ANALISIS ESTIMABILITAS PARAMETER PADA MODEL LINEAR *NON FULL RANK* MENGGUNAKAN ESELON BARIS DAN PARTISI ESTIMABILITAS

Skripsi

Oleh

ANGGUN DWI MAHARANI
NPM. 2217031120

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

ABSTRACT

PARAMETER ESTIMABILITY ANALYSIS IN NON FULL RANK LINEAR MODELS USING ROW ECHELONS AND ESTIMABILITY PARTITIONS

By

Anggun Dwi Maharani

A linear model is a model that expresses the relationship between a response variable and an explanatory variable through a linear combination of unknown parameters. In practice, linear model theory is widely used in data analysis. However, incomplete or unbalanced data conditions cause the model to be non full rank, preventing parameters from being uniquely estimated, leading to estimability issues. Several approaches exist for analyzing parameter estimability, namely row echelon and partitioned estimability. This study aims to analyze estimability in a non full rank linear model using row echelon and partitioned estimability, and to test hypotheses regarding the linear function of the estimable parameters. The analysis results indicate that not all parameters are individually estimable, but linear combinations can still be uniquely estimated. Furthermore, hypothesis testing indicates a significant influence in the model, and simulation studies demonstrate that the estimator is unbiased and consistent with general linear model theory.

Keywords: Linear Model, Non Full Rank, Estimability, Row Echelon, Partition Estimability

ABSTRAK

ANALISIS ESTIMABILITAS PARAMETER PADA MODEL LINEAR *NON FULL RANK* MENGGUNAKAN ESELON BARIS DAN PARTISI ESTIMABILITAS

Oleh

Anggun Dwi Maharani

Model linear merupakan suatu model yang menyatakan hubungan antara variabel respon dan variabel penjelas melalui kombinasi linear dari parameter-parameter yang tidak diketahui. Dalam penerapannya, teori model linear banyak digunakan dalam menganalisis data, namun kondisi data tidak lengkap atau tidak seimbang menyebabkan model menjadi *non full rank* sehingga parameter tidak dapat diestimasi secara unik dan menimbulkan permasalahan estimabilitas. Ada beberapa pendekatan untuk menganalisis estimabilitas parameter, yaitu eselon baris dan partisi estimabilitas. Pada penelitian ini bertujuan untuk menganalisis estimabilitas pada model linear *non full rank* menggunakan eselon baris dan partisi estimabilitas, serta menguji hipotesis terhadap fungsi linear parameter yang *estimable*. Hasil analisis menunjukkan bahwa tidak semua parameter bersifat *estimable* secara individual, namun kombinasi linear tetap dapat diestimasi secara unik. Selain itu, pengujian hipotesis menunjukkan adanya pengaruh signifikan dalam model, dan studi simulasi menunjukkan bahwa penduga bersifat tak bias serta konsisten dengan teori model linear umum.

Kata-kata kunci: Model Linear, *Non Full Rank*, Estimabilitas, Eselon Baris, Partisi Estimabilitas

ANALISIS ESTIMABILITAS PARAMETER PADA MODEL LINEAR *NON FULL RANK* MENGGUNAKAN ESELON BARIS DAN PARTISI ESTIMABILITAS

ANGGUN DWI MAHARANI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

Judul Skripsi : **ANALISIS ESTIMABILITAS PARAMETER PADA MODEL LINEAR *NON FULL RANK* MENGGUNAKAN ESELON BARIS DAN PARTISI ESTIMABILITAS**

Nama Mahasiswa : Anggun Dwi Maharani

Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031120**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.	**Dr. Bernadhita H. S. U., S.Si., M.Sc.**
NIP 195701011984031020	NIP 199206302023212034

2. Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama
FMIPA Universitas Lampung

Mulyono, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP. 197406112000031002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	:	**Prof. Dr. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.**	....
Sekretaris	:	**Dr. Bernadhita H. S. U., S.Si., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Drs. Nusyirwan, M. Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN PENDIDIKAN TINGGI ... UNIVERSITAS ... FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **07 Mei 2026**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Anggun Dwi Maharani**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031120**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Analisis Estimabilitas Parameter Pada Model Linear *Non Full Rank* Menggunakan Eselon Baris Dan Partisi Estimabilitas**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 07 Mei 2026
Penulis,

Anggun Dwi Maharani

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Anggun Dwi Maharani yang lahir di Kota Bandar Lampung, Provinsi Lampung pada tanggal 6 September 2004. Penulis merupakan anak kedua dari pasangan Bapak Sopi, SP. dan Ibu Suryani.

Penulis menempuh pendidikan Taman Kanak-Kanak Amarta Tani pada tahun 2009-2010. Penulis melanjutkan pendidikan Sekolah Dasar di SDN 64/IV Kota Jambi pada tahun 2010-2016. Kemudian melanjutkan pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMPN 22 Palembang pada tahun 2016-2019 dan melanjutkan pendidikan Sekolah Menengah Atas di SMAN 3 Bandar Lampung pada tahun 2019-2022.

Pada tahun 2022, penulis melanjutkan pendidikan sarjananya di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN).

Pada tahun 2023 penulis aktif dalam Himpunan Jurusan Matematika (HIMATIKA) yang diamanakan menjadi Anggota Bidang Eksternal. Penulis juga berpartisipasi sebagai panitia Dies Natalis Jurusan Matematika (DINAMIKA) pada tahun 2023 dan 2024. Pada bulan Desember 2024 sampai Januari 2025, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Bank Mandiri Area Pangkalpinang. Selanjutnya, pada bulan Juli sampai Agustus 2025 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kelurahan Way Tataan, Kecamatan Teluk Betung Timur Kota Bandar Lampung.

KATA INSPIRASI

"Long live all the mountains we moved, I had the time of my life fighting dragons with you."
(Taylor Swift)

"Dan bahwa manusia hanya memperoleh apa yang telah diusahakannya."
(QS. An-Najm: 39)

"Whatever you're, be a good one."

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat, karunia dan petunjuk-Nya, sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik dan sesuai waktunya. Dengan penuh rasa syukur dan bahagia, saya mempersembahkan rasa terima kasih saya kepada:

Ayah dan Bundaku Tercinta

Skripsi ini saya persembahkan kepada kedua orang tua tercinta yang selalu memberikan kasih sayang, motivasi, bimbingan, dukungan moral dan materi yang tidak terbatas sepanjang perjalanan pendidikan saya. Dengan penuh rasa hormat dan terima kasih atas kasih sayang dan doa yang tidak henti serta terima kasih juga telah menjadi alasan untuk terus berjuang dan tidak menyerah yang telah membentuk pribadi saya seperti sekarang ini.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang sangat berharga sehingga saya dapat menyelesaikan skripsi ini.

Sahabat-sahabatku

Terima kasih kepada sahabat-sahabatku yang telah memberikan tawa, kebaikan, motivasi, serta kebersamaan perjalanan bersama kalian yang tidak ternilai.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas segala rahmat dan anugerah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Analisis Estimabilitas Parameter Pada Model Linear *Non Full Rank* Menggunakan Eselon Baris Dan Partisi Estimabilitas”

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Mustofa Usman, M.A., Ph.D. selaku Pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, saran serta dukungan kepada penulis selama proses penulisan skripsi ini.
2. Ibu Dr. Bernadhita Herindri Samodera Utami, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan, saran dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Drs. Nusyirwan, M. Si. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis selama proses skripsi.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.
5. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing akademik, yang telah memberikan bimbingan dan dukungan selama masa perkuliahan.
6. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang telah berbagi ilmu kepada penulis.

8. Ayah dan bundaku tercinta, yang telah memberikan dukungan dan doa yang tiada lelah tanpa henti, serta selalu mengajarkan penulis untuk selalu bersyukur atas tiap prosesnya. Terima kasih atas kasih sayang, nasihat dan pengertian yang senantiasa mengiringi langkah merupakan kekuatan utama dalam menyelesaikan skripsi ini.

9. Ketiga saudaraku tercinta Putri Sonya, Annisa Almirah, dan M. Fakhri Alvaro, terima kasih atas dukungan dan doa yang selalu diberikan kepada penulis.

10. Untuk keluarga besarku tercinta yang tidak bisa disebutkan satu per satu, yang telah memberikan motivasi kepada penulis hingga saat ini.

11. Aini, Aurel, Farhan, Fika, Kirei, Leony, dan Vani yang menjadi sahabat penulis sejak awal masa perkuliahan. Segala canda, tawa, sedih yang menjadi bagian dari perjuangan yang tidak terasa sendiri. Terima kasih telah menemani, memberikan motivasi dan dukungan tiada henti selama masa perkuliahan.

12. Dhea dan Fitri, sahabat penulis sejak SMP terima kasih selalu memberikan dukungan, tawa, menemani, dan mendengarkan, atas setiap nasihat dan motivasi yang seringkali datang tepat penulis butuhkan.

13. Anggota Bidang Eksternal HIMATIKA Periode 2023, terimakasih banyak karena sudah saling membantu.

14. Teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika angkatan 2022.

15. Terakhir, kepada diri sendiri yang telah berproses atas setiap usaha dan berjuang sejauh ini. Terima kasih selalu kuat dan sudah melawan ketakutan dan tetap bertahan sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini. Ini adalah langkah pertama untuk mencapai tujuan yang lebih besar di masa depan.

Penulis mengakui bahwa skripsi ini masih belum sempurna, banyak kekurangan baik dalam penyajian maupun teknik penulisan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat disarankan untuk memperbaiki skripsi ini ke depannya.

Bandar Lampung, 07 Mei 2026

Anggun Dwi Maharani

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Model linear merupakan suatu model yang menyatakan hubungan antara variabel respon dan variabel penjelas melalui kombinasi linear dari parameter-parameter yang tidak diketahui. Bentuk umum model linear dapat dinyatakan sebagai $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \varepsilon$, dengan $\mathbf{Y}$ adalah vektor respon, X adalah matriks desain, $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor parameter yang akan diestimasi, dan ε adalah vektor *error* (Searle, 1971). Teori model linear menjadi dasar dalam berbagai analisis statistik, seperti analisis regresi dan *Analysis of Variance* (ANOVA) pada rancangan percobaan yang penerapannya luas di bidang ekonometrika, biometrika, serta teknometrika.

