PENDUGAAN INTERVAL KEPERCAYAAN RASIO PARAMETER MODEL LINEAR DENGAN METODE FIELLER PADA KASUS HETEROSKEDASTISITAS MENGGUNAKAN *WEIGHTED LEAST SQUARES* (STUDI SIMULASI)

(Skripsi)

Oleh

PRETTY ENJELINA BR PELAWI
NPM. 2217031095

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

ABSTRACT

CONFIDENCE INTERVAL ESTIMATION OF LINEAR MODEL PARAMETER RATIOS VIA FIELLER'S METHOD UNDER HETEROSCEDASTICITY USING WEIGHTED LEAST SQUARES (SIMULATION STUDY)

By

Pretty Enjelina Br Pelawi

Heteroskedasticity in linear models is a common problem that can cause parameter estimators to become inefficient and the estimation of the variance-covariance matrix to become inconsistent. This condition leads to incorrect and inaccurate statistical inference, including the construction of confidence intervals. Confidence interval estimation is not only performed for a single parameter but can also involve ratios, in which the Fieller method is commonly used for constructing confidence intervals for parameter ratios in linear models. This study examines the estimation of confidence intervals for parameter ratios using the Fieller method under heteroskedastic conditions by applying the Weighted Least Squares (WLS) method. Through simulations with variations in heteroskedasticity levels of $\gamma = 0, 1, 3, 5$ and sample sizes of $n = 30$ and $n = 50$, the performance of the method was evaluated based on bias, Coverage Probability (CP), and Average Length (AL). The results show that the WLS method produces unbiased parameter estimators at all levels of heteroskedasticity. In addition, the Fieller method produces CP values around 0.95 with only small fluctuations and tends to yield shorter AL values. Therefore, the combination of the WLS and Fieller methods is proven to be stable and efficient for parameter estimation and confidence interval estimation of parameter ratios under heteroskedastic conditions.

Keywords: Heteroscedasticity, Fieller's Method, Confidence Interval, Coverage Probability, Average Length.

ABSTRAK

PENDUGAAN INTERVAL KEPERCAYAAN RASIO PARAMETER MODEL LINEAR DENGAN METODE FIELLER PADA KASUS HETEROSKEDASTISITAS MENGGUNAKAN *WEIGHTED LEAST SQUARES* (STUDI SIMULASI)

Oleh

Pretty Enjelina Br Pelawi

Heteroskedastisitas pada model linear merupakan permasalahan yang sering muncul dalam hal ini dan dapat menyebabkan penduga parameter menjadi tidak efisien serta pendugaan matriks varians-kovarians menjadi tidak konsisten. Kondisi ini mengakibatkan inferensi statistik yang dihasilkan, termasuk pembentukan interval kepercayaan menjadi keliru dan tidak akurat. Pendugaan interval kepercayaan tidak hanya dilakukan untuk satu parameter, tetapi juga dapat berbentuk rasio, di mana metode Fieller sering digunakan dalam pembentukan interval kepercayaan pada rasio parameter model linear. Penelitian ini mengkaji pendugaan interval kepercayaan rasio parameter menggunakan metode Fieller pada kondisi heteroskedastisitas dengan menerapkan *Weighted Least Squares* (WLS). Melalui simulasi dengan variasi tingkat heteroskedastisitas $\gamma = 0, 1, 3, 5$ dan ukuran sampel $n = 30$ dan $n = 50$, kinerja metode dievaluasi berdasarkan nilai bias, *Coverage Probability* (CP), dan *Average Length* (AL). Hasil menunjukkan bahwa metode WLS menghasilkan penduga parameter yang tidak bias pada seluruh tingkat heteroskedastisitas. Selain itu, metode Fieller menghasilkan nilai CP di sekitar 0,95 dengan fluktuasi kecil serta nilai AL yang cenderung lebih pendek. Dengan demikian, kombinasi metode WLS dan Fieller terbukti stabil dan efisien dalam pendugaan parameter serta interval kepercayaan rasio pada kondisi heteroskedastisitas.

Kata-kata kunci: Heteroskedastisitas, Metode Fieller, Interval Kepercayaan, *Coverage Probability*, *Average Length*.

