BILANGAN KROMATIK LOKASI SISI GRAF BUNGA MAWAR DAN BARBELNYA

Skripsi

Oleh

ANISAH FATIN FARAHDILLAH
2217031137

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

ABSTRACT

THE EDGE LOCATING CHROMATIC NUMBER OF ROSE GRAPHS AND ITS BARBELL

By

Anisah Fatin Farahdillah

The edge locating chromatic number of G, denoted by $\chi'_L(G)$, is the minimum number of colors required to obtain an edge locating coloring of G. The Rose graph $M(C_n)$ is a connected graph constructed by a cycle graph C_n with vertices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ and n isolated vertices $w_1, w_2, \ldots, w_n$, by connecting every pair of vertices v_s, v_{s+1} to w_s, for $s = 1, 2, \ldots, n$, with $v_{n+1} = v_1$. In this research, we determined the edge locating chromatic number of rose graph and the barbell rose graph. The results, $\chi'_L(M(C_n))$ 5 for $n \in \{3, 4, 5\}$ and 6 for $n \geq 6$, whereas $\chi'_L(B_M(C_n))$ is 6 for $n \geq 3$.

Keywords: edge locating chromatic number, Rose graph, barbell Rose graph.

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI SISI GRAF BUNGA MAWAR DAN BARBELNYA

Oleh

Anisah Fatin Farahdillah

Bilangan kromatik lokasi sisi dari G, yang dinotasikan dengan $\chi'_L(G)$, adalah banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk memperoleh suatu pewarnaan lokasi sisi pada G. Graf bunga Mawar $M(C_n)$ merupakan graf terhubung yang dikontruksi dari graf siklus C_n dengan titik-titik $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan n titik terisolasi $w_1, w_2, \ldots, w_n$, dengan menghubungkan setiap dua titik v_s, v_{s+1} dengan w_s, untuk $s = 1, 2, \ldots, n$, dengan $v_{n+1} = v_1$. Pada penelitian ini ditentukan bilangan kromatik lokasi sisi graf bunga Mawar dan graf barbel bunga Mawar. Hasil yang diperoleh adalah $\chi'_L(M(C_n))$ adalah 5 untuk $n \in \{3, 4, 5\}$ dan 6 untuk $n \geq 6$, sedangkan $\chi'_L(B_M(C_n))$ adalah 6 untuk $n \geq 3$.

Kata kunci: bilangan kromatik lokasi sisi, graf bunga Mawar, graf barbel bunga Mawar.

BILANGAN KROMATIK LOKASI SISI GRAF BUNGA MAWAR DAN BARBELNYA

ANISAH FATIN FARAHDILLAH

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

Judul Skripsi : **BILANGAN KROMATIK LOKASI SISI GRAF BUNGA MAWAR DAN BARBELNYA**

Nama Mahasiswa : *Anisah Fatin Farahdillah*

Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031137**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.	**Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.**
NIP 197604112000122001	NIP 199311062019032018

2. Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

Mulyono, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP. 197406112000031002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	:	**Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	:	**Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **5 Mei 2026**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Anisah Fatin Farahdillah**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031137**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Bilangan Kromatik Lokasi Sisi Graf Bunga Mawar dan Barbelnya**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 5 Mei 2026
Penulis,

Anisah Fatin Farahdillah

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Anisah Fatin Farahdillah yang lahir di Tangerang pada tanggal 30 Juni 2004. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara, putri dari pasangan Muhamad Solihin dan Wahyuni.

Penulis memulai pendidikan formal di TK Al-Muhajir pada tahun 2009 dan menyelesaikannya pada tahun 2010. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di SD Negeri Sindangsari 2 pada tahun 2010-2016. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 4 Pasar Kemis pada tahun 2016-2019, dan menyelesaikan pendidikan di SMA Negeri 13 Kabupaten Tangerang pada tahun 2022.

Pada tahun 2022, penulis diterima di program studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Pada akhir tahun 2024, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di PT Great Giant Pineapple selama 40 hari sampai dengan Januari 2025. Selain itu, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 30 hari di desa Sukajawa, Kecamatan Tanjung Karang Barat, Kota Bandar Lampung, sampai dengan Agustus 2025.