Dalam kondisi sempurna, pendugaan parameter dalam model linear dengan metode *Ordinary Least Squares* (OLS) adalah $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$, sebuah solusi unik dengan syarat bahwa $\boldsymbol{X}$ *full rank*, sehingga matriks $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ bersifat nonsingular (Adeyemo & Nwobi, 2014). Namun, data yang dianalisis sering kali membahas kasus data yang hilang dan tidak seimbang. Kondisi tersebut dapat mempengaruhi struktur matriks desain $\boldsymbol{X}$ dan menyebabkan terjadinya ketergantungan linear antar kolomnya sehingga matriks $\boldsymbol{X}$ menjadi (*non full rank*). Akibatnya, $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ bersifat singular dan persamaan normal tidak memiliki solusi tunggal. Kondisi ini menyebabkan pendugaan parameter $\boldsymbol{\beta}$ tidak dapat diestimasi secara unik dan menimbulkan permasalahan estimabilitas.

Estimabilitas merupakan konsep penting dalam model linear karena berkaitan dengan kemampuan suatu parameter atau kombinasi linear dari parameter dapat diestimasi secara unik berdasarkan data yang tersedia. Pentingnya konsep estimabilitas adalah memastikan suatu fungsi linear parameter dapat diestimasi dengan ketidakpastian yang minimal dan bias yang nol, sehingga menghasilkan *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE), yang dapat diperoleh secara unik untuk kombinasi linear parameter yang *estimable* (Milliken, 1971). Searle (1966) menyatakan bahwa estimabilitas ditentukan oleh kriteria yang melibatkan hubungan antara kombinasi linear parameter dan struktur matriks $\boldsymbol{X}$.

Terdapat beberapa penelitian terdahulu yang dilakukan mengenai estimabilitas. Dalam model linear, Elswick, *et al*. (1991) mengusulkan pendekatan sederhana untuk menentukan fungsi linear parameter yang *estimable* pada model linear *non full rank*. Penelitian lainnya dilakukan oleh Nugroho (2013) menunjukkan bahwa melalui dekomposisi QR, struktur rank dari matriks desain dapat digunakan untuk mengidentifikasi keterkaitan linear antar parameter yang berkaitan dengan estimabilitas. Selanjutnya, Jun, *et al*. (2022) meneliti tentang model regresi *non full rank* menunjukkan bahwa kombinasi linear tertentu dari parameter masih dapat diestimasi secara unik melalui konsep *estimable function*, dan pendugaan BLUE untuk fungsi tersebut tetap dapat diperoleh.

Untuk mengidentifikasi fungsi *estimable*, digunakan dua pendekatan yaitu eselon baris dan partisi estimabilitas. Dalam pendekatan aljabar linear, transformasi matriks desain ke dalam bentuk yang lebih sederhana melalui operasi baris elementer menghasilkan bentuk eselon baris (Kolman, 1977). Transformasi ke bentuk eselon baris membantu dalam menunjukkan struktur rank matriks, sehingga hubungan ketergantungan linear antar kolom matriks desain dapat diidentifikasi. Selanjutnya dapat digunakan untuk menentukan basis ruang kolom matriks $\boldsymbol{X}$, yang menjadi dasar dalam menentukan fungsi linear parameter yang bersifat *estimable*.

Permasalahan estimabilitas menjadi semakin penting ketika model dipartisi ke dalam model penuh dan model terreduksi. Seely & Birkes (1980) mengembangkan pendekatan partisi estimabilitas untuk menganalisis hubungan estimabilitas antar model melalui ruang model dan rank matriks desain. Pendekatan ini memberikan dasar teori untuk menentukan fungsi parameter yang *estimable* pada suatu model tetap *estimable* pada model lainnya.

Berdasarkan latar belakang tersebut, dalam penelitian ini akan menganalisis estimabilitas parameter pada model linear *non full rank* menggunakan eselon baris dan partisi estimabilitas, serta menerapkannya dalam pendugaan dan penguji hipotesis terhadap kombinasi linear parameter yang *estimable*.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengidentifikasi fungsi linear parameter yang *estimable* pada model linear *non full rank* melalui pendekatan eselon baris.
2. Mengkaji estimabilitas pada model linear terpartisi menggunakan partisi estimabilitas.
3. Melakukan pengujian hipotesis terhadap kombinasi linear parameter yang *estimable* pada model linear.
4. Mengevaluasi sifat tak bias penduga dan statistik uji pada model linear *non full rank* melalui studi simulasi.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Memberikan pemahaman tentang penerapan teori estimabilitas pada model linear *non full rank* menggunakan pendekatan eselon baris dan partisi estimabilitas.
2. Menambah referensi akademik terkait analisis estimabilitas pada model linear *non full rank*, khususnya dalam data tidak seimbang atau data dengan pengamatan hilang.
3. Memberikan ilustrasi numerik melalui simulasi mengenai sifat tak bias penduga dan statistik uji pada model linear *non full rank*.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep-Konsep Matriks

Konsep-konsep matriks merupakan dasar penting dalam analisis model linear, terutama yang berkaitan dengan struktur matriks desain. Pemahaman terkait operasi matriks, rank, dan invers digunakan untuk mengkaji sifat model, termasuk dalam menentukan estimabilitas parameter. Oleh karena itu, akan membahas konsep-konsep matriks yang mendukung analisis selanjutnya.

2.1.1 Definisi Matriks

Definisi 2.1.1
Matriks adalah tatanan angka-angka dalam bentuk empat persegi dari bilangan-bilangan yang dinamakan entri. Ukuran atau ordo matriks dapat dinyatakan dengan banyaknya baris (garis horizontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut. Entri dari sebuah matriks $\mathbf{A}$ berada pada baris ke-i dan kolom ke-j yang dinotasikan dengan a_{ij} (Usman & Warsono, 2009).

Secara umum bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks di atas mempunyai ukuran m banyak baris dan n banyak kolom yang dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$, dengan :

a_{ij} = elemen atau unsur matriks,
i = 1,2,3,$\ldots$,m (indeks baris),
j = 1,2,3,$\ldots$,n (indeks kolom).

Contoh

Misalkan diberikan suatu matriks $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$.

Matriks $\mathbf{A}$ merupakan matriks berukuran 2×2, dengan elemen $a_{11} = 6$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 8$, dan $a_{22} = 3$.

2.1.2 Transpos Matriks

Definisi 2.1.2

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran $m \times n$, maka transpos dari $\boldsymbol{A}$, yang dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}'$, didefinisikan sebagai matriks berukuran $n \times m$ yang dihasilkan dengan menukar baris dan kolom matriks $\boldsymbol{A}$ (Usman & Warsono, 2009).

Teorema 1

Jika ukuran matriks sedemikian rupa sehingga operasi yang dinyatakan dapat dilakukan, maka:

1. $(\boldsymbol{A}')' = \boldsymbol{A}$
2. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}'$
3. $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' - \boldsymbol{B}'$
4. $(c\boldsymbol{A})' = c\boldsymbol{A}'$
5. $(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$

(Anton & Rorres, 2014).

Bukti

Dengan definisi transpos $(\boldsymbol{A}')_{ij} = \boldsymbol{A}_{ji}$ dan c adalah suatu skalar.

1. $(\boldsymbol{A}')' = \boldsymbol{A}$
   $((\boldsymbol{A}')')_{ij} = (\boldsymbol{A}')_{ji}$
   $((\boldsymbol{A}')')_{ij} = \boldsymbol{A}_{ij}$
   maka $(\boldsymbol{A}')' = \boldsymbol{A}$.

2. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}'$
   $((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})')_{ij} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})_{ji}$
   $((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})')_{ij} = \boldsymbol{A}_{ji} + \boldsymbol{B}_{ji}$
   $((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})')_{ij} = (\boldsymbol{A}')_{ij} + (\boldsymbol{B}')_{ij}$
   maka $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}'$.

3. $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' - \boldsymbol{B}'$
   $((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})')_{ij} = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})_{ji}$
   $((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})')_{ij} = \boldsymbol{A}_{ji} - \boldsymbol{B}_{ji}$
   $((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})')_{ij} = (\boldsymbol{A}')_{ij} - (\boldsymbol{B}')_{ij}$
   maka $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' - \boldsymbol{B}'$.

4. $(c\boldsymbol{A})' = c\boldsymbol{A}'$
   $((c\boldsymbol{A})')_{ij} = (c\boldsymbol{A})_{ji}$
   $((c\boldsymbol{A})')_{ij} = c\boldsymbol{A}_{ji}$
   $((c\boldsymbol{A})')_{ij} = c(\boldsymbol{A}')_{ij}$
   maka $(c\boldsymbol{A})' = c\boldsymbol{A}'$.

5. $(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$
   Misalkan:
   $\boldsymbol{A}$ matriks berukuran $m \times k$
   $\boldsymbol{B}$ matriks berukuran $k \times n$
   $(\boldsymbol{AB})_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}$
   $((\boldsymbol{AB})')_{ij} = (\boldsymbol{AB})_{ji}$
   $((\boldsymbol{AB})')_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{js} b_{si}$

   Untuk $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$:
   $(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}')_{ij} = \sum_{s=1}^{k} (\boldsymbol{B}')_{is} (\boldsymbol{A}')_{sj}$
   $(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}')_{ij} = \sum_{s=1}^{k} b_{si} a_{js}$
   $(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}')_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{js} b_{si}$
   maka $(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$.

Contoh

Diberikan matriks $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ dan transpos dari matriks $\boldsymbol{A}$ adalah $\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

2.1.3 Invers Matriks

Definisi 2.1.3

Jika $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks bujur sangkar dan jika matriks $\boldsymbol{B}$ dapat dicari sehingga $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$, maka matriks $\boldsymbol{A}$ dapat dibalik (*invertible*) dan matriks $\boldsymbol{B}$ merupakan invers dari $\boldsymbol{A}$ dan dapat ditulis $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$. Matriks $\boldsymbol{A}$ mempunyai invers apabila matriks $\boldsymbol{A}$ dapat dibalik (*invertible*) dimana $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ dan matriks $\boldsymbol{A}$ disebut juga dengan matriks nonsingular dan sebaliknya jika tidak memiliki invers disebut singular (Anton & Rorres, 2014). Berikut merupakan metode untuk menentukan invers.

1. Metode determinan khusus untuk matriks 2×2

   Teorema 2

   Sebuah matriks $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ adalah *invertible* jika dan hanya jika $ad - bc \neq 0$, sehingga invers dalam rumus sebagai berikut.

   $$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

   Bukti

   Untuk menunjukkan bahwa $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ benar dan akan dibuktikan.

   Hitung $\boldsymbol{AA}^{-1}$

   $$\boldsymbol{AA}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-dc & -bc+ad \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Hitung $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ca+ac & -cb+ad \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Karena $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$, maka

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, matriks **A** *invertible* jika dan hanya jika $ad-bc \neq 0$ (Anton & Rorres, 2014).

Contoh

Carilah invers dari matriks $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$.

Determinan $\boldsymbol{A}$ adalah $\det(\boldsymbol{A}) = (6)(3) - (1)(8) = 10$.

