)$ sesuai dengan nilai parameter autokorelasi ρ .
- e) Setelah variabel penjelas dan galat dibangkitkan, nilai variabel respon \mathbf{Y}_t dihitung berdasarkan model

$$Y_t = 4 + 2.5X_{1t} + 1.8X_{2t} + 0.6X_{3t} + \varepsilon_t$$

- f) Data hasil simulasi selanjutnya digunakan untuk mengestimasi parameter model dengan tiga estimator, yaitu:
- *Ordinary Least Squares*

$$\hat{\beta}_{OLS} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$$

- *Generalized Least Squares*

$$\hat{\beta}_{GLS} = (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{Y}$$

- *Estimated Generalized Least Squares*

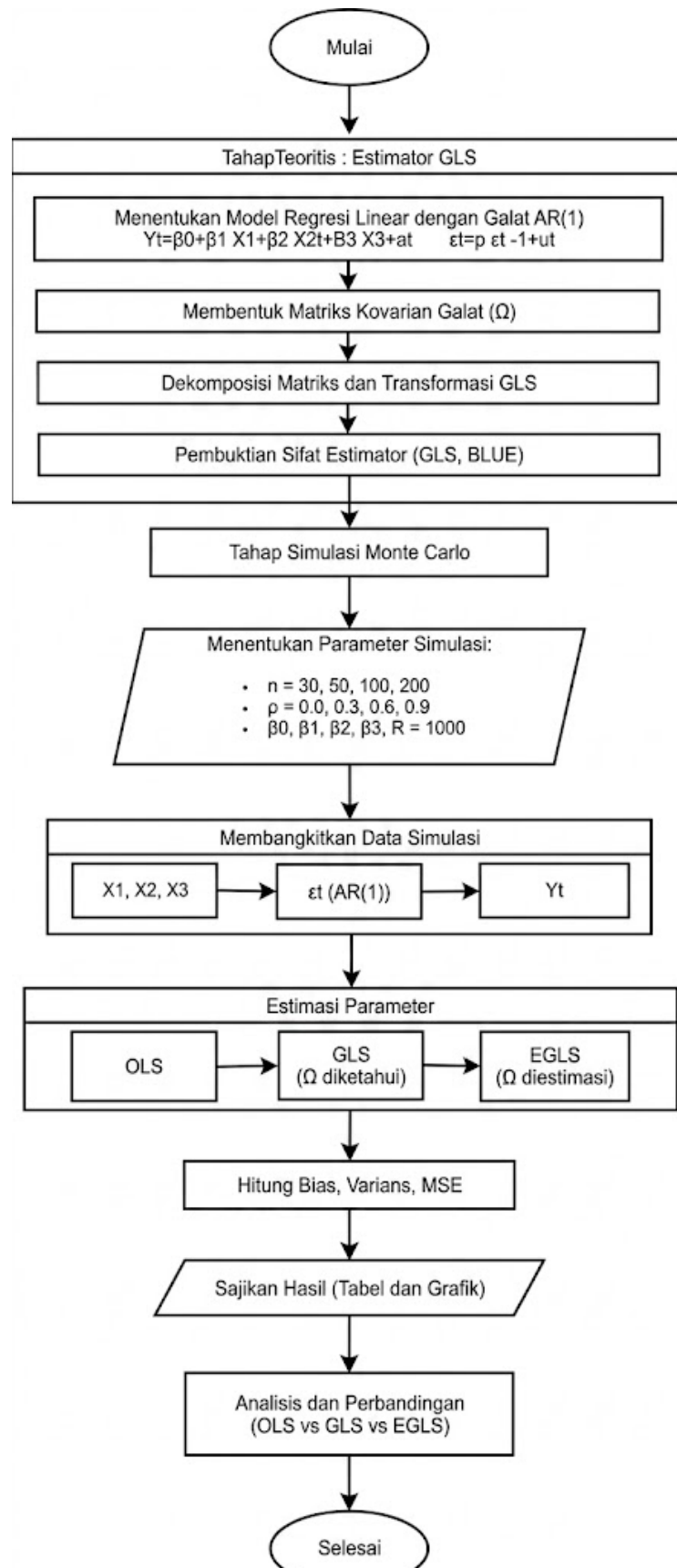
$$\hat{\beta}_{EGLS} = (\mathbf{X}^T \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{Y}$$