KATA INSPIRASI

”Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan.”
(Q.S. Al Insyirah ayat 6)

”It always seems impossible until it’s done.”
(Nelson Mandela)

”It’s okay to feel tired, uncertain, or even lost. What’s important is to keep moving forward and give yourself the space to grow.”
(Cheers To Youth by Seventeen)

PERSEMBAHAN

Alhadulillahirobbil"alamin
Dengan mengucapkan puji dan syukur atas kehadirat Allah Subhanahu Wata"ala karena limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya.
Tak lupa shalawat beserta salam selalu tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu Alaihi Wasallam.
Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Bapak dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Bilangan Kromatik Lokasi Sisi Graf Bunga Mawar dan Barbelnya” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sepanjang proses penyusunan skripsi ini.

2. Ibu Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si. selaku Pembimbing 2 yang telah memberikan arahan, dukungan, serta doa sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan saran dan kritik yang membangun sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

4. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku dosen Pembimbing Akademik.

5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Bapak, ibu, kakak, serta adik yang selalu memberikan dukungan dan doa sehingga penulis dapat segera menyelesaikan skripsi ini.
8. Teman-teman yang tidak bisa saya sebutkan satu persatu, yang telah banyak membantu, menemani, dan mendukung penulis selama menjalani perkuliahan.
9. Seluruh pihak terkait yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 5 Mei 2026

Anisah Fatin Farahdillah

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu dalam matematika dan ilmu komputer yang berperan penting dalam mempelajari hubungan antarobjek diskrit. Graf direpresentasikan sebagai kumpulan titik (simpul) dan garis (sisi) yang menghubungkan pasangan titik. Konsep ini dapat digunakan untuk memodelkan berbagai permasalahan nyata seperti jaringan transportasi, komunikasi, maupun sistem distribusi. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan asal Swiss, Leonhard Euler, pada tahun 1736 melalui permasalahan yang dikenal sebagai Jembatan Königsberg. Permasalahan ini melibatkan empat daratan yang saling terhubung oleh tujuh jembatan, dengan pertanyaan apakah seseorang dapat melalui setiap jembatan tepat satu kali dan kembali lagi ke titik awal. Pada permasalahan tersebut, daratan direpresentasikan sebagai titik dan jembatan sebagai sisi dalam suatu graf. Berdasarkan representasi tersebut, disimpulkan bahwa seseorang tidak mungkin melalui setiap jembatan tepat satu kali dan kembali lagi ke titik awal, karena derajat setiap simpul pada graf tersebut tidak seluruhnya genap (Munir, 2010).

Seiring dengan perkembangan teori graf yang semakin luas, muncul berbagai kajian menarik di dalamnya, salah satunya mengenai pewarnaan graf. Pewarnaan graf merupakan proses pemberian warna pada setiap elemen graf G dengan ketentuan bahwa elemen-elemen yang bertetangga harus memiliki warna yang berbeda (Ma'arif dkk., 2021). Banyaknya warna minimum yang dihasilkan dari pewarnaan graf disebut dengan bilangan kromatik. Seiring berkembangnya penelitian dalam bidang pewarnaan graf, muncul konsep baru yang merupakan pengembangan dari bilangan kromatik dan dimensi partisi, yaitu bilangan kromatik lokasi. Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk. (2002) sebagai bentuk pewarnaan graf yang tidak hanya memperhatikan perbedaan warna antar titik, tetapi juga mempertimbangkan posisi setiap titik terhadap warna titik-titik tetangganya.

Beberapa penelitian terkait bilangan kromatik lokasi telah dilakukan oleh berbagai peneliti. Chartrand dkk. (2002) menentukan bilangan kromatik lokasi untuk beberapa kelas graf, seperti graf lengkap, siklus, lintasan, dan pohon. Selanjutnya, pada tahun berikutnya, Chartrand dkk. (2003) mengkarakterisasi graf berorde n yang memiliki bilangan kromatik lokasi sebesar $n-1$. Asmiati dkk. (2012) meneliti graf kembang api (*firecracker graphs*) dan menunjukkan bahwa banyaknya warna minimum yang dibutuhkan bergantung pada jumlah titik dalam graf. Sementara itu, Rahmatalia dkk. (2022) mengkaji graf split lintasan dan barbel split lintasan serta memperoleh bahwa kedua graf tersebut memiliki bilangan kromatik lokasi yang sama, yaitu empat. Kajian terhadap graf origami oleh Irawan dkk. (2021) menunjukkan bahwa nilai bilangan kromatik lokasi graf origami tetap meskipun jumlah titik bertambah. Penelitian tersebut kemudian dikembangkan oleh Asmiati dkk. (2023) melalui studi terhadap operasi graf origami, yang menunjukkan bahwa nilai bilangan kromatik lokasi bertambah satu terhadap graf asalnya. Selain itu, Sawitri dkk. (2025) meneliti graf bunga Mawar dan graf barbel bunga Mawar dengan hasil bahwa bilangan kromatik lokasi pada graf bunga Mawar adalah 4 untuk $n \in 3, 4$ dan 5 untuk $n \geq 5$, sedangkan pada graf barbel bunga Mawar adalah 4 untuk $n = 3$ dan 5 untuk $n \geq 4$.