Sehingga $\boldsymbol{A}$ *invertible* dan inversnya adalah

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{8}{10} & \frac{6}{10} \end{bmatrix}.$$

2. Metode Adjoin (Kofaktor)

Definisi 2.1.4

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $n \times n$ dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari $\boldsymbol{A}$. Transpos dari matriks ini disebut adjoin dari $\boldsymbol{A}$ dan dinotasikan dengan $\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})$ (Anton & Rorres, 2014).

Teorema 3

Jika matriks $\boldsymbol{A}$ adalah *invertible*, maka

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \operatorname{adj}(\boldsymbol{A})$$

Bukti.

Dapat ditunjukkan $\boldsymbol{A} \operatorname{adj}(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A})\, \boldsymbol{I}$.

$$\boldsymbol{A} \operatorname{adj}(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Entri pada baris ke-i dan kolom ke-j dari $\boldsymbol{A} \operatorname{adj}(\boldsymbol{A})$ adalah

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}.$$

Jika $i = j$, maka ekspansi kofaktor dari $\det(\boldsymbol{A})$ sepanjang baris ke-i dari $\boldsymbol{A}$ dan jika $i \neq j$, maka a dan kofaktor berasal dari baris yang berbeda dari $\boldsymbol{A}$, sehingga nilainya adalah nol. Oleh karena itu,

$$\boldsymbol{A}\,\mathrm{adj}(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} \det(\boldsymbol{A}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(\boldsymbol{A}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(\boldsymbol{A}) \end{bmatrix} = \det(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{I}.$$

Jika $\boldsymbol{A}$ *invertible*, $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$. Oleh karena itu, dapat ditulis sebagai

$$\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}[\boldsymbol{A}\,\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})] = \boldsymbol{I} \quad \text{atau} \quad \boldsymbol{A}\left[\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})\right] = \boldsymbol{I}.$$

Sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\mathrm{adj}(\boldsymbol{A}).$$

(Anton & Rorres, 2014)

Contoh

Diberikan matriks $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, tentukan invers dari matriks tersebut.

Menentukan determinan dari matriks **A**

$$\det(\boldsymbol{A}) = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = 1(1-0) - 2(0-8) + 3(0-2)$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = 1 + 16 - 6 = 11.$$

Karena $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$, maka matriks $\boldsymbol{A}$ *invertible*. Kofaktor dari $\boldsymbol{A}$ adalah

$$\begin{aligned} &C_{11} = 1, && C_{12} = 8, && C_{13} = -2, \\ &C_{21} = -2, && C_{22} = -5, && C_{23} = 4, \\ &C_{31} = 5, && C_{32} = -4, && C_{33} = 1. \end{aligned}$$

Jadi matriks kofaktor adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

dan adjoin dari $\boldsymbol{A}$ adalah transpos dari matriks kofaktor, sehingga

$$\text{adj}(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 8 & -5 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 8 & -5 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{8}{11} & -\frac{5}{11} & -\frac{4}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}.$$

3. Eliminasi Gauss Jordan

Definisi 2.1.5

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks persegi $n \times n$. Matriks $\boldsymbol{A}$ *invertible* jika dan hanya jika matriks tersebut ekuivalen baris dengan matriks identitas $\boldsymbol{I_n}$. Oleh karena itu, invers matriks $\boldsymbol{A}$ dapat ditentukan melalui langkah-langkah berikut.

(a) Bentuk matriks gabungan $[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I_n}]$.

(b) Lakukan operasi baris elementer hingga bagian kiri matriks gabungan direduksi menjadi matriks identitas $\boldsymbol{I_n}$.

(c) Jika bagian kiri telah menjadi matriks identitas, maka bagian kanan matriks gabungan merupakan invers dari $\boldsymbol{A}$, yaitu $\boldsymbol{A}^{-1}$.

(d) Jika bagian kiri tidak dapat direduksi menjadi $\boldsymbol{I_n}$, maka matriks $\boldsymbol{A}$ tidak *invertible* (Anton & Rorres, 2014).

Contoh

Diberikan matriks $\boldsymbol{A}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Carilah invers dari matriks $\boldsymbol{A}$.

Akan mereduksi $\boldsymbol{A}$ menjadi matriks identitas dengan operasi baris dan secara bersamaan menetapkan operasi tersebut pada $\boldsymbol{I}$ untuk menghasilkan $\boldsymbol{A}^{-1}$. Sehingga matriks akhir akan memiliki bentuk $\left[\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{A}^{-1}\right]$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{B_3 = B_3 - 2B_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{B_3 = B_3 + 4B_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{B_3 = \frac{1}{11} B_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{11} & \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{array}\right] \xrightarrow[B_1 = B_1 - 3B_3]{B_2 = B_2 - 4B_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{17}{11} & -\frac{12}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{11} & -\frac{5}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{11} & \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{array}\right] \xrightarrow{B_1 = B_1 - 2B_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{11} & -\frac{5}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{11} & \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{array}\right]$$

Maka,

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{8}{11} & -\frac{5}{11} & -\frac{4}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}.$$

2.1.4 Partisi Matriks

Definisi 2.1.6

Sebuah matriks dapat dibagi atau dipartisi menjadi beberapa matriks yang ukurannya lebih kecil dengan menggunakan garis pemisah horizontal di antara baris tertentu dan vertikal di antara kolom tertentu. Matriks-matriks yang ukurannya kecil hasil dari partisi matriks disebut submatriks (Anton & Rorres, 2014).

Submatriks yang terbentuk disebut sebagai blok matriks. Partisi tidak mengubah nilai elemen-elemen matriks, tetapi hanya menyusun kembali elemen ke dalam bentuk blok untuk mempermudah operasi matriks (Ruminta, 2009). Gambaran secara umum bentuk partisi matriks adalah sebagai berikut.

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_{11}} & \boldsymbol{A_{12}} \\ \boldsymbol{A_{21}} & \boldsymbol{A_{22}} \end{bmatrix}$$

Contoh

Tentukan submatriks yang terbentuk dari partisi matriks berikut.

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ \hline -3 & -1 & 5 & 4 \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{A_{11}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A_{12}} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A_{21}} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A_{22}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix}$$

2.1.5 Ruang Baris, Ruang Kolom, dan Ruang *Null*

Definisi 2.1.7

Ruang baris dari matriks $\boldsymbol{A}$, dinotasikan dengan $\mathcal{R}(\boldsymbol{A})$, adalah subruang dari $\mathbb{R}^n$ yang terdiri dari semua kombinasi linear vektor-vektor baris matriks $\boldsymbol{A}$, yaitu

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{A}) = \{\text{kombinasi linear dari } \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_m\}.$$

Ruang kolom dari matriks $\boldsymbol{A}$, dinotasikan dengan $\mathcal{C}(\boldsymbol{A})$, adalah subruang dari $\mathbb{R}^m$ yang terdiri dari semua kombinasi linear vektor-vektor kolom matriks $\boldsymbol{A}$, yaitu

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{A}) = \{\text{kombinasi linear dari } \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n\}.$$

Ruang *null* dari matriks $\boldsymbol{A}$, dinotasikan dengan $\mathcal{N}(\boldsymbol{A})$, adalah himpunan semua vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ yang memenuhi sistem persamaan homogen $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ (Anton & Rorres, 2014).

Teorema 4

Suatu sistem persamaan linear $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ konsisten jika dan hanya jika vektor $\boldsymbol{b}$ berada dalam ruang kolom matriks $\boldsymbol{A}$.

Bukti

Jika sistem persamaan $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ konsisten, maka terdapat vektor $\boldsymbol{x}$ sehingga

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}.$$

Perkalian matriks $\boldsymbol{Ax}$ menyatakan bahwa $\boldsymbol{b}$ merupakan kombinasi linear dari kolom-kolom matriks $\boldsymbol{A}$. Dengan demikian, $\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}(\boldsymbol{A})$. Sebaliknya, jika $\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}(\boldsymbol{A})$, maka $\boldsymbol{b}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear kolom-kolom $\boldsymbol{A}$, sehingga terdapat vektor $\boldsymbol{x}$ yang memenuhi $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Oleh karena itu, sistem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ konsisten (Anton & Rorres, 2014).

Teorema 5

Operasi baris elementer tidak mengubah ruang *null* suatu matriks.

Bukti

Misalkan matriks $\boldsymbol{B}$ diperoleh dari $\boldsymbol{A}$ melalui operasi baris elementer. Operasi tersebut ekuivalen dengan mengalikan $\boldsymbol{A}$ dengan suatu matriks elementer $\boldsymbol{E}$, sehingga

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{EA},$$

dengan $\boldsymbol{E}$ *invertible*. Untuk setiap vektor $\boldsymbol{x}$, berlaku

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}.$$

Karena $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{EA}$, maka

$$\boldsymbol{Bx} = (\boldsymbol{EA})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{Ax}).$$

Jika $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$, maka

$$\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{E}0 = \boldsymbol{0}.$$

Sebaliknya, jika $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$, maka

$$\boldsymbol{EAx} = \boldsymbol{0}.$$

Karena $\boldsymbol{E}$ *invertible*, maka diperoleh

$$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}.$$

Sehingga, himpunan solusi sistem homogen tidak berubah, yaitu $\mathcal{N}(\boldsymbol{A}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{B})$ (Anton & Rorres, 2014).

Teorema 6

Operasi baris elementer tidak mengubah ruang baris suatu matriks.

Bukti

Operasi baris elementer menghasilkan baris-baris baru yang merupakan kombinasi linear baris-baris sebelumnya. Setiap baris matriks hasil operasi baris dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear baris-baris matriks, karena matriks elementer bersifat *invertible*, maka ruang baris tetap sama atau ruang yang direntang oleh baris-baris matriks tidak mengubah, sehingga $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{B})$ (Anton & Rorres, 2014).

Contoh

Misalkan diberikan matriks

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

matriks $\boldsymbol{B}$ diperoleh melalui operasi baris elementer dari matriks $\boldsymbol{A}$. Tentukan ruang baris, ruang kolom, dan ruang *null* dari matriks $\boldsymbol{A}$.