PENDUGAAN INTERVAL KEPERCAYAAN RASIO PARAMETER MODEL LINEAR DENGAN METODE FIELLER PADA KASUS HETEROSKEDASTISITAS MENGGUNAKAN *WEIGHTED LEAST SQUARES* (STUDI SIMULASI)

PRETTY ENJELINA BR PELAWI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

Judul Skripsi	:	**PENDUGAAN INTERVAL KEPERCAYAAN RASIO PARAMETER MODEL LINEAR DENGAN METODE FIELLER PADA KASUS HETEROSKEDASTISITAS MENGGUNAKAN *WEIGHTED LEAST SQUARES* (STUDI SIMULASI)**
Nama Mahasiswa	:	Pretty Enjelina Br Pelawi
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031095**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Mustofa Usman, M.A., Ph.D	**Widiarti, S.Si., M.Si.**
NIP 195701011984031020	NIP 198005022005012003

2. Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama,
FMIPA Universitas Lampung

Mulyono, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP. 197406112000031002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	:	**Prof. Dr. Mustofa Usman, M.A., Ph.D**	....
Sekretaris	:	**Widiarti, S.Si., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Edwin Russel, S.E., M.Sc**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **04 Mei 2026**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Pretty Enjelina Br Pelawi**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031095**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Pendugaan Interval Kepercayaan Rasio Parameter Model Linear dengan Metode Fieller pada Kasus Heteroskedastisitas Menggunakan *Weighted Least Squares* (Studi Simulasi)**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 04 Mei 2026

Penulis

Pretty Enjelina Br Pelawi

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Pretty Enjelina Br Pelawi, lahir di Kandibata pada tanggal 04 Juli 2004. Penulis merupakan putri sulung dari empat bersaudara, dari pasangan Bapak Lesman Pelawi dan Ibu Elisabet Rina Br Simbolon.

Penulis mengawali pendidikan formal di Taman Kanak-Kanak di TK Sint Yoseph pada tahun 2009. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri 040568 Tigabinanga pada tahun 2010 hingga 2016. Kemudian melanjutkan pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMP Swasta Asisi Tigabinanga pada tahun 2016 hingga 2019. Kemudian menempuh Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 1 Tigabinanga pada tahun 2019 hingga 2022.

Pada tahun 2022, penulis melanjutkan pendidikan Strata Satu di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung (UNILA) melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Selama menempuh pendidikan di perguruan tinggi, penulis aktif dalam kegiatan organisasi. Pada tahun 2023, penulis bergabung sebagai anggota Biro Dana dan Usaha Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA). Selain itu, Penulis juga telah melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Dinas Komunikasi, Informatika, dan Statistik Provinsi Lampung pada bulan Desember 2024 hingga Januari 2025. Penulis juga mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada Juni hingga Agustus 2025 di Kelurahan Negeri Olok Gading, Kecamatan Teluk Betung Barat, Kota Bandar Lampung.

KATA INSPIRASI

"Sebab Aku ini mengetahui rancangan-rancangan apa yang ada pada-Ku mengenai kamu, demikianlah firman Tuhan, yaitu rancangan damai sejahtera dan bukan rancangan kecelakaan, untuk memberikan kepadamu hari depan yang penuh harapan"

– Yeremia 19:11 –

"Janganlah takut, sebab Aku menyertai engkau, janganlah bimbang, sebab Aku ini Allahmu; Aku akan meneguhkan, bahkan akan menolong engkau; Aku akan memegang engkau dengan tangan kanan-Ku yang membawa kemenangan"

– Yesaya 41:10 –

"Bersukacitalah dalam pengharapan, sabarlah dalam kesesakan, dan bertekunlah dalam doa"

– Roma 12:12 –

"Diberkatilah orang yang mengandalkan Tuhan, yang menaruh harapannya pada Tuhan"

– Yeremia 17:7 –

"Ecce ancilla Domini, fiat mihi secundum verbum tuum"

– Lukas 1:38 –

PERSEMBAHAN

Segala puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas limpahan rahmat dan pertolongan-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik. Dengan kerendahan hati, rasa syukur dan sukacita karya ini penulis persembahkan sebagai ungkapan terima kasih yang tulus kepada:

Ayah dan Ibu Tercinta

Teristimewa untuk orang tua tercinta, sumber cinta pertama dan tempat penulis selalu kembali. Terima kasih atas kasih sayang, motivasi, nasihat, doa-doa yang tidak pernah putus, dan segala dukungan yang telah menguatkan penulis hingga titik ini. Kalian adalah berkat terbesar dalam hidup penulis. Kiranya Tuhan, roh kudus dan berkat-Nya senantiasa melimpahkan kesehatan, sukacita, dan umur panjang agar dapat terus mendampingi setiap langkah dan pencapaian penulis.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, yang sabar dalam membimbing, serta telah banyak meluangkan waktu, memberikan motivasi, arahan dan ilmu yang berharga.