Dalam perkembangannya, kajian mengenai bilangan kromatik lokasi tidak hanya terbatas pada titik, tetapi juga diperluas pada sisi graf. Berbagai penelitian mengenai pewarnaan sisi telah dilakukan, di antaranya oleh Saifudin dan Dafik (2014) yang meneliti bilangan kromatik sisi pada berbagai graf khusus, Kusumastuti dan Budayasa (2020) yang mengkaji pewarnaan-sisi pelangi, serta Minarti dkk. (2019) yang mengembangkan pewarnaan sisi r-dinamis pada graf hasil operasi amalgamasi titik. Hasil-hasil tersebut menunjukkan bahwa konsep pewarnaan sisi dapat digeneralisasi dalam berbagai bentuk.

Sebagai pengembangan lebih lanjut, Korivand dkk. (2024) memperkenalkan konsep bilangan kromatik lokasi sisi $(\chi'_L(G))$, yaitu pewarnaan sisi di mana setiap dua sisi berdekatan memiliki warna berbeda dan setiap titik memiliki kode warna unik berdasarkan jarak terhadap kelas warna sisi lainnya. Berdasarkan kajian tersebut, penelitian ini dilakukan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi sisi pada graf bunga Mawar dan graf barbel bunga Mawar, karena sejauh penelusuran literatur belum ditemukan kajian serupa pada graf bunga Mawar $M(C_n)$ untuk $n \geq 3$.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi sisi graf bunga Mawar $\chi'_L(M(C_n))$ dan bilangan kromatik lokasi sisi graf barbel bunga Mawar $\chi'_L(B_{M(C_n)})$ untuk $n \geq 3$.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang ingin diperoleh dari penelitian ini yaitu:

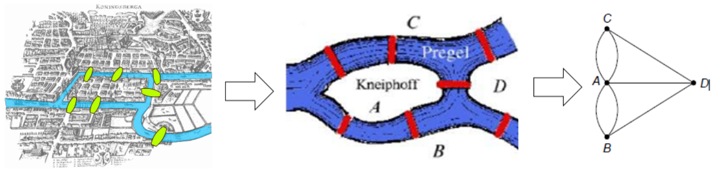
1. menambah pemahaman mengenai bilangan kromatik lokasi sisi pada graf bunga Mawar dan graf barbel bunga Mawar.
2. menjadi referensi dalam penelitian selanjutnya yang berkaitan dengan bilangan kromatik lokasi sisi pada graf bunga lainnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

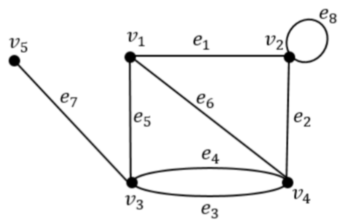
2.1 Konsep Dasar Graf

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan asal Swiss, yaitu Leonhard Euler, pada tahun 1736 melalui permasalahan yang dikenal sebagai Jembatan Königsberg. Permasalahan ini membahas apakah seseorang dapat melintasi empat daratan yang saling terhubung oleh tujuh jembatan di atas Sungai Pregel di kota Königsberg (sekarang Kaliningrad, Rusia), dengan setiap jembatan dilalui tepat satu kali dan kembali lagi ke titik awal. Permasalahan jembatan Königsberg tersebut kemudian direpresentasikan dalam bentuk graf, dengan titik (*vertex*) menyatakan daratan dan sisi (*edge*) menyatakan jembatan yang menghubungkan dua daratan. Melalui representasi tersebut, Euler membuktikan bahwa seseorang tidak mungkin melalui setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke titik awal, karena derajat setiap simpul pada graf tersebut tidak seluruhnya genap. (Munir, 2010).