Penyelesaian

- Ruang baris

  Berdasarkan Teorema 6, maka baris-baris tak nol dari matriks $\boldsymbol{B}$ membentuk basis ruang baris. Dengan demikian, basis ruang baris matriks $\boldsymbol{A}$ adalah

  $$\text{Basis } \mathcal{R}(\boldsymbol{A}) = \{(1, -1, 3),\ (0, 1, -19)\}.$$

- Ruang kolom

  Operasi baris elementer mengubah ruang kolom, sehingga basis ruang kolom diambil dari kolom matriks $\boldsymbol{A}$. Kolom pivot $\boldsymbol{B}$ berada pada kolom ke-1 dan ke-2. Maka, basis ruang kolom matriks $\boldsymbol{A}$ adalah

$$\text{Basis } \mathcal{C}(\boldsymbol{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Ruang *null*

  Ruang *null* ditentukan dari sistem persamaan homogen, berdasarkan bentuk eselon baris $\boldsymbol{B}$:

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 0,$$

$$x_2 - 19x_3 = 0.$$

  Dari persamaan kedua diperoleh $x_2 = 19x_3$. Substitusi ke persamaan pertama menghasilkan $x_1 = 16x_3$. Dengan memisalkan $x_3 = t$, maka solusi umum dapat ditulis sebagai $x = t(16, 19, 1)$. Dengan demikian, basis ruang *null* matriks $\boldsymbol{A}$

$$\text{Basis } \mathcal{N}(\boldsymbol{A}) = \{(16, 19, 1)\}.$$

2.1.6 Rank

Definisi 2.1.8

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $m \times n$. Rank dari matriks $\boldsymbol{A}$, dinotasikan dengan *rank*($\boldsymbol{A}$) atau $r(\boldsymbol{A})$ adalah dimensi ruang kolom dari matriks $\boldsymbol{A}$. Karena dimensi ruang kolom sama dengan dimensi ruang baris, maka rank juga sama dengan dimensi ruang baris matriks $\boldsymbol{A}$. Rank dari matriks persegi atau persegi panjang $\boldsymbol{A}$ didefinisikan sebagai jumlah kolom atau baris yang linear independen dari $\boldsymbol{A}$ (Anton & Rorres, 2014).

Teorema 7

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah suatu matriks. Maka ruang baris dan ruang kolom dari matriks $\boldsymbol{A}$ memiliki dimensi yang sama.

$$\dim(\mathcal{R}(\boldsymbol{A})) = \dim(\mathcal{C}(\boldsymbol{A})) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}).$$

Bukti

Operasi baris elementer tidak mengubah dimensi ruang baris atau rank matriks. Oleh karena itu, jika $\boldsymbol{R}$ adalah bentuk eselon baris dari matriks $\boldsymbol{A}$, maka berlaku

$$\dim(\mathcal{R}(\boldsymbol{A})) = \dim(\mathcal{R}(\boldsymbol{R})) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{R}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}).$$

Bahwa ruang baris dan ruang kolom matriks $\boldsymbol{R}$ memiliki dimensi yang sama. Namun, dimensi ruang baris $\boldsymbol{R}$ adalah jumlah baris tak nol dan dimensi ruang kolom $\boldsymbol{R}$ adalah jumlah 1 utama. Karena jumlah baris tak nol sama dengan jumlah 1 utama, maka ruang baris dan ruang kolom memiliki dimensi yang sama (Anton & Rorres, 2014).

Contoh

Misalkan diberikan matriks

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Untuk menentukan rank matriks $\boldsymbol{A}$, matriks tersebut direduksi ke bentuk eselon baris. Dengan operasi baris elementer diperoleh bentuk eselon baris

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks $\boldsymbol{A}^*$ memiliki dua baris tak nol dan dua elemen pivot. Oleh karena itu, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 2$.

2.1.7 *Generalized Inverse*

Definisi 2.1.9 *Generalized Inverse* atau *g-inverse*
Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran $m \times n$. Suatu matriks $\boldsymbol{A}^-$ berukuran $n \times m$ disebut *generalized inverse* dari matriks $\boldsymbol{A}$ apabila memenuhi $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$. *Generalized inverse* selalu ada untuk setiap matriks $\boldsymbol{A}$, tetapi tidak selalu tunggal (Rao & Mitra, 1971).

Untuk setiap matriks $\boldsymbol{A}$, terdapat sebuah matriks $\boldsymbol{A}^-$ unik yang merupakan *generalized inverse* dari $\boldsymbol{A}$ yang memenuhi empat kondisi berikut:

1. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$;
2. $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-} = \boldsymbol{A}^{-}$;
3. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$ atau simetrik;
4. $(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})' = \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$ atau simetrik.

Definisi 2.1.10 *Moore Penrose inverse* atau *pseudoinverse*
Pseudoinverse dari sebuah matriks $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $\boldsymbol{A}^{-}$ yang memenuhi (1) sampai (4) kondisi tersebut dan keempat persamaan tersebut dikenal sebagai *Penrose equations* (Israel & Greville, 2003).

Teorema 8
Setiap matriks $\boldsymbol{A}$ memiliki *g-inverse*.

Bukti
Jika $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, maka $\boldsymbol{A}^{-} = \boldsymbol{0}$ memenuhi $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}$. Jika $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ dan $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = r > 0$, maka $\boldsymbol{A}$ dapat difaktorisasi rank sebagai

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C},$$

dengan $\boldsymbol{B}$ berukuran $m \times r$, $\boldsymbol{C}$ berukuran $r \times n$, dan $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{C}) = r$. Karena $\boldsymbol{B}$ dan $\boldsymbol{C}$ *full rank*, maka matriks $\boldsymbol{B}^{'}\boldsymbol{B}$ dan $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{'}$ *nonsingular*. Sehingga $\boldsymbol{A}^{-}$ didefinisikan sebagai

$$\boldsymbol{A}^{-} = \boldsymbol{C}^{'}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{'})^{-1}(\boldsymbol{B}^{'}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{'}.$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\big(\boldsymbol{C}^{'}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{'})^{-1}(\boldsymbol{B}^{'}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{'}\big)\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}.$$

Karena

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{'}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{'})^{-1} = \boldsymbol{I} \quad \text{dan} \quad (\boldsymbol{B}^{'}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{'}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I},$$

maka diperoleh

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{I}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}.$$

Dengan demikian, $\boldsymbol{A}^{-}$ memenuhi $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, sehingga merupakan *g-inverse* dari $\boldsymbol{A}$ (Usman & Warsono, 2009).

Proposisi 1

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran $m \times n$ dengan rank baris penuh $r(\boldsymbol{A}) = m$, maka salah satu *generalized inverse* dari $\boldsymbol{A}$ adalah

$$\boldsymbol{A}^{-} = \boldsymbol{A}^{'}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{'})^{-1}.$$

Bukti

Karena $r(\boldsymbol{A}) = m$, maka $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{'}$ berukuran $m \times m$ dan $r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{'}) = r(\boldsymbol{A}) = m$. Dengan demikian, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{'}$ memiliki rank penuh dan nonsingular, sehingga $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{'})^{-1}$ ada. Misalkan $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}^{'}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{'})^{-1}$, maka diperoleh

$$\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{'}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{'})^{-1}\right)\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{'})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{'})^{-1}\boldsymbol{A}.$$

Karena $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{'})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{'})^{-1} = \boldsymbol{I}_m$, maka

$$\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}.$$

Sehingga $\boldsymbol{G}$ memenuhi definisi *generalized inverse* dari $\boldsymbol{A}$ (Israel & Greville, 2003).

Contoh

Misalkan diberikan matriks

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \text{rank}(\boldsymbol{A}) = 1.$$

Karena $\text{rank}(\boldsymbol{A}) = 1$, maka $\boldsymbol{A}$ dapat difaktorisasi sebagai $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}$, dengan $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, maka $\text{rank}(\boldsymbol{B}) = \text{rank}(\boldsymbol{C}) = 1$. Karena $\boldsymbol{B}$ dan $\boldsymbol{C}$ full rank, maka $\boldsymbol{B}^{'}\boldsymbol{B}$ dan $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{'}$ bersifat *nonsingular*. Hitung

$$\boldsymbol{B}^{'}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5,$$

dan

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5.$$

Sehingga

$$(\boldsymbol{B}^{'}\boldsymbol{B})^{-1} = \frac{1}{5}, \qquad (\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{'})^{-1} = \frac{1}{5}.$$

Berdasarkan Teorema 8,

$$\boldsymbol{A}^{-} = \boldsymbol{C}^{'}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{'})^{-1}(\boldsymbol{B}^{'}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{'}.$$

$$\boldsymbol{A}^{-} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Maka diperoleh

$$\boldsymbol{A}^{-} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.2 Model Linear Umum

Model linear merupakan suatu model yang menyatakan hubungan antara variabel respon dan variabel penjelas melalui kombinasi linear dari parameter-parameter yang tidak diketahui. Secara umum model linear dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.1}$$

dengan:
$\mathbf{Y}$: vektor peubah acak berukuran $n \times 1$ yang teramati;
$\mathbf{X}$: matriks desain berukuran $n \times p$;
$\boldsymbol{\beta}$: vektor parameter berukuran $p \times 1$ yang tidak diketahui;
$\boldsymbol{\varepsilon}$: vektor peubah acak berukuran $n \times 1$ yang tidak teramati.
Dengan $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ dan $Var(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 I$.

Model linear dengan n pengamatan dan p parameter, pendekatan matriks dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Model linear umum mempunyai pengertian-pengertian khusus yang ditentukan oleh distribusi dari $\boldsymbol{\varepsilon}$, struktur matriks kovarian Σ, dan rank dari matriks $\boldsymbol{X}$. Jika rank dari matriks $\boldsymbol{X}$ sama dengan jumlah kolomnya ($\mathrm{rank}(\boldsymbol{X}) = p$) dinamakan *full rank* dan jika rank matriksnya tidak penuh atau $\mathrm{rank}(\boldsymbol{X}) < p$ maka modelnya dinamakan *non full rank* model (Usman & Warsono, 2009).

Dalam model linear umum, variabel kategorik seperti perlakuan dan ulangan direpresentasikan dengan menggunakan variabel indikator (*dummy*). Untuk menggambarkan struktur kategorik tersebut, salah satu bentuk representasi yang umum digunakan adalah model dua arah tanpa interaksi:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \varepsilon_{ij}, \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \end{array} \tag{2.2}$$

dengan i menunjukkan kategori perlakuan dan j menunjukkan kategori ulangan pengamatan. Model (2.2) merupakan struktur model untuk menunjukkan parameter-parameter yang akan direpresentasikan dalam vektor parameter $\boldsymbol{\beta}$ dan matriks desain $\boldsymbol{X}$ pada model linear umum (2.1) (Searle, 1971).

2.3 Model Linear *Non Full Rank*

Model linear disebut *non full rank* apabila rank dari matriks desain $\boldsymbol{X}$ lebih kecil dari jumlah parameter atau *non full rank* muncul ketika matriks desain $\boldsymbol{X}$ dalam model linear tidak memiliki rank penuh. Kondisi tersebut sering terjadi pada desain yang tidak seimbang (*unbalanced design*). Parameter $\boldsymbol{\beta}$ umumnya diestimasi menggunakan *Ordinary Least Square* (OLS) dengan persamaan $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$. Estimasi ini dapat diperoleh secara unik apabila matriks desain $\boldsymbol{X}$ memiliki rank penuh (*full rank*), yaitu $\operatorname{rank}(\boldsymbol{X}) = p$, sehingga matriks $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ bersifat nonsingular dan memiliki invers.