Keluarga Besar dan Sahabat

Terima kasih kepada keluarga besar dan sahabat-sahabat penulis atas doa, dukungan dan motivasi yang selalu menguatkan melalui kata dan kehadiran.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala berkat dan penyertaan-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Pendugaan Interval Kepercayaan Rasio Parameter Model Linear Dengan Metode Fieller Pada Kasus Heteroskedastisitas Menggunakan *Weighted Least Squares* (Studi Simulasi)" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Mustofa Usman, M.A., Ph.D selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, motivasi, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Edwin Russel, S.E., M.Sc selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Akademik yang telah memberikan bimbingan, motivasi dan arahan selama perkuliahan.

6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Teristimewa kedua orang tua penulis tercinta, Bapak Lesman Pelawi dan Ibu Elisabet Rina Br Simbolon, serta adik-adik tersayang yang senantiasa memberikan kasih sayang yang tulus, cinta yang tak bertepi, serta dukungan yan tak pernah surut. Terimakasih atas setia doa yang tiada henti, semangat, motivasi, dan arahan yang diberikan, yang senantiasa menjadi sumber kekuatan terbesar bagi penulis dalam setiap langkah dan perjuangan penulis.
8. Seluruh keluarga besar yang senantiasa memberikan semangat, dukungan, motivasi, dan arahan selama proses perkuliahan.
9. Saudari Siska, sahabat penulis, yang telah mewarnai hari-hari selama masa perkuliahan serta senantiasa memberikan motivasi dan semangat, baik dalam suka maupun duka.
10. Teman-teman seperjuangan Zakiah, Viqi dan Nadia yang telah membersamai, menghadirkan tawa, menumbuhkan semangat serta saling menguatkan selama masa perkuliahan, sekaligus berbagi cerita dan pengalaman yang berkesan.
11. Saudari Elisabeth dan Elsi, yang dengan penuh kesabaran selalu mendengarkan keluh kesah, serta memberi dukungan, semangat, dan bantuan selama menjalani masa kuliah.
12. Teman-teman seperbimbingan, Saudari Apri dan Ejia, rekan seperjuangan dalam proses bimbingan yang saling menguatkan, membantu, serta menghadirkan canda tawa dan semangat.
13. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini maupun dalam perkuliahan.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 04 Mei 2026

Pretty Enjelina Br Pelawi

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Model linear merupakan model yang menyatakan hubungan antara variabel respon (*dependent*) dan variabel penjelas (*independent*) yang dinyatakan melalui parameter-parameter yang bersifat linear. Model linear sering digunakan karena penyusunan data ke dalam model yang lebih sederhana dapat mempermudah proses pemecahan masalah. Model linear biasanya dinyatakan dalam bentuk $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, dengan $\mathbf{y}$ adalah vektor peubah acak yang diamati, $\mathbf{X}$ adalah matriks variabel penjelas, $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor parameter yang tidak diketahui nilainya dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah vektor galat yang diasumsikan berdistribusi normal dengan $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$ dan $\mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Sigma}$ (Usman & Warsono, 2009). Pada model ini, parameter dapat diestimasi, menggunakan *Least Squares* (LS) selama asumsi galat berdistribusi normal dengan rataan nol dan varians konstan terpenuhi (Myers & Milton, 1991). Apabila asumsi tersebut tidak terpenuhi, maka metode LS tidak lagi efisien. Namun, dalam praktiknya sering sekali asumsi varians tidak terpenuhi yang mengakibatkan hasil penduga bias dan inferensi seperti membuat interval kepercayaan dan uji hipotesis yang dihasilkan cenderung tidak akurat.

Dalam statistika inferensia, para peneliti sering tertarik membentuk selang dugaan (interval kepercayaan) yang memuat nilai parameter sesungguhnya dengan peluang tinggi. Menurut Usman & Warsono (2009) ada dua kriteria utama dalam membentuk selang dugaan yang baik yaitu peluang selang memuat parameter yang salah harus kecil atau *coverage probability* yang tinggi dan panjang selang atau *average length* juga harus kecil. C*overage probability* merupakan ukuran yang menunjukkan persentase jangka panjang suatu interval kepercayaan dalam memuat parameter yang tidak diketahui. Secara konseptual, ukuran ini merepresentasikan peluang batas bawah dan batas atas interval yang mencakup parameter sebenarnya. Oleh karena itu, *coverage probability* digunakan sebagai indikator utama dalam menulai validitas suatu interval kepercayaan (McGrath & Burke , 2024). Di sisi lain, lebar interval kepercaaan ataupun *average length* mengukur presisi dari estimator titik. Interval yang lebih sempit menunjukkan tingkat presisi yang lebih tinggi (Veljkovic, 2024)