Gambar 2.1 Representasi graf untuk masalah Jembatan Königsberg.
(Sumber: cdn.prod.website-files.com)

Pada bagian ini dijelaskan beberapa konsep dasar mengenai graf yang diambil dari Deo (1989). Suatu graf G didefinisikan sebagai himpunan terurut $(V(G), E(G))$, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ merupakan himpunan titik pada graf G dengan $V(G) \neq \emptyset$, sedangkan $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ merupakan himpunan sisi yang menghubungkan pasangan titik pada $V(G)$. Banyaknya titik pada himpunan $V(G)$ disebut orde dari graf G. Graf G dikatakan terhubung (*connected graph*) apabila untuk setiap pasangan titik dalam graf terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sebaliknya, jika terdapat paling sedikit satu pasangan titik yang tidak dihubungkan oleh lintasan, maka graf tersebut disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*). Pada graf terhubung G, jarak antara dua titik v_i dan v_j, yang dinotasikan dengan $d(v_i, v_j)$, adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan kedua titik tersebut, yaitu banyaknya sisi pada lintasan tersebut.



Gambar 2.2 Contoh graf dengan 5 titik dan 8 sisi.

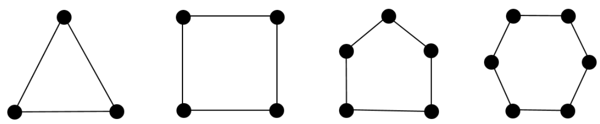
Gambar 2.2 merupakan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Dua titik pada suatu graf dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika kedua titik itu dihubungkan oleh sisi. Jika titik v_1 dan v_2 dihubungkan oleh sisi e, maka kedua titik tersebut dikatakan menempel (*incidence*) pada sisi e, dan sisi e juga dikatakan menempel pada titik v_1 dan v_2. Pada Gambar 2.2, titik yang bertetangga dengan v_1 adalah v_2, v_3, dan v_4, sedangkan sisi yang menempel pada v_1 adalah e_1, e_5, dan e_6. Titik terisolasi (*isolated vertex*) merupakan titik yang tidak memiliki sisi yang bersisian atau tidak bertetangga dengan titik lain (titik berderajat nol).

Derajat *(degree)* suatu titik yang dinotasikan dengan $d(v)$ adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v. Derajat pada masing-masing titik pada Gambar 2.2 adalah $d(v_1) = 3, d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = 4$, dan $d(v_5) = 1$. Daun (*pendant vertex*) adalah titik yang memiliki derajat satu. Pada Gambar 2.2, titik yang merupakan daun adalah v_5. Sisi paralel (*multiple edges*) adalah dua atau lebih sisi yang mempunyai pasangan titik ujung yang sama. *Loop* adalah sisi yang berawal dan berakhir pada titik yang sama. Pada Gambar 2.2 terdapat sisi paralel pada sisi e_3 dan e_4, serta *loop* yaitu sisi e_8. Graf yang tidak mengandung *loop* serta tidak memiliki sisi paralel disebut sebagai graf sederhana.

Istilah lain pada pembahasan graf adalah jalan, lintasan, dan sirkuit. Jalan *(walk)* adalah suatu barisan berhingga dari titik dan sisi yang dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya pada suatu graf. Jalan disebut tertutup apabila titik awal sama dengan titik akhir. Sedangkan jalan disebut terbuka apabila titik awal tidak sama dengan titik akhir. Contoh jalan pada Gambar 2.2 adalah $v_1, e_5, v_3, e_3, v_4, e_6, v_1, e_1, v_2, e_2, v_4, e_4, v_3, e_7, v_5$. Lintasan (*path*) merupakan jalan yang melewati titik-titik yang berbeda dalam suatu graf, dengan setiap titik dilalui tepat satu kali. Contoh lintasan pada Gambar 2.2 adalah $v_1, e_1, v_2, e_2, v_4, e_3, v_3, e_7, v_5$. Sirkuit (*circuit*) adalah lintasan tertutup yang titik awal dan titik akhirnya sama. Sirkuit dibedakan menjadi dua macam, yaitu sirkuit ganjil dan sirkuit genap. Sirkuit ganjil adalah sirkuit yang memuat titik sebanyak ganjil, sedangkan sirkuit genap adalah sirkuit yang memuat titik sebanyak genap. Contoh sirkuit pada Gambar 2.2 adalah $v_1, e_5, v_3, e_4, v_4, e_6, v_1$.