dengan

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^n \hat{\varepsilon}_{t-1} \hat{\varepsilon}_t}{\sum_{t=2}^n \hat{\varepsilon}_{t-1}^2}$$

- g) Langkah estimasi parameter pada poin 7 diulangi sebanyak $R = 1000$ kali untuk setiap skenario simulasi.
 - h) Menghitung rata-rata estimasi untuk setiap parameter.
 - i) Evaluasi performa masing-masing estimator menggunakan ukuran berikut:
 - Bias
 - Varians estimator
 - *Mean Squared Error* (MSE)
 - j) Menyajikan hasil simulasi dalam bentuk tabel dan grafik yang memuat nilai bias, varians, dan MSE dari penduga $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ untuk masing-masing estimator.
4. Analisis dan perbandingan hasil.

Dari hasil simulasi tersebut akan dianalisis performa estimator GLS pada model regresi linear dengan galat autoregresif orde satu (AR(1)) dan kemudian membandingkan performa estimator GLS ketika matriks kovarians galat diketahui dan diestimasi (EGLS) dengan estimator OLS berdasarkan kriteria bias, varians, dan MSE pada berbagai tingkat autokorelasi dan ukuran sampel.



Gambar 3.1 Diagram Alur Penelitian

BAB V

KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dan analisis yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa estimator *Generalized Least Squares* (GLS) mampu mengatasi masalah autokorelasi pada model regresi linear dengan melakukan transformasi terhadap model menggunakan matriks kovarians galat yaitu $(\mathbf{L}^T)^{-1}$. Transformasi ini menghasilkan model dengan galat yang tidak berkorelasi sehingga memenuhi asumsi regresi linear klasik. Secara teoretis, estimator GLS merupakan estimator linear, tidak bias, dan memiliki varians minimum dibandingkan estimator linear tidak bias lainnya sehingga memenuhi sifat sebagai *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE) pada kondisi terdapat autokorelasi galat.

Berdasarkan hasil simulasi, estimator GLS menunjukkan performa terbaik dibandingkan estimator *Ordinary Least Squares* (OLS) dan *Estimated Generalized Least Squares* (EGLS) yang ditunjukkan oleh nilai varians dan *Mean Squared Error* (MSE) yang paling kecil pada berbagai ukuran sampel dan tingkat autokorelasi. Estimator EGLS juga menunjukkan performa yang lebih baik dibandingkan estimator OLS karena mampu menghasilkan varians dan MSE yang lebih kecil meskipun secara umum masih sedikit lebih besar dibandingkan estimator GLS. Hal ini menunjukkan bahwa estimator EGLS mampu meningkatkan efisiensi estimasi dengan menggunakan estimasi parameter kovarians galat.

Selain itu, hasil simulasi menunjukkan bahwa peningkatan ukuran sampel menyebabkan nilai varians dan MSE pada semua estimator cenderung menurun yang menunjukkan bahwa estimator menjadi semakin akurat dan stabil. Sebaliknya, semakin tinggi tingkat autokorelasi, varians dan MSE cenderung meningkat. Secara keseluruhan, metode GLS merupakan metode estimasi yang paling efisien, sedangkan metode EGLS dapat digunakan sebagai alternatif yang lebih baik dibandingkan OLS ketika parameter kovarians galat tidak diketahui.

5.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, disarankan untuk mengkaji performa estimator pada model dengan jenis autokorelasi yang lebih kompleks seperti proses autoregresif orde lebih tinggi ($AR(p)$) atau pada model yang juga mengandung heteroskedastisitas sehingga dapat memberikan pemahaman yang lebih luas mengenai efisiensi metode estimasi.