Salah satu bentuk selang dugaan yang cukup menantang adalah ketika parameter yang dikaji berbentuk rasio. Rasio parameter muncul dalam banyak aplikasi seperti perbandingan efek perlakuan, analisis efisiensi, dan berbagai kajian lainnya. Namun, distribusi rasio dua parameter tidak selalu mengikuti bentuk distribusi normal standar, terutama ketika penyebut mendekati nol atau ketika variannya besar. Kondisi ini menyebabkan interval kepercayaan mudah salah cakup, terlalu lebar, atau bahkan tidak dapat dihitung sehingga memerlukan pendekatan khusus. Salah satu metode yang banyak digunakan adalah metode Fieller. Metode Fieller merupakan prosedur umum untuk membentuk batas interval kepercayaan bagi statistik berbentuk rasio dari beberapa parameter yang berdistribusi normal dan telah banyak digunakan dalam penelitian biologi, kesehatan dan ekonomi (Hirschberg & Lye, 2007).

Selain metode Fieller, pendekatan lain yang sering digunakan adalah metode Delta. Namun, berbagai penelitian menunjukkan bahwa metode Fieller lebih unggul dibandingkan metode Delta. Pada penelitian Freedman (2001) menemukan bahwa metode Fieller memberikan tingkat cakupan (*coverage*) yang lebih baik serta menghasilkan evaluasi yang lebih akurat terhadap ketepatan dan kekuatan uji rasio melalui studi simulasi. Metode Fieller lebih unggul dibandingkan metode Delta karena mampu menangani kondisi di mana penyebut mendekati nol dan distribusi rasio tidak simetris sedangkan metode Delta cenderung menghasilkan interval yang bias pada kondisi tersebut (Ratsimalahelo, 2025). Berkat keunggulan tersebut, metode Fieller pun telah banyak diterapkan dalam analisis model linear. Zerbe (1978) telah mengaplikasikan metode ini pada model linear dengan data dosis obat, namun masih mengasumsikan varians galat konstan. Selain itu, metode Fieller juga digunakan dalam analisis dosis respons median pada studi farmakologi dan menunjukkan kinerja yang baik, yang ditunjukkan melalui tingkat cakupan probabilitas dan lebar interval kepercayaan (Wang *et al*., 2020).

Dalam penelitian sering sekali kita menemukan data dengan galatnya tidak konstan atau heteroskedastisitas. Apabila tetap menganalisis dengan data yang mengalami heteroskedastisitas menggunakan LS maka interval kepercayaan akan tidak valid karena sifat varian minimum tidak terpenuhi. Untuk mengatasi heteroskedastisitas, digunakan pendekatan *Weighted Least Square* (WLS) yang memberikan bobot pada setiap pengamatan berdasarkan variansinya (Usman & Warsono, 2009). Dengan penerapan WLS, penduga parameter menjadi lebih efesien sehingga diharapkan penyusunan interval kepercayaan juga menjadi lebih tepat. WLS ini terbukti mengatasi masalah heteroskedastisitas pada penelitian Nisa dkk. (2020) dimana dalam penelitian ini WLS menghasilkan penduga yang konsisten.

Keberadaan heteroskedastisitas pada galat dalam model linear yang dispesifikasikan menyebabkan penduga parameter menjadi tidak efesien dan pendugaan matriks varians-kovarians menjadi tidak konsisten, sehingga konsekuensinya inferensi statistik yang dihasilkan, termasuk pembentukan interval kepercayaan menjadi keliru (White, 1980). Dalam penelitian Zerbe (1978), metode Fieller diterapkan pada model linear dengan asumsi galat berdistribusi normal dan varians konstan. Kondisi ini menunjukkan bahwa penerapan metode Fieller dalam model linear umumnya dilakukan dalam asumsi homoskedastisitas. Oleh karena itu, apabila heteroskedastisitas tidak ditangani, maka interval kepercayaan yang dibentuk menggunakan metode Fieller berpotensi memiliki peluang cakupan yang menyimpang dari tingkat kepercayaan nominal akibat pendugaan matriks kovarian yang digunakan tidak konsisten. Untuk mengatasi permasalahan tersebut, penggunaan metode WLS diperlukan untuk menangani heteroskedastisitas sehingga pendugaan interval kepercaaan menggunakan Fieller diharapkan memiliki peluang cakuan yang lebih mendekati tingkat kepercayaan nominal.