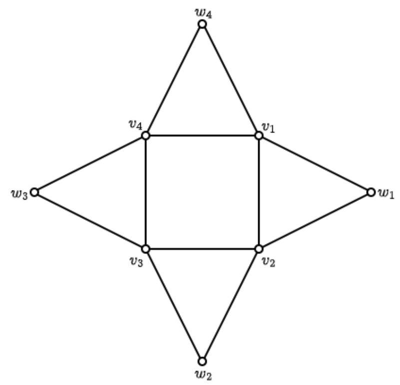
2.2 Graf Bunga Mawar dan Barbelnya

Graf siklus, yang juga dikenal sebagai graf lingkaran, merupakan graf sederhana yang terhubung dengan setiap titiknya memiliki derajat dua. Graf siklus dengan n titik dinotasikan dengan C_n, dengan $n \geq 3$. (Daniel dan Taneo, 2020). Berikut ini diberikan beberapa contoh graf siklus.



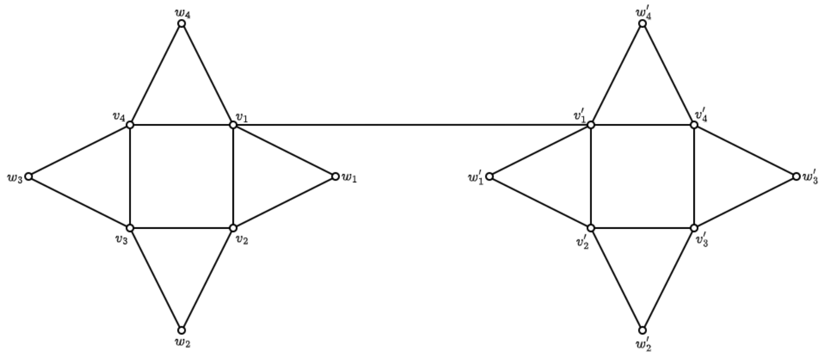
Gambar 2.3 Graf siklus C_n

Graf bunga Mawar merupakan salah satu bentuk graf terhubung yang memuat graf siklus C_n dengan $n \geq 3$. Graf ini dinotasikan dengan $M(C_n)$. Graf bunga Mawar $M(C_n)$ dapat dikontruksi dari graf siklus C_n dengan titik-titik $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan n titik terisolasi (*isolated vertices*) $w_1, w_2, \ldots, w_n$, dengan menghubungkan setiap dua titik v_s, v_{s+1} dengan w_s, untuk $s = 1, 2, \ldots, n$, dengan $v_{n+1} = v_1$. Graf bunga Mawar $M(C_n)$ memiliki n titik berderajat 2 dan n titik berderajat 4 (Nurvazly dkk., 2026).



Gambar 2.4 Graf bunga Mawar $M(C_4)$

Graf barbel bunga Mawar adalah graf yang terbentuk dari gabungan graf bunga Mawar $M(C_n)$ yang dihubungkan oleh sisi jembatan. Graf ini dinotasikan dengan $B_{M(C_n)}$.



Gambar 2.5 Graf barbel bunga Mawar $B_{M(C_4)}$

2.3 Bilangan Kromatik Lokasi Sisi Graf

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sederhana terhubung dan $c : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ suatu pewarnaan sisi sejati, yaitu pewarnaan sisi dengan setiap pasangan sisi yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Banyaknya minimum warna yang digunakan untuk pewarnaan sisi pada G disebut bilangan kromatik sisi (atau biasa disebut indeks kromatik) dan dinotasikan dengan $\chi'(G)$ (Candra dan Budayasa, 2019).

Misalkan C_i adalah himpunan sisi berwarna yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ merupakan himpunan yang terdiri atas kelas-kelas warna dari $E(G)$. Untuk suatu titik v pada G, kode warna titik $c_\pi(v)$ didefinisikan sebagai k-pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \ldots, d(v, C_k))$, dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, e) \mid e \in C_i\}$ untuk setiap $1 \leq i \leq k$, serta $d(v, e) = \min\{d(v, x), d(v, y) \mid e = xy\}$. Jika setiap titik memiliki kode warna yang berbeda di G, maka c disebut pewarnaan lokasi sisi. Bilangan kromatik lokasi sisi dari G, yang dinotasikan dengan $\chi'_L(G)$, adalah banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk memperoleh suatu pewarnaan lokasi sisi pada G. Berikut diberikan teorema dasar yang berkaitan dengan bilangan kromatik lokasi sisi (Korivand dkk., 2024).