DAFTAR PUSTAKA

- Agresti, A. 2015. *Foundations of Linear and Generalized Linear Models*. Hoboken, NJ: John Wiley and Sons.
- Anton, H., dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Penerbit Elangga.
- Ayinde, K., Apata, E.O., dan Alaba, O.O. 2012. Estimators of linear regression model and prediction under some assumptions violation. *Open Journal of Statistics*. 2(4): 534–546. <https://doi.org/10.4236/ojs.2012.25069>
- Badawaire, A.B., Ayinde, K., dan Olanrewaju, S.O. 2025. Development of a robust generalized least squares Liu estimator to address some basic assumptions violations in linear regression model. *Asian Journal of Probability and Statistics*. 27(5): 12–31. <https://doi.org/10.9734/ajpas/2025/v27i5751>.
- Ayansola, O.A., dan Adejumo, A.O. 2024. On the performance of some estimation methods in models with heteroscedasticity and autocorrelated disturbances (A Monte-Carlo approach). *Mathematical Modelling and Applications*. 9(1): 23–31. <https://doi.org/10.11648/j.mma.20240901.13>.
- Casella, G., dan Berger, R.L. 2002. *Statistical inference*. 2nd Edition. Pacific Grove, CA: Duxbury Press.
- Fang, Y., Koreisha, S.G., dan Shao, Q.-M. 2024. Revisiting the use of generalized least squares in time series regression models. *Journal of Data Science*. 22(4): 486–504. <https://doi.org/10.6339/23-JDS1108>.
- Graybill, F.A. 1976. *Theory and Application of the Linear Model*. Boston: Duxbury Press.
- Greene, W.H. 2012. *Econometric Analysis*. 7th Edition. New York: Pearson Education.
- Gujarati, D.N., dan Porter, D.C. 2009. *Basic Econometrics*. 5th Edition. New York: McGraw-Hill.

- Harville, D.A. 2008. *Matrix Algebra From a Statistician's Perspective*. New York: Springer. ISBN 978-0-387-78356-7.
- Kutner, M.H., Nachtsheim, C.J., Neter, J., dan Li, W. 2005. *Applied linear statistical models*. 5th Edition. Boston, MA: McGraw-Hill Irwin.
- Montgomery, D.C., Jennings, C.L., dan Kulahci, M. 2008. *Introduction to time series analysis and forecasting*. New York: John Wiley and Sons.
- Myers, R.H., dan Milton J.S. 1991. *A First Course In The Theory Of Linear Statistical Models*. Boston: PWS-Kent Publishing Company.
- Oloyede, I. 2022. Bayesian generalized least squares with autocorrelated error. *Journal of Statistical Modelling and Analytics*. 4(2): 45–61. <https://jier.um.edu.my/index.php/JOSMA/article/view/34010>.
- Poojari, S., Acharya, S., Kumar, V.S.G., dan Serrao, V. 2025. Modified least squares ratio estimator for autocorrelated data: Estimation and prediction. *Journal of Computational Mathematics and Data Science*. 14: 1-24. <https://doi.org/10.1016/j.jcmds.2025.100109>.
- Rencher, A.C., dan Schaalje, G.B. 2008. *Linear Models in Statistics*. 2nd Edition. New York: Wiley.
- Rosen, K.H. 2019. *Discrete mathematics and its applications*. 8th Edition. New York: McGraw-Hill Education.
- Usman, M., dan Warsono. 2009. *Teori Model Linear dan Aplikasinya*. Bandung: Sinar Baru Algensindo.
- Wooldridge, J.M. 2013. *Introductory econometrics: A modern approach*. 5th Edition. Mason, OH: South-Western Cengage Learning.
- Zimmerman, D.L. 2020. *Linear model theory with examples and exercises*. Cham: Springer Nature Switzerland AG.