Hingga saat ini, penelitian mengenai pembentukan interval rasio parameter menggunakan metode Fieller pada model linear dengan heteroskedastisitas melalui pendekatan simulasi masih relatif terbatas. Sebagian penelitian sebelumnya seperti Hirschberg & Lye (2007), Freedman (2001), Zerbe (1978) umumnya hanya mempertimbangkan model dengan varians galat konstan. Oleh karena itu, penelitian ini dilakukan untuk mengisi kekosongan tersebut dengan mengkaji interval kepercayaan rasio parameter menggunakan metode Fieller pada model linear yang mengalami kasus heteroskedastisitas yang diatasi dengan WLS. Analisis dilakukan menggunakan simulasi berbantuan perangkat lunak SAS.

1.2 Tujuan Penelitian

1. Menilai efektivitas *Weighted Least Squares* (WLS) dalam menghasilkan penduga parameter yang tidak bias dan efisien pada model linear dengan varians galat

yang tidak konstan berdasarkan nilai bias yang diperoleh dari simulasi.

2. Membangun interval kepercayaan rasio parameter model linear yang sudah diatasi masalah heteroskedastisitas menggunakan WLS dengan metode Fieller serta mengevaluasi kinerjanya melalui *coverage probability* dan *average length* berdasarkan simulasi dengan bantuan perangkat lunak SAS.

1.3 Manfaat Penelitian

1. Menambah wawasan pengetahuan peneliti dan pembaca yang lebih mendalam mengenai metode Fieller dalam membentuk interval kepercayaan dan juga metode *Weighted Least Squares* (WLS) pada model linear dengan varians tidak konstan.

2. Memberikan gambaran mengenai kinerja interval kepercayaan untuk rasio parameter menggunakan metode Fieller setelah penanganan heteroskedastisitas, yang dievaluasi berdasarkan nilai *coverage probability* dan *average length* melalui studi simuasi mengunakan perangkat lunak SAS.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Matriks

Menurut Usman & Warsono (2009), suatu matriks dilambangkan dengan huruf besar dan cetak tebal, misalkan $\mathbf{B}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$. Dimana matriks ini merupakan susunan angka-angka dalam bentuk persegi atau persegi panjang, dengan anggota-anggotanya berupa skalar. Suatu matriks mempunyai ukuran, misal $\mathbf{X}$ merupakan matriks berukuran $n \times p$ dimana n banyaknya baris dan p banyaknya kolom. Dalam matriks $\mathbf{X}$ memiliki unsur yang dinotasikan dengan x_{jk}, dimana j menyatakan banyak baris sedangkan k menyatakan banyaknya kolom. Suatu matriks dapat juga dilambangkan dengan:

$$\mathbf{X} = [x_{jk}]$$

Suatu matriks identitas merupakan matriks yang anggota-anggotanya 1 pada diagonal utamanya dan nol selainnya dan dinotasikan dengan $\mathbf{I}$, tetapi untuk menunjukkan ukuran matriks identitas $n \times n$ dinotasikan dengan $\mathbf{I}_n$. Untuk matriks satuan $n \times n$ dinotasikan dengan $\mathbf{J}_n$. Matriks satuan dengan ukuran matriks $n \times 1$ dinotasikan dengan $\mathbf{1}_n$. Sedangkan untuk matriks yang semua anggotanya bernilai nol dengan ukuran matriks $m \times n$ dinotasikan dengan $\mathbf{0}_{m\times n}$.

Beberapa konsep-konsep matriks sebagai berikut :

1. **Transpos Matriks**

   Misalkan suatu matriks $\mathbf{A}$ merupakan matriks berukuran $n \times p$, maka transpos $\mathbf{A}$ dilambangkan dengan $\mathbf{A}'$, adalah suatu matriks berukuran $p \times n$ dengan pembentukan dari pertukaran antara baris dengan kolom (Usman & Warsono, 2009).

2. **Invers Matriks**

   Suatu matriks misalkan $\mathbf{A}$ dikatakan mempunyai invers, dengan dinotasikan dengan $\mathbf{A}^{-1}$, jika dan hanya jika $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Apabila matriks $\mathbf{A}$ memiliki invers, maka matriks $\mathbf{A}$ dikatakan nonsingular, namun jika tidak mempunyai invers, maka matriks $\mathbf{A}$ dikatakan matriks singular (Usman & Warsono, 2009).