Teorema 2.3.1 Misalkan G graf terhubung dengan derajat maksimum $\Delta(G)$, maka $\chi'_L(G) \geq \Delta(G)$

Bukti:
Misalkan $v \in V(G)$ dengan $d(v) = \Delta(G)$, maka semua sisi yang bertetangga dengan v diberi warna berbeda. Jadi $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Hal ini mengakibatkan $\chi'_L(G) \geq \Delta(G)$ ■

Teorema 2.3.2 (Korivand dkk., 2024) Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$, berlaku

$$\chi'_L(C_n) = \begin{cases} 3, & \text{jika } n = 3 \\ 4, & \text{jika } n \geq 4 \end{cases}$$

Bukti:
Untuk $n = 3$, berlaku $\chi'_L(C_n) = 3$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\chi'_L(C_n) > 3$ untuk $n \geq 4$ dengan pendekatan kontradiksi. Andaikan sisi-sisi C_n diwarnai dengan tiga warna dan warna 3 paling sedikit digunakan. Misalkan $e = v_1v_2$ diberi warna 3. Untuk n ganjil, titik v_3 dan v_n memiliki kode warna sisi yang sama, sedangkan untuk n genap, v_1 dan v_2 memiliki kode warna yang sama, sehingga warna 3 minimal muncul pada dua sisi, misal e dan f. Jika jarak keduanya minimal dua, maka $c_\pi(a) = c_\pi(b)$. Misalkan $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ merupakan suatu *maximal alternating matching*, yaitu barisan sisi pada C_n dengan $d(e_i, e_{i+1}) = 1$ untuk setiap $1 \leq i < m$, dan bersifat maksimal. Karena barisan tersebut terdiri dari sisi-sisi yang berwarna 3, maka untuk setiap $1 \leq i \leq m$ berlaku $e_i \in C_3$, sehingga $d(e_i, e_{i+1}) = 1$ dan $e_i \in C_3$. Dengan demikian diperoleh titik a dan b yang memiliki kode warna sisi yang sama, yaitu $(0, 0, 1)$, sehingga terjadi kontradiksi. Akibatnya, diperlukan 4 warna, dengan dua sisi bertetangga diberi warna 3 dan 4, sedangkan sisi lainnya diwarnai selang-seling dengan warna 1 dan 2 (Korivand dkk., 2024). ■

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 di Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Langkah-Langkah Penelitian

Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Metode menentukan bilangan kromatik lokasi sisi graf bunga Mawar $M(C_n)$ adalah sebagai berikut:

   a. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi sisi pada graf bunga Mawar $M(C_n)$ untuk $n \geq 3$ dengan menggunakan Teorema 2.3.1. Apabila batas tersebut belum memenuhi syarat pewarnaan lokasi sisi, maka jumlah warna ditambahkan secara bertahap hingga seluruh syarat pewarnaan lokasi sisi terpenuhi.

   b. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi sisi pada graf bunga Mawar $M(C_n)$ untuk $n \geq 3$ dengan mengkonstruksi pewarnaan yang memenuhi syarat pewarnaan lokasi berdasarkan struktur grafnya. Pewarnaan sisi dilakukan dengan terlebih dahulu mewarnai sisi-sisi pada graf siklus, kemudian dilanjutkan pada sisi-sisi di luar graf siklus.

   c. Jika batas atas $\chi'_L(M(C_n)) \leq x$ dan batas bawah $\chi'_L(M(C_n)) \geq x$, maka diperoleh bilangan kromatik lokasi sisinya yaitu $\chi'_L(M(C_n)) = x$.

   d. Merumuskan hasil-hasil yang diperoleh ke dalam suatu pernyataan matematika.

e. Memberikan pembuktian terhadap hasil yang telah diperoleh pada Langkah 1d.