Jika $\operatorname{rank}(\boldsymbol{X}) < p$ model disebut *non full rank*, maka matriks $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ menjadi *singular* dan tidak memiliki invers. Sehingga, solusi persamaan normal $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$ bersifat tidak tunggal, hal ini terjadi karena adanya ketergantungan linear di antara kolom-kolom matriks desain yang menyebabkan parameter tidak dapat diestimasi. Pada model *non full rank*, analisis difokuskan pada fungsi-fungsi linear dari parameter yang dapat diestimasi dengan unik atau disebut dengan *estimable function* (Rencher & Schaalje, 2008).

2.4 Estimabilitas

Definisi 2.4.1

Misalkan dalam model (2.1), $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}$ merupakan fungsi linear dari parameter $\boldsymbol{\beta}$, yaitu kombinasi linear $l_1\beta_1 + l_2\beta_2 + \cdots + l_p\beta_p$, dengan $\boldsymbol{l}' = (l_1, l_2, \ldots, l_p)$ adalah vektor baris konstan berukuran $1 \times p$. Fungsi $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}$ dikatakan *estimable* jika dan hanya jika terdapat penduga takbias $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}$, yang merupakan fungsi linear Y_i dari $\boldsymbol{Y}$, yaitu $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{Y}$, sehingga $E(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}$. Secara ekuivalen, fungsi linear parameter $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}$ dikatakan *estimable* jika dan hanya jika vektor $\boldsymbol{l}$ berada dalam ruang baris matriks desain $\boldsymbol{X}$, yaitu $\boldsymbol{l} \in \mathcal{R}(\boldsymbol{X})$ (Usman & Warsono, 2009).

Misalkan $\boldsymbol{L\beta}$, dengan $\boldsymbol{L}$ adalah matriks konstan $s \times p$ dan jika ada matriks $\boldsymbol{A}$ yang memenuhi Persamaan (2.3) sebagai berikut

$$E(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{L\beta} \tag{2.3}$$

maka $\boldsymbol{L\beta}$ dikatakan *estimable*. Dari Persamaan (2.1), diketahui bahwa $E(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{X\beta}$, maka dari Persamaan (2.3) diperoleh $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}$ atau secara ekuivalen

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{L}\end{pmatrix} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{X}). \tag{2.4}$$

Pendugaan fungsi parameter *estimable* dapat dinyatakan menggunakan *g-inverse* (Elfaki, *et al.*, 2025).

Teorema 9

Jika $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}$ merupakan fungsi parameter *estimable*, maka penduga kuadrat terkecil $\boldsymbol{l}'\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{l}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$ bersifat unik dan invarian terhadap *g-inverse* $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-}$.

Bukti

Jika $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}$ *estimable*, maka terdapat vektor konstan $\boldsymbol{a}$ sehingga $\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{a}'\boldsymbol{X}$ Oleh karena itu,

$$\boldsymbol{l}'\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{l}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$$

$$\boldsymbol{l}'\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{a}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}.$$

Matriks $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-}\boldsymbol{X}'$ merupakan matriks proyeksi ke ruang kolom $\boldsymbol{X}$ dan tidak bergantung pada pilihan *g-inverse*. Oleh karena itu, $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$ tidak berubah untuk berbagai *g-inverse*, sehingga penduga $\boldsymbol{l}'\hat{\boldsymbol{\beta}}$ bersifat unik dan invarian terhadap *g-inverse* (Elfaki, *et al.*, 2025).

2.5 Eselon Baris Matriks Desain X

Asumsikan model (2.1), $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}$ adalah fungsi *estimable* jika dan hanya jika terdapat vektor $\boldsymbol{a}$ sehingga $\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{a}'\boldsymbol{X}$ (Graybill, 1976). Sebagai contoh, jika $\boldsymbol{\beta}' = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p]$ dan tertarik untuk menduga $\boldsymbol{\beta_1}$, $\boldsymbol{\beta_1}$ *estimable* jika ada $\boldsymbol{a}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{X} = [1, 0, \ldots, 0]$. Ketika matriks $\boldsymbol{X}$ *full rank*, maka $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ ada. Matriks $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$ berukuran $p \times n$ dan merupakan invers kiri dari $\boldsymbol{X}$, maka $((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}')\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}$. Dengan kata lain, semua parameter $\boldsymbol{\beta}$ *estimable* jika $\boldsymbol{X}$ *full rank*.

Apabila matriks $\boldsymbol{X}$ *non full rank*, maka dapat dilakukan penyederhanaan melalui bentuk eselon baris untuk menentukan parameter $\boldsymbol{\beta}$ yang *estimable*. Menurut Kolman, (1977), bentuk eselon baris dari matriks desain dapat digunakan untuk menentukan fungsi *estimable* dalam model linear *non full rank*. Dengan melakukan operasi baris elementer terhadap $\boldsymbol{X}$, operasi baris elementer seperti menukar dua baris, mengalikan suatu baris dengan konstanta tak nol, dan menambahkan kelipatan suatu baris ke baris lain. Tujuan dari operasi baris ini adalah mentransformasikan matriks desain $\boldsymbol{X}$ ke dalam bentuk eselon baris sehingga terdapat $r = rank(\boldsymbol{X})$ baris tak nol, sedangkan baris-baris lainnya merupakan baris nol.

Setiap operasi baris elementer pada matriks desain $\boldsymbol{X}$ dapat dinyatakan sebagai perkalian $\boldsymbol{X}$ oleh suatu matriks bujur sangkar $n \times n$ *full rank*, yang disebut matriks operasi baris elementer dan dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}$. Matriks $\boldsymbol{A}$ diperoleh dengan menerapkan operasi baris elementer yang sama pada matriks identitas berukuran $n \times n$. Sebagai contoh, operasi baris yang menggantikan baris kedua matriks $\boldsymbol{X}$ dengan selisih antara baris kedua dan pertama ekuivalen dengan perkalian $\boldsymbol{X}$ oleh matriks

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan penerapan operasi baris elementer yang sesuai, sebanyak r kali, bentuk eselon baris dari $\boldsymbol{X}$ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$A_r A_{r-1} \cdots A_1 \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^*, \tag{2.7}$$

dimana setiap $\boldsymbol{A_j}$ adalah matriks *full rank* berukuran $n \times n$ dan X^* merupakan matriks yang ekuivalen secara linear terhadap $\boldsymbol{X}$ dan berada dalam bentuk eselon baris. Dengan mendefinisikan $\boldsymbol{A} = A_r A_{r-1} \cdots A_1$, maka $\boldsymbol{A}$ adalah matriks *full rank* berukuran $n \times n$, dan $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{X}^*$.

Karena $\boldsymbol{X}^*$ adalah eselon baris dengan $r = \mathrm{rank}(\boldsymbol{X})$, maka bagian bawah submatriks berukuran $(n - r) \times p$ merupakan matriks nol. Oleh karena itu, hanya difokuskan pada r baris pertama $\boldsymbol{X}^*$ dan $\boldsymbol{A}$. Dengan mendefinisikan X_r^* sebagai r baris pertama dari $\boldsymbol{X}^*$, dapat ditulis sebagai berikut

$$X_r^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_r^* \end{bmatrix}.$$

dimana x_i^* adalah vektor $p \times 1$ untuk $i = 1, 2, \ldots, r$. Dengan cara yang sama, definisikan $\boldsymbol{A_r}$ sebagai r baris pertama dari $\boldsymbol{A}$, dan

$$A_r = \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_r' \end{bmatrix}.$$

dimana a_i adalah vektor $n \times 1$ untuk $i = 1, 2, \ldots, r$. Berdasarkan definisi estimabilitas, setiap $x_i^{*'}\beta$ adalah fungsi *estimable* karena $a_i'X = x_i^{*'}$ untuk $i = 1, 2, \ldots, r$.

Eselon baris matriks $\boldsymbol{X}^*$ dapat diinterpretasikan sebagai berikut, misalkan ingin diketahui estimabilitas dari β_j $(1 \leq j \leq p)$. Pertama temukan baris $\boldsymbol{X}^*$ dimana $j - 1$ entri pertama adalah 0 dan entri ke-j nya 1. Jika sisa entri $p - j$ adalah 0, maka β_j *estimable*. Tetapi, jika sisa entri $p - j$ adalah 0 kecuali entri ke-$(j + 1)$ adalah 1, maka kombinasi linear $\beta_j + \beta_{j+1}$ *estimable* karena setiap baris $\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta}$ adalah fungsi *estimable*. Selain itu, jika ditentukan bahwa β_{j+1} *estimable*, maka β_j juga *estimable*; sebaliknya, jika β_{j+1} tidak *estimable*, maka β_j tidak *estimable*. Apabila tidak terdapat baris $\boldsymbol{X}^*$ yang memenuhi kondisi tersebut, maka β_j tidak *estimable* (Elswick, *et al*., 1991).

2.6 Partisi Estimabilitas

Definisi 2.6.1

Partisi estimabilitas adalah metode yang membagi vektor parameter dan matriks desain dalam model linear umum untuk tujuan menyederhanakan fungsi parameter linear yang *estimable*.

Model linear terpartisi umum adalah model dengan tiga vektor parameter:

$$E(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{X_0\beta_0} + \boldsymbol{X_1\beta_1} + \boldsymbol{X_2\beta_2}, \qquad \Delta_i'\beta_i = 0, \quad i = 0, 1, 2 \tag{2.8}$$

Model reduksi M_{01}:

$$E(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{X_0\beta_0} + \boldsymbol{X_1\beta_1}, \qquad \Delta_0'\beta_0 = 0, \quad \Delta_1'\beta_1 = 0 \tag{2.9}$$

Model reduksi M_{02}:

$$E(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{X_0\beta_0} + \boldsymbol{X_2\beta_2}, \qquad \Delta_0'\beta_0 = 0, \quad \Delta_2'\beta_2 = 0 \tag{2.10}$$

dimana $\Delta_i'\beta_i = 0$ merupakan kendala linear homogen yang membatasi ruang parameter β_i, sehingga parameterisasi menjadi teridentifikasi pada model linear dengan matriks desain yang *non full rank* (Seely & Birkes, 1980).

Lemma 1

Misalkan $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{G_1}, \boldsymbol{G_2})$ adalah sembarang matriks yang dipartisi. Jika $\boldsymbol{H}$ adalah sembarang matriks yang memenuhi $\mathcal{R}(\boldsymbol{H}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{G_1}')$, maka $r(\boldsymbol{H}) = r(\boldsymbol{G_1}) + r(\boldsymbol{H}'\boldsymbol{G_2})$.