3. **Trace Matriks**

   Suatu matriks bujur sangkar yaitu matriks yang banyak baris dan kolomnya sama, misalkan matriks $\mathbf{A}$ berukuran $n \times n$, maka $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ didefinisikan sebagai berikut:

   $$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

   sehingga bentuk trace dituliskan dalam bentuk seperti di atas (Usman & Warsono, 2009).

4. **Matriks Ortogonal**

   Diberikan $\mathbf{A}$ berukuran $n \times n$ sehingga $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$, jika memenuhi asumsi tersebut maka matriks tersebut matriks ortogonal (Usman & Warsono, 2009).

5. **Matriks Idempoten**

   Misal diberikan matriks $\mathbf{A}$ berukuran $n \times n$, dikatakan idempoten jika dikalikan dengan dirinya sendiri menghasilkan dirinya sendiri atau dapat ditulis dengan $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Salah satu contohnya adalah matriks identitas, $\mathbf{I}^2 = \mathbf{I}$ (Myers & Milton, 1991).

6. **Matriks Simetris**

   Misal diberikan matriks $\mathbf{A}$ berukuran $n \times n$, apabila matriks $\mathbf{A}$ ditransposkan tetap menghasilkan dirinya sendiri dapat ditulis $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$, matriks ini disebut matriks simetris (Myers & Milton, 1991).

7. **Sifat-Sifat Operator Matriks**

   Menurut Myers & Milton (1991) misalkan $\mathbf{X}$ dan $\mathbf{Y}$ merupakan matriks dengan dimensi $n \times k$. Diberikan x_{ij} dan y_{ij} dimana $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, \ldots, k$ merupakan entri dari matriks atau dinotasikan anggota dari matriks. Maka, sifat-sifat operator yang dapat dibentuk sebagai berikut :

   a. $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ adalah matriks dengan entri (i, j) adalah $x_{ij} + y_{ij}$

b. $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$ adalah matriks dengan entri (i, j) adalah $x_{ij} - y_{ij}$

c. $k\mathbf{X}$, dimana k adalah sebarang bilangan real, matriks dengan entri (i, j) adalah kx_{ij}, perkalian ini sering disebut perkalian skalar.

8. **Perkalian Matriks**

Diberikan $\mathbf{X}$ adalah matriks berukuran $n \times k$ dan diberikan $\mathbf{Y}$ matriks berukuran $k \times m$. Maka hasil perkalian dari matriks $\mathbf{XY}$ adalah matriks berukuran $n \times m$ dengan elemen (i, j) yang diberikan sebagai berikut :

$$\sum_{s=1}^{k} x_{is}y_{sj} = x_{i1}y_{1j} + x_{i2}y_{2j} + \cdots + x_{ik}y_{kj}$$

Di atas merupakan hasil dari perkalian matriks (Myers & Milton, 1991).

2.2 Bentuk Kuadratik

Menurut Usman & Warsono (2009) misalkan $\mathbf{A}$ adalah matriks berukuran $k \times k$ dan

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

merupakan vektor kolom dari peubah real dengan ukuran dimensi matriksnya $k \times 1$. Maka bentuk $q = \mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}$, dinamakan bentuk kuadratik dalam $\mathbf{y}$ dan $\mathbf{A}$ adalah matriks bentuk kuadratik. Karena $\mathbf{y}$ merupakan vektor kolom dan $\mathbf{y}'$ merupakan vektor baris, hasil perkalian $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}$ menghasilkan matriks 1×1. Sehingga yang dihasilkan dalam bentuk skalar, maka dapat dinyatakan dalam jumlah kuadratik yaitu:

$$q = \sum_{i} \sum_{j} a_{ij} y_i y_j$$

Definisi 1

Bentuk kuadratik $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}$ dikatakan positif definit jika $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} > 0$ untuk semua $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, dikatakan positif semi definit jika $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} \geq 0$ untuk semua $\mathbf{y}$ dan $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} = 0$ untuk beberapa $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ (Myers & Milton, 1991).

Teorema 1

Sebuah matriks simetris $\mathbf{A}$ adalah positif definit jika dan hanya jika terdapat matriks nonsingular $\mathbf{P}$ sehingga $\mathbf{A} = \mathbf{P}'\mathbf{P}$.