2. Metode menentukan bilangan kromatik lokasi sisi graf barbel bunga Mawar $B_{M(C_n)}$ adalah sebagai berikut:

   a. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi sisi graf barbel bunga Mawar $M(C_n)$ untuk $n \geq 3$ dengan menggunakan Teorema 2.3.1. Apabila batas yang diperoleh belum memenuhi syarat pewarnaan lokasi sisi, maka dilakukan penambahan warna secara bertahap hingga seluruh syarat pewarnaan lokasi sisi terpenuhi.

   b. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi sisi pada graf bunga Mawar $M(C_n)$ untuk $n \geq 3$ dengan mengkonstruksi pewarnaan yang memenuhi syarat pewarnaan lokasi berdasarkan struktur grafnya. Pewarnaan sisi dilakukan dengan terlebih dahulu mewarnai sisi-sisi pada graf siklus, kemudian dilanjutkan pada sisi-sisi di luar graf siklus.

   c. Jika batas atas $\chi'_L(M(C_n)) \leq x$ dan batas bawah $\chi'_L(M(C_n)) \geq x$, maka diperoleh bilangan kromatik lokasi sisinya yaitu $\chi'_L(M(C_n)) = x$.

   d. Merumuskan hasil-hasil yang diperoleh ke dalam suatu pernyataan matematika.

   e. Memberikan pembuktian terhadap hasil yang telah diperoleh pada Langkah 2d.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, diperoleh bahwa bilangan kromatik lokasi sisi graf bunga Mawar, $\chi'_L(M(C_n))$ adalah 5 untuk $n \in \{3, 4, 5\}$ dan 6 untuk $n \geq 6$. Selain itu, bilangan kromatik lokasi sisi graf barbel bunga Mawar $\chi'_L(B_M(C_n))$, adalah 6 untuk $n \geq 3$.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan mengkaji bilangan kromatik lokasi sisi graf bunga Mawar pada operasi graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati, A., Baskoro, E. T., Assiyatun, H., Suprijanto, D., Simanjuntak, R., & Varshney, V. (2012). The locating-Chromatic Number of Firecracker Graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 63(1), 11-23.

Asmiati, A., Irawan, A., Nuryaman, A., Muludi, K. (2023). The Locating Chromatic Number for Certain Operation of Origami Graphs. *Mathematics and Statistics*, 11(1), 101-106.

Candra, I. K. R. S., & Budayasa, I. K. (2019). Indeks Kromatik Kuat Beberapa Klas Graf. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 7(2), 90-99.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M. A., Slater, P. J., & Zhang, P. (2002). The Locating-Chromatic Number of a Graph. *Bull. Inst. Combin. Appl*, 36, 89-101.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M. A., Slater, P. J., & Zhang, P. (2003). Graphs of Order n With Locating-Chromatic Number $n-1$. *Discrete mathematics*, 269(1-3), 65-79.

Daniel, F., & Taneo, P. N. L. (2020). *Teori Graf*. Deepublish, Yogyakarta.

Deo, N. (1989). *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall of India Prive Limited, New Delhi.

Irawan, A., Asmiati, A., Zakaria, L., & Muludi, K. (2021). The Locating-Chromatic Number of Origami Graphs. *Algorithms*, 14(167), 1-15.

Korivand, M., Mojdeh, D. A., Baskoro, E. T., & Erfanian, A. (2024). Edge-locating coloring of graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, 12(1), 55-73.

Kusumastuti, A. A., & Budayasa, I. K. (2020). Segitiga Pelangi pada Pewarnaan-Sisi Graf. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 8(1), 35-44.

Ma'arif, A., Halim, M. G., Indriani, S., Kristiana, A. I., & Alfarisi, R. (2021). Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Inklusif pada Graf Kipas, Graf Petasan, dan Graf Matahari. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, 15(4), 727-734.

Minarti, L. D., Dafik, D., Setiawani, S., Slamin, S.,& Fatahillah, A. (2019). Pewarnaan Sisi r-Dinamis pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi Titik Keluarga Graf Pohon dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir. *Saintifika*, 21(2), 15-22.

Munir, R. (2010). *Matematika Diskrit*. Informatika Bandung, Bandung.

Nurvazly, D. E., Sihombing, M. M., Asmiati, A., & Notiragayu, N. (2026).The Partition Dimension of Rose Graphs and Its Barbell. *Jurnal Matematika UNAND*, 15(1), 63-77.

Rahmatalia, S., Asmiati, A., Notiragayu, N. (2022). Bilangan Kromatik Lokasi Graf Split Lintasan. *Jurnal Matematika Integratif*, 18(1), 73-80.

Saifudin, I., & Dafik, D. (2014). Bilangan Khromatik Pewarnaan Sisi pada Graf Khusus dan Operasinya. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik*, 1(5), 202-210.

Sawitri, R., Amelia, Lidwina., Asmiati, A., Nurvazly, D. E. (2025). Locating Chromatic Number for Rose Graphs and Barbell Operation. *Eigen Mathematics Journal*, 8(1), 111-122.