Bukti

Berdasarkan model linear terkendala

$$E(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{X\beta}, \qquad \boldsymbol{\Delta}'\boldsymbol{\beta} = 0.$$

Berdasarkan teori model linear terkendala, rank model (atau dimensi ruang fungsi *estimable*) diberikan oleh

$$r = r(\boldsymbol{XT}) = r(\boldsymbol{X}^{'}, \boldsymbol{\Delta}) - r(\boldsymbol{\Delta}) \tag{2.11}$$

Melalui reparametrisasi linear yang bersifat nonsingular, matriks $(\boldsymbol{X}^{'}, \boldsymbol{\Delta})$ dapat digantikan oleh matriks $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{G_1}, \boldsymbol{G_2})$, yang ekuivalen secara rank sehingga

$$r(\boldsymbol{X}^{'}, \boldsymbol{\Delta}) = r(\boldsymbol{G}).$$

Selanjutnya, dipilih matriks $\boldsymbol{H}$ sedemikian sehingga $\mathcal{R}(\boldsymbol{H}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{G_1}^{'})$. Dari definisi ruang null diperoleh $\boldsymbol{H}^{'}\boldsymbol{G_1} = 0$. Akibatnya, setiap vektor pada ruang kolom $\boldsymbol{G_2}$ dapat diproyeksikan ke arah yang ortogonal terhadap ruang kolom $\boldsymbol{G_1}$ melalui transformasi $\boldsymbol{H}^{'}$. Oleh karena itu, komponen dari $\boldsymbol{G_2}$ yang berkontribusi terhadap rank $\boldsymbol{G}$ dan tidak berada pada ruang kolom $\boldsymbol{G_1}$ sepenuhnya diwakili oleh matriks $\boldsymbol{H}^{'}\boldsymbol{G_2}$.

Dimensi ruang estimabilitas adalah

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\boldsymbol{XT}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{H}^{'}\boldsymbol{G_2}) \tag{2.12}$$

Karena $\mathcal{C}(\boldsymbol{G_1}) \cap \mathcal{C}(\boldsymbol{H}^{'}\boldsymbol{G_2}) = \{0\}$, maka ruang kolom $\boldsymbol{G}$ merupakan dekomposisi langsung dari ruang kolom $\boldsymbol{G_1}$ dan ruang kolom $\boldsymbol{H}^{'}\boldsymbol{G_2}$. Oleh karena itu, rank matriks $\boldsymbol{G}$ dapat diuraikan sebagai

$$r(\boldsymbol{G}) = r(\boldsymbol{G_1}) + r(\boldsymbol{H}^{'}\boldsymbol{G_2}) \tag{2.13}$$

(Seely & Birkes, 1980).

Proposisi 2

$$E(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{X_1\beta_1} + \boldsymbol{X_2\beta_2}$$

Rank dari matriks desain penuh adalah jumlah dari rank matriks $\boldsymbol{X_1}$ dan dimensi ruang fungsi *estimable* yang berkaitan dengan $\boldsymbol{\beta_2}$,

$$r = r_1 + d_2.$$

Dengan:
r : rank(X_1, X_2);

r_1 : rank (X_1);
d_2 : dimensi fungsi *estimable* untuk $\boldsymbol{\beta_2}$.

Bukti
Misalkan model penuh $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U_1}, \boldsymbol{U_2})$ dimana rank pada model penuh $r = r(\boldsymbol{U})$ dan rank model tereduksi yang hanya melibatkan $\boldsymbol{\beta_1}$ adalah $r_1 = r(\boldsymbol{U_1})$. Untuk mengukur kontribusi parameter $\boldsymbol{\beta_2}$ yang tidak tumpang tindih dengan $\boldsymbol{U_1}$, dipilih matriks $\boldsymbol{W}$ sedemikian sehingga $\mathcal{R}(\boldsymbol{W}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{U_1}')$. Dari sifat ruang null diperoleh $\boldsymbol{W}'\boldsymbol{U_1} = 0$.

Dengan demikian, matriks $\boldsymbol{W}'\boldsymbol{U_2}$ merepresentasikan bagian dari $\boldsymbol{U_2}$ yang ortogonal terhadap ruang kolom $\boldsymbol{U_1}$, sehingga

$$d_2 = r(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{U_2}).$$

Karena struktur $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U_1}, \boldsymbol{U_2})$ dan $\boldsymbol{W}$ memenuhi Lemma 1, dengan $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{U}, \boldsymbol{G_1} = \boldsymbol{U_1}, \boldsymbol{G_2} = \boldsymbol{U_2}, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{W}$, maka

$$r(\boldsymbol{U}) = r(\boldsymbol{U_1}) + r(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{U_2}).$$

Oleh karena itu,

$$r = r_1 + d_2.$$

(Seely & Birkes, 1980).

Teorema 10
Ekuivalensi estimabilitas pada model penuh dan estimabilitas pada model tereduksi.

1. $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta_2}$ *estimable* dalam model penuh jika dan hanya jika $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta_2}$ *estimable* pada model reduksi M_{02}.

2. Dimensi ruang fungsi *estimable* $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta_2}$ pada kedua model adalah sama $d_2 = d_2^*$.

3. Rank model penuh $r = r_{01} + r_{02} - r_0$.

4. Irisan dari model M_{01} dan M_{02}, $\Omega_{01} \cap \Omega_{02} = \Omega_0$.

5. $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta_1}$ *estimable* jika dan hanya jika $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta_1}$ *estimable* pada model reduksi M_{01}.

Dengan demikian, setiap fungsi parameter $\boldsymbol{L\beta} = \boldsymbol{l_1}'\boldsymbol{\beta_1} + \boldsymbol{l_2}'\boldsymbol{\beta_2}$ *estimable* dalam model penuh jika dan hanya jika fungsi tersebut *estimable* pada model reduksi.

Dengan:
Model penuh $(\Omega) = \mathcal{C}(\boldsymbol{X_0}, \boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}) = \mathcal{C}(\boldsymbol{X_0}) + \mathcal{C}(\boldsymbol{X_1}) + \mathcal{C}(\boldsymbol{X_2})$
Model M_{01} $(\Omega_{01}) = \mathcal{C}(\boldsymbol{X_0}, \boldsymbol{X_1}) = \mathcal{C}(\boldsymbol{X_0}) + \mathcal{C}(\boldsymbol{X_1})$
Model M_{02} $(\Omega_{02}) = \mathcal{C}(\boldsymbol{X_0}, \boldsymbol{X_2}) = \mathcal{C}(\boldsymbol{X_0}) + \mathcal{C}(\boldsymbol{X_2})$
Model M_0 $(\Omega_0) = \mathcal{C}(\boldsymbol{X_0})$
Rank dari model penuh, $r = \dim(\Omega) = r(\boldsymbol{X})$
Rank dari model M_{01}, $r_{01} = \dim(\Omega_{01})$
Rank dari model M_{02}, $r_{02} = \dim(\Omega_{02})$
Rank dari model M_0, $r_0 = \dim(\Omega_0)$
(Seely & Birkes, 1980).

Bukti

1. Akan dibuktikan bahwa kondisi (1) $\Leftrightarrow$ (2) terpenuhi.
   Misalkan $\boldsymbol{W}$ menyatakan himpunan semua vektor $\boldsymbol{l}$ sehingga fungsi linear $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta_2}$ *estimable* pada model penuh dan $\boldsymbol{W}^*$ adalah himpunan semua vektor $\boldsymbol{l}$ sehingga fungsi linear $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta_2}$ *estimable* pada model reduksi M_{02}. Karena model M_{02} adalah bagian dari model penuh, estimabilitas pada model penuh menyiratkan estimabilitas dalam M_{02}, sehingga $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{W}^*$. Estimabilitas dalam pernyataan (1) terjadi jika dan hanya jika kedua ruang memiliki dimensi yang sama, yaitu $\dim(\boldsymbol{W}) = \dim(\boldsymbol{W}^*)$, maka $d_2 = d_2^*$. Berdasarkan sifat ruang vektor dari $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{W}^*$ dan kesamaan dimensi tersebut diperoleh $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}^*$.
   Sehingga terbukti bahwa (1) dan (2) ekuivalen.

2. Akan dibuktikan bahwa kondisi (2) $\Leftrightarrow$ (3) terpenuhi.
   Pertama akan dibuktikan $(2) \Rightarrow (3)$, berdasarkan Proposisi 2 ke model penuh (dipartisi menjadi $\boldsymbol{\beta_1}$ dan $\boldsymbol{\beta_2}$) untuk mendapatkan

   $$r = r_{01} + d_2 \tag{2.14}$$

   Dengan Proposisi 2 ke model tereduksi M_{02} (dipartisi menjadi β_0 dan β_2) untuk mendapatkan

   $$r_{02} = r_0 + d_2^* \tag{2.15}$$

Substitusi $d_2 = r - r_{01}$ dan $d_2^* = r_{02} - r_0$ ke dalam kondisi (2) menghasilkan

$$\begin{aligned} r - r_{01} &= r_{02} - r_0 \\ r &= r_{01} + r_{02} - r_0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Selanjutnya akan dibuktikan $(3) \Rightarrow (2)$, jika $r = r_{01} + r_{02} - r_0$, maka $d_2 = d_2^*$. Asumsikan kondisi (3) benar, dengan menggunakan Persamaan (2.14) yang diturunkan dari Proposisi 2 diperoleh

$$d_2 = r - r_{01} \tag{2.17}$$

$$d_2^* = r_{02} - r_0 \tag{2.18}$$

Substitusikan r dari kondisi awal ke Persamaan (2.17):

$$\begin{aligned} d_2 &= (r_{01} + r_{02} - r_0) - r_{01} \\ d_2 &= r_{02} - r_0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Karena $d_2 = r_{02} - r_0$ dan $d_2^* = r_{02} - r_0$, maka:

$$d_2 = d_2^* \tag{2.20}$$

Sehingga terbukti bahwa (2) dan (3) ekuivalen.