Bukti :

Dibuktikan bagian "jika". Misalkan $\mathbf{A} = \mathbf{P}'\mathbf{P}$ dengan $\mathbf{P}$ merupakan matriks nonsingular. Untuk sebarang vektor $\mathbf{y}$, diperoleh $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{y}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{y} = (\mathbf{P}\mathbf{y})'(\mathbf{P}\mathbf{y})$. Bentuk $(\mathbf{P}\mathbf{y})'(\mathbf{P}\mathbf{y})$ merupakan jumlah kuadrat dari elemen-elemen vektor $\mathbf{P}\mathbf{y}$. Jumlah kuadrat selalu bernilai tidak negatif dan hanya sama dengan nol apabila seluruh komponennya bernilai nol, sehingga kondisi tersebut terjadi hanya jika $\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Karena $\mathbf{P}$ adalah matriks nonsingular, maka persamaan $\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ hanya memiliki solusi trivial, yaitu $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Dengan demikian, untuk setiap $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ diperoleh $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} > 0$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mathbf{A}$ adalah matriks positif definit (Rencher & Schaalje, 2008).

Menurut Usman & Warsono (2009) sifat turunan bentuk kuadratik sebagai berikut:

1). Misal $z = \mathbf{a}'\mathbf{y}$ dimana $\mathbf{a}$ vektor skalar, sehingga $\dfrac{dz}{dy} = \mathbf{a}$

2). Misal $z = \mathbf{y}'\mathbf{y}$, maka $\dfrac{dz}{dy} = 2\mathbf{y}$

3). Misal $z = \mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}$ dimana $\mathbf{A}$ merupakan matriks berukuran $n \times n$, maka $\dfrac{dz}{dy} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{A}'\mathbf{y}$

4). Misal $z = \mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}$ dimana $\mathbf{A}$ merupakan matriks berukuran $n \times n$ dan simetris, maka $\dfrac{dz}{dy} = 2\mathbf{A}\mathbf{y}$

2.3 Model Linear Umum

Model linear merupakan suatu model yang menjelaskan hubungan antara variabel respon dan satu atau lebih variabel penjelas. Menurut Usman & Warsono (2009) model linear umum dapat dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.1}$$

Jika model (2.1) dinyatakan dalam bentuk matriks menjadi:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

dengan:

$\mathbf{y}$: adalah vektor peubah acak $n \times 1$ yang teramati.

$\mathbf{X}$: adalah matriks $n \times p$ dengan unsur-unsurnya bilangan tertentu yang diketahui, di mana $p = k + 1$.

$\boldsymbol{\beta}$: adalah vektor parameter $k \times 1$ yang tidak diketahui.

$\boldsymbol{\varepsilon}$: adalah vektor peubah acak $n \times 1$ yang tidak teramati, dengan $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ dan $\mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \Sigma$.

Suatu model dikatakan berperingkat penuh (*full rank*) apabila matriks $\mathbf{X}$ memiliki rank yang sama dengan jumlah kolomnya. Sebaliknya, apabila rank matriks $\mathbf{X}$ lebih kecil daripada jumlah kolomnya, maka matriks tersebut dikatakan berperingkat tidak penuh atau *non-full rank model*, yang biasanya mengindikasikan adanya hubungan linear antar variabel bebas (Usman & Warsono, 2009).

Menurut Sitepu & Sinaga (2006), asumsi dasar pada model linear adalah:

1. Galat berdistribusi normal dengan nilai tengah nol.

2. Varians dari galat konstan (homoskedastisitas).

3. Galat dari pengamatan berbeda beda saling bebas atau sering disebut tidak ada autokorelasi.

4. Tidak ada hubungan linear antara variabel bebas atau sering disebut tidak ada multikolineritas.

Asumsi-asumsi ini penting untuk memastikan bahwa metode penaksiran dan pengujian yang digunakan menghasilkan estimasi yang tidak bias dan efesien.

2.4 *Weighted Least Squares*(WLS)

Dalam model linear umum dengan persamaan (2.1) dengan $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ dan $\text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\mathbf{V}$. *Weighted Least Squares* (WLS) merupakan bentuk kasus khusus dari *Generalized Least Squares* (GLS) ketika matriks varians-kovarians galat berbentuk diagonal, yaitu:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Dimana diasumsikan bahwa $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ tidak saling berkorelasi (independent), namun tidak memiliki varians yang sama (Myers & Milton, 1991). Dengan kata lain, terdapat kondisi heteroskedastisitas pada galat.