3. Akan dibuktikan bahwa kondisi (3) $\Leftrightarrow$ (4) terpenuhi.
   Ruang model penuh Ω adalah penjumlahan ruang model M_{01} dan M_{02}:

   $$\Omega = \Omega_{01} + \Omega_{02} \tag{2.21}$$

   Berdasarkan rumus dimensi untuk penjumlahan ruang vektor, dimensi Ω adalah:

   $$\dim(\Omega) = \dim(\Omega_{01}) + \dim(\Omega_{02}) - \dim(\Omega_{01} \cap \Omega_{02}) \tag{2.22}$$
   $$r = r_{01} + r_{02} - \dim(\Omega_{01} \cap \Omega_{02}) \tag{2.23}$$

   Pertama akan dibuktikan $(3) \Rightarrow (4)$.
   Asumsikan bahwa kondisi (3) benar, bandingkan kondisi (3) dengan Persamaan (2.23), diperoleh

   $$\dim(\Omega_{01} \cap \Omega_{02}) = r_0 \tag{2.24}$$

Karena $\dim(\Omega_0) = r_0$, maka

$$\dim(\Omega_{01} \cap \Omega_{02}) = \dim(\Omega_0) \tag{2.25}$$

Ω_0 merupakan subruang dari $\Omega_{01} \cap \Omega_{02}$ (karena $X_0\beta_0$ adalah bagian dari M_{01} dan M_{02}). Dalam teori ruang vektor, jika ruang **A** adalah subruang dari ruang **B** (**A** $\subset$ **B**) dan $\dim(\mathbf{A}) = \dim(\mathbf{B})$, maka **A** $=$ **B**. Oleh karena itu, $\Omega_0 \subset \Omega_{01} \cap \Omega_{02}$ dan $\dim(\Omega_0) = \dim(\Omega_{01} \cap \Omega_{02})$, sehingga $\Omega_{01} \cap \Omega_{02} = \Omega_0$.

Selanjutnya akan dibuktikan $(4) \Rightarrow (3)$. Asumsikan kondisi (4) benar,

$$\dim(\Omega_{01} \cap \Omega_{02}) = \dim(\Omega_0).$$

Karena $\dim(\Omega_0) = r_0$, maka

$$\dim(\Omega_{01} \cap \Omega_{02}) = r_0.$$

Substitusikan $\dim(\Omega_{01} \cap \Omega_{02}) = r_{01} + r_{02} - r$ ke dalam Persamaan (2.24) menghasilkan

$$\begin{aligned} r_{01} + r_{02} - r &= r_0 \\ r &= r_{01} + r_{02} - r_0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Sehingga terbukti bahwa (3) dan (4) ekuivalen.

4. Akan dibuktikan bahwa kondisi (4) $\Leftrightarrow$ (5) terpenuhi.
   Karena kondisi (4) tidak bergantung pada penamaan indeks 1 dan 2, maka dengan menukar peran $\boldsymbol{\beta_1}$ dan $\boldsymbol{\beta_2}$ diperoleh hasil yang sama. Karena telah terbukti bahwa (1) $\Leftrightarrow$ (4), maka simetri tersebut menjamin bahwa kondisi (4) ekuivalen dengan estimabilitas untuk $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta_1}$.

2.7 Uji Hipotesis

Dalam model linear umum, akan diuji hipotesis,

$$H_0 : \boldsymbol{L\beta} = 0 \quad \text{vs} \quad H_A : \boldsymbol{L\beta} \neq 0 \tag{2.27}$$

dimana $\boldsymbol{L}$ adalah matriks kendala berukuran $k \times p$ dengan rank baris penuh, yaitu $\operatorname{rank}(\boldsymbol{L}) = k$, serta $\boldsymbol{L\beta}$ merupakan kombinasi linear parameter yang *estimable*.

Teorema 11

Misalkan $\boldsymbol{F}$ adalah matriks berukuran $p \times (p-k)$ dengan *full rank* yang kolom-kolomnya membentuk basis ortonormal dari ruang nol matriks $\boldsymbol{L}$, sehingga berlaku $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{'} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})$ dan $\boldsymbol{F}^{'}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}_{p-k}$. Model terbatas yang digunakan untuk memperoleh jumlah kuadrat karena hipotesis adalah

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e} \tag{2.28}$$

(Milliken, 1971)

Bukti

Karena $\mathrm{rank}(\boldsymbol{L}) = k$, ruang parameter $\mathbb{R}^p$ dapat didekomposisikan menjadi ruang yang dibentang oleh baris-baris $\boldsymbol{L}^{'}$ dan ruang nol dari $\boldsymbol{L}$. Matriks $\boldsymbol{F}$ dipilih sedemikian sehingga kolom-kolomnya membentuk basis dari ruang nol, sehingga $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{'} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})$, yang menyatakan bahwa $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{'}$ merupakan matriks proyeksi ke ruang parameter yang memenuhi hipotesis nol. Dengan menggunakan dekomposisi identitas

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{'},$$

Model linear dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{X}(\boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{'})\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e} \\ &= \boldsymbol{X}\boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{'}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e} \end{aligned} \tag{2.29}$$

ketika hipotesis nolnya benar, $\boldsymbol{L}\boldsymbol{\beta} = 0$ maka model tersebut menjadi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{X}\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{'}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e} \\ &= \boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e} \end{aligned} \tag{2.30}$$

Persamaan (2.30) adalah model terbatas yang diinginkan. Jumlah kuadrat karena kesalahan untuk model terbatas adalah

$$SSE_R = \boldsymbol{y}^{'}\left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})\{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})\}^{-}\right]\boldsymbol{y} \tag{2.31}$$

Jumlah kuadrat karena kesalahan untuk model linear adalah

$$\begin{aligned} SSE &= (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})\boldsymbol{y} \end{aligned} \tag{2.32}$$

Berdasarkan *Principle of Conditional Error*, jumlah kuadrat yang disebabkan oleh hipotesis adalah

$$\begin{aligned} SSH_0 &= SSE_R - SSE \\ &= \boldsymbol{y}'\{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^- - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^-\boldsymbol{L})[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^-\boldsymbol{L})]^-\}\boldsymbol{y} \end{aligned} \tag{2.33}$$

dan dengan *Principle of Conditional Error*, uji statistiknya adalah

$$F_{\text{hitung}} = \frac{SSH_0/k}{SSE/(n-r)}$$

dimana k adalah rank matriks hipotesis, n adalah jumlah observasi, dan r adalah rank matriks desain $\boldsymbol{X}$. Statistik uji tersebut berdistribusi F dengan derajat bebas k dan $n-r$ (Milliken, 1971).

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun akademik 2025/2026 bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini terdiri atas data studi kasus dan data simulasi. Data studi kasus merupakan data sekunder yang digunakan sebagai penerapan estimabilitas pada model linear *non full rank*. Data tersebut digunakan untuk mengkaji struktur matriks desain dan menentukan fungsi linear parameter yang *estimable*.

Pada data simulasi, matriks desain yang digunakan memiliki struktur yang sama dengan matriks desain pada studi kasus dan berukuran 15×10. Vektor respon dan galat acak pada data simulasi merupakan data yang dibangkitkan melalui *software* SAS berdasarkan model linear.

3.3 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kuantitatif berbasis teori model linear, aljabar linear, dan konsep estimabilitas partisi. Eselon baris dan partisi estimabilitas yang digunakan pada penelitian ini dari berbagai sumber literatur. Penelitian ini menggunakan *software* SAS IML (*Interactive Matrix Languange*) dalam mempermudah melakukan berbagai operasi matriks, seperti perhitungan rank, reduksi eselon baris, *g-inverse*, dan pengujian hipotesis.

Langkah-langkah analisis pada data studi kasus adalah sebagai berikut.

1. Dari data yang diperoleh, dapat membentuk desain modelnya, dimana $\boldsymbol{X}$ adalah matriks desain yang terdiri dari angka 0 dan 1 yang dibentuk dari persamaan model linear.

2. Melakukan transformasi matriks desain ke dalam bentuk eselon baris untuk mengidentifikasi kolom-kolom bebas linear.

3. Menyusun partisi estimabilitas matriks desain dan vektor parameter $\boldsymbol{\beta}$ menjadi tiga bagian sesuai dengan model linear terpartisi umum (Teorema 10) dan memeriksa kondisi rank model penuh dan model reduksi untuk ekuivalensi estimabilitas.

4. Menentukan matriks $\boldsymbol{L}$ sebagai kombinasi linear dari fungsi *estimable*.

5. Melakukan uji hipotesis terhadap kombinasi linearnya yang *estimable*, hipotesisnya adalah sebagai berikut.

$$H_0 : \boldsymbol{L\beta} = 0 \quad \text{vs} \quad H_A : \boldsymbol{L\beta} \neq 0$$

6. Selanjutnya akan dilakukan uji signifikansi model dengan melihat dari jumlah kuadrat.
   Pertama menghitung jumlah kuadrat galat untuk model terbatas

$$SSE_R = \boldsymbol{y}' \left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})\{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})\}^{-} \right] \boldsymbol{y}$$

   Selanjutnya menghitung jumlah kuadrat galat untuk model linear

$$SSE = \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})\boldsymbol{y}$$

   Dengan menggunakan *principle of conditional error*, jumlah kuadrat karena hipotesis adalah

$$SSH_0 = SSE_R - SSE$$

$$SSH_0 = \boldsymbol{y}' \left\{ \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})]^{-} \right\} \boldsymbol{y}$$

Selanjutnya menghitung statistik uji F

$$F_{\text{hitung}} = \frac{SSH_0/k}{SSE/(n-r)}$$

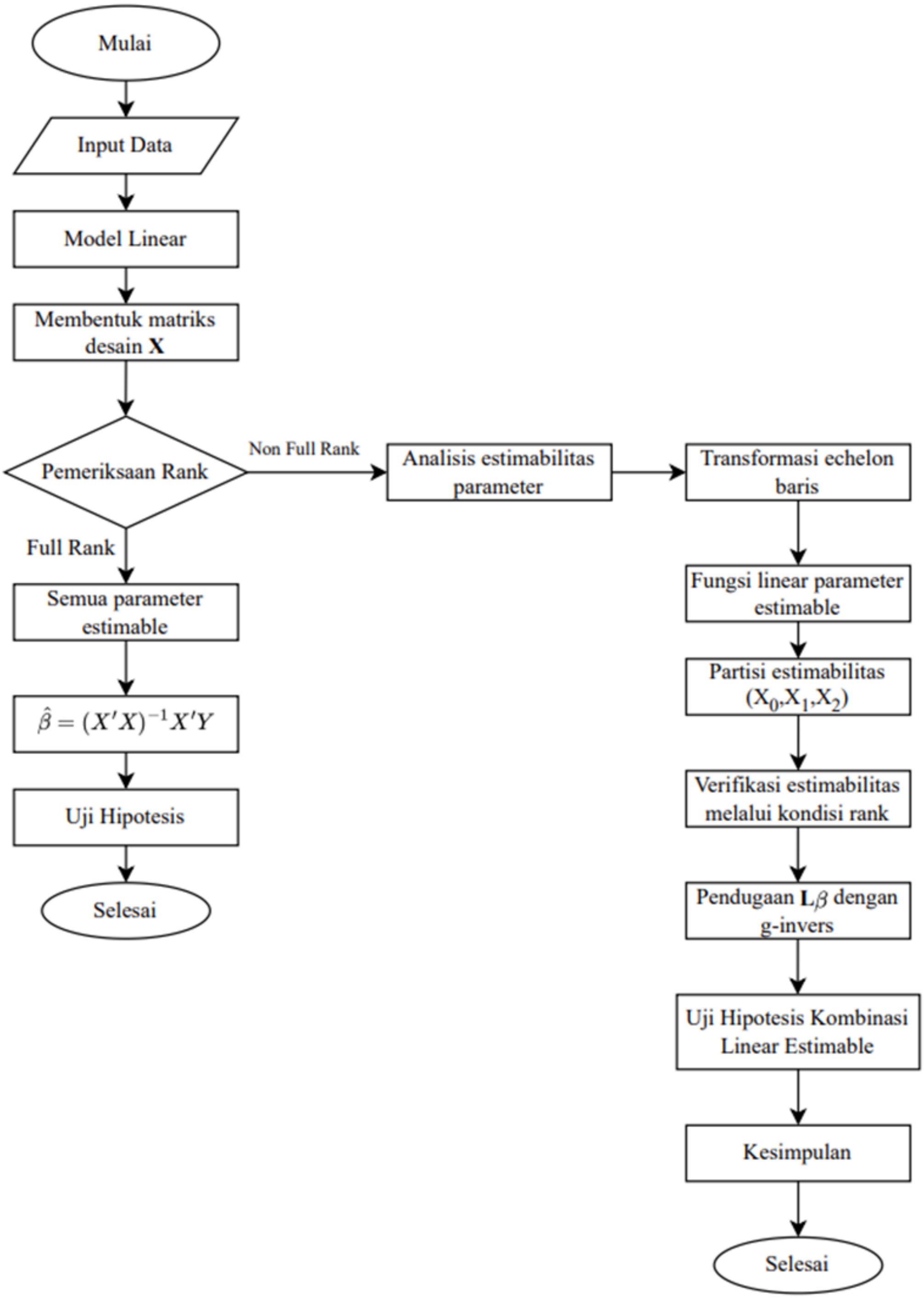
Keputusan uji dilakukan dengan membandingkan F_{hitung} dengan F_{tabel} pada taraf signifikansi $\alpha = 0{,}05$.

Langkah-langkah simulasi adalah sebagai berikut.

1. Membentuk matriks desain $\boldsymbol{X}$ dengan struktur yang sama dengan data studi kasus dan bersifat *non full rank*.
2. Menentukan nilai parameter model $\boldsymbol{\beta}$.
3. Menetapkan ragam galat sebesar $\sigma^2 = 4$ dan membangkitkan galat acak $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, 4\boldsymbol{I})$.
4. Membentuk vektor respon $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$.
5. Melakukan pendugaan parameter $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ menggunakan *generalized inverse*.
6. Menghitung penduga fungsi linear parameter yang *estimable* $\boldsymbol{L}\hat{\boldsymbol{\beta}}$, dengan $\boldsymbol{L}$ merupakan matriks yang telah terbukti *estimable*.
7. Menghitung SSE, SSE_R, dan statistik uji F.
8. Mengulangi langkah simulasi dengan 500 ulangan.
9. Menghitung rata-rata $\boldsymbol{L}\hat{\boldsymbol{\beta}}$, bias $\boldsymbol{L}\hat{\boldsymbol{\beta}}$, rata-rata SSE, dan rata-rata statistik uji F sebagai pendekatan terhadap nilai harapan teoritis.

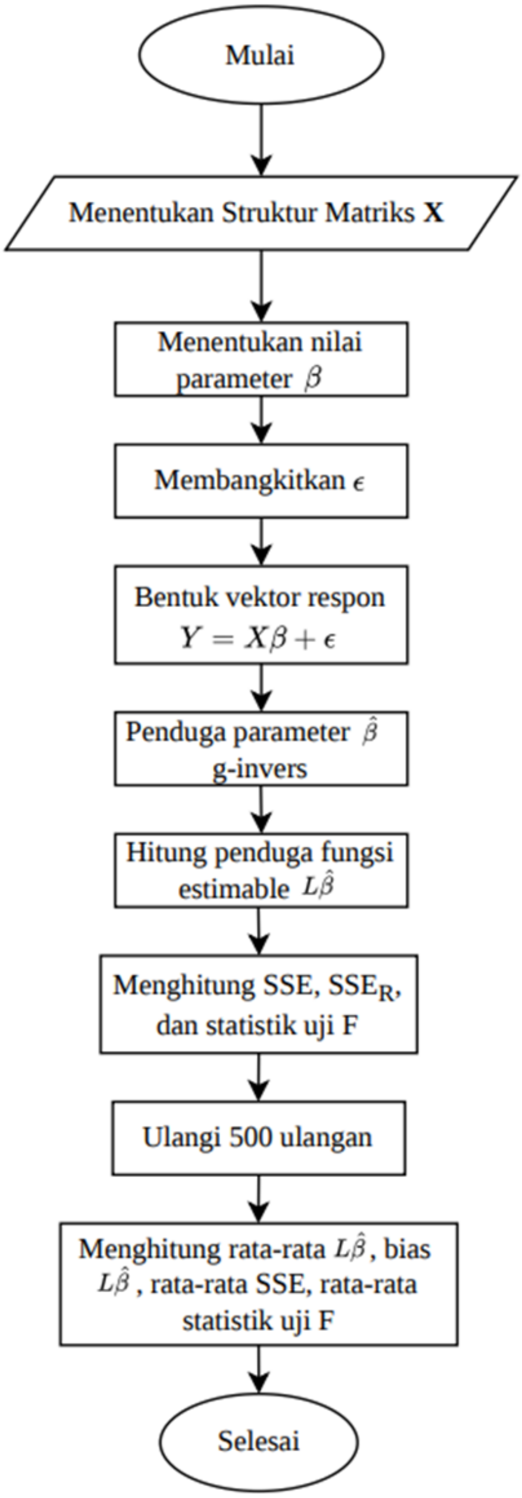
3.4 *Flowchart*

3.4.1 *Flowchart* Studi Kasus



Gambar 1. *Flowchart* Studi Kasus

3.4.2 *Flowchart* Simulasi



Gambar 2. *Flowchart* Simulasi

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang sudah di jelaskan dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Berdasarkan hasil analisis estimabilitas diperoleh bahwa tidak semua parameter dalam model linear *non full rank* bersifat *estimable* secara individual. Namun, kombinasi linear tertentu dari parameter tetap dapat ditentukan sebagai fungsi yang *estimable*, sehingga fungsi linear parameter yang *estimable*

$$\boldsymbol{L\beta} = \left\{ \begin{matrix} \mu + \alpha_6 + \tau_3 \\ \alpha_1 - \alpha_6 \\ \alpha_2 - \alpha_6 \\ \alpha_3 - \alpha_6 \\ \alpha_4 - \alpha_6 \\ \alpha_5 - \alpha_6 \\ \tau_1 - \tau_3 \\ \tau_2 - \tau_3 \end{matrix} \right\}$$

2. Partisi estimabilitas terpenuhi dengan memeriksa kondisi rank model bahwa fungsi *estimable* yang diperoleh dari bentuk eselon baris tetap *estimable* ketika model dipartisi ke dalam submodel $\boldsymbol{X_0}$,$\boldsymbol{X_1}$, dan $\boldsymbol{X_2}$.

3. Pengujian hipotesis terhadap fungsi linear parameter yang *estimable* menunjukkan bahwa hipotesis nol pada efek perlakuan dan waktu ditolak, sehingga terdapat paling sedikit satu parameter efek perlakuan dan waktu yang berbeda, serta kedua faktor tersebut berpengaruh signifikan dalam model linear.

4. Studi simulasi menunjukkan bahwa pada model linear *non full rank*, fungsi linear parameter yang memenuhi syarat estimabilitas atau *estimable* bersifat tak bias dan pengujian hipotesis konsisten terhadap teori model linear umum.

DAFTAR PUSTAKA

Adeyemo, S. O., & Nwobi, F. N. 2014. A Note on Estimability in Linear Models. *International Journal of Statistics and Applications*. **4**(4): 212–216.

Anggraheni, Y. G. D., Nuro, F., & Paradisa, Y. B. 2019. Effect of organic fertilizer on growth and yield of chili pepper. *In Proceedings The SATREPS Conference*. **2**(1): 30-37.

Anton, H., & Rorres, C. (2014). *Elementery Linear Algebra: Applications Version* (11th editi). John Wiley & Sons.

Elfaki, F. A., Russel, E., Widiarti, Usman, M., & Doud, J. I. (2025). Survey of Estimability Criteria, Connected Design and Testing Testable Hypotheses in Unbalanced Design. *Integra: Journal of Integrated Mathematics and Computer Science*. **2**(3): 1-5.

Elswick, R. K., Gennings, C., Chinchilli, V. M., & Dawson, K. S. (1991). A simple approach for finding estimable functions in linear models. *American Statistician*. **45**(1): 51–53.

Graybill, F. A. (1976). *Theory and application of the linear model*. North Scituate, Mass. : Duxbury Press.

Israel, A. Ben, & Greville, T. N. 2003. *Generelized Inverses: Theory and Applications* (2nd ed.). Springer Verlag.

Jun, F., Wei, D., Yiming, J., & Chunyan, Z. (2022). Parameter estimation and application of non full rank linear regression model. *Advances in Educational Technology and Psychology*. **6**(7): 9–13.

Kolman, B. (1977). *Elementary linear algebra* (Second Edi). New York : Macmillan.

Milliken, G. A. (1971). New Criteria For Estimability For Linear Models. *The Annals of Mathematical Statistics*. **42**(5): 1588–1594.

Nugroho, S. (2013). Penggunaan Dekomposisi QR Dalam Estimabilitas Parameter-Parameter Model Linier Sigit Nugroho. *Prosiding SEMIRATA 2013*: 473–479.

Rao, C. R., & Mitra, S. K. 1971. Generelized Inverse of Matrices and its Applications. John Wiley & Sons.

Rencher, A. C., & Schaalje, G. B. (2008). *Linear Models In Statistics* (Second Edi). John Wiley & Sons, Inc.

Ruminta. 2009. M*atriks Persamaan Linier dan Pemrograman Linier*. Rekayasa Sains.

Searle, S. R. (1966). *Matrix Algebra for the Biological Sciences*. Wiley.

Searle, S. R. (1971). *Linear Models* (Wiley Clas). John Wiley & Sons.

Seely, J., & Birkes, D. (1980). Estimability In Partitioned Linear Models. *The Annals of Statistic*. **8**(2): 399–406.

Usman, M., & Warsono. (2009). *Teori Model Linear Dan Aplikasinya*. Sinar Baru Algesindo.