Untuk mengestimasi parameter $\boldsymbol{\beta}$, diasumsikan bahwa varians galat merupakan matriks positif definit berukuran $n \times n$ yang dinotasikan dengan $\mathbf{V}$. Asumsikan bahwa $\boldsymbol{\varepsilon}$ mengikuti distribusi normal multivariat. Sehingga fungsi kepadatan bersama untuk $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ adalah:

$$f(\boldsymbol{\varepsilon};\boldsymbol{\beta},\mathbf{V}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\mathbf{V}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\right) \tag{2.2}$$

Untuk memperoleh estimator maksimum likelihood bagi $\boldsymbol{\beta}$, diperlukan penentuan vektor $\boldsymbol{\beta}^*$ dengan memaksimumkan fungsi tersebut. Karena $\mathbf{V}$ merupakan positif definit maka $\mathbf{V}$ nonsingular sehingga memiliki invers $\mathbf{V}^{-1}$ yang juga positif definit. Dengan sifat ini, bentuk $\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$ selalu bernilai positif. Oleh karena itu, proses memaksimumkan fungsi likelihood ekuivalen dengan meminimumkan:

$$\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}^*)'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}^*) = SS_{Res,\mathbf{V}}$$

Turunan pertama dari fungsi tersebut terhadap $\boldsymbol{\beta}^*$ adalah:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial SS_{Res,\mathbf{V}}}{\partial \boldsymbol{\beta}^*} &= \frac{\partial(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*)'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \boldsymbol{\beta}^*} \\
&= \frac{\partial(\mathbf{y}'-\boldsymbol{\beta}^{*'}\mathbf{X}')\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \boldsymbol{\beta}^*} \\
&= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}^*}\left[\mathbf{y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}-\mathbf{y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*-\boldsymbol{\beta}^{*'}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}+\boldsymbol{\beta}^{*'}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*\right]
\end{aligned}$$

Karena $(\mathbf{y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*)' = \boldsymbol{\beta}^{*'}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial SS_{Res,V}}{\partial \boldsymbol{\beta}^*} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}^*}\left[\mathbf{y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}-2\boldsymbol{\beta}^{*'}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}+\boldsymbol{\beta}^{*'}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*\right] \\
&= -2\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}+2\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*
\end{aligned}$$

Dengan mensetting persamaan dengan nol maka diperoleh:

$$2\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^* = 2\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$$

Sehingga penduga $\mathbf{b}^*$ untuk persamaan ini adalah:

$$\mathbf{b}^* = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$$

Dengan menggunakan aturan ekspektasi dan varians sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{b}^*) &= E\left[(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}\right] \\
&= (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}E(\mathbf{y}) \\
&= (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}X\boldsymbol{\beta} \\
&= \boldsymbol{\beta}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(b^*) &= \mathrm{Var}\left((\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}\right) \\
&= (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathrm{Var}(\mathbf{y})\left[(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\right]' \\
&= (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\sigma^2\mathbf{V}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\right]' \\
&= (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\right]'\sigma^2 \\
&= (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1})'\sigma^2 \\
&= (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\sigma^2 \\
&= (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\sigma^2
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh nilai $E(b^*) = \boldsymbol{\beta}$ dan $\mathrm{Var}(b^*) = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\sigma^2$ (Myers & Milton, 1991).

Karena matriks $\mathbf{V}$ bersifat simetrik positif definit, maka $\mathbf{V}$ bersifat nonsingular sehingga memiliki invers. Oleh karena itu, terdapat suatu matriks $n \times n$ nonsingular $\mathbf{P}$ sedemikian rupa sehingga

$$\mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{V}^{-1} \text{ dan } \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{P}')^{-1} = \mathbf{V}$$

Dengan menggunakan matriks $\mathbf{P}$ tersebut, model dapat ditransformasikan sebagai berikut:

$$\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Atau

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{X}^*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^*$$

Di mana $\mathbf{y}^* = \mathbf{P}\mathbf{y}$, $\mathbf{X}^* = \mathbf{P}\mathbf{X}$, dan $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}$. Vektor $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ tetap berperan sebagai vektor galat acak dan $E(\boldsymbol{\varepsilon}^*) = 0$. Sehingga varians $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ menjadi berikut:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}^*) &= \mathrm{Var}(\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}) \\
&= \mathbf{P}\mathbf{V}\mathbf{P}' \\
&= \mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{P}')^{-1}\mathbf{P}' \\
&= \mathbf{I} \text{ (Myers \& Milton, 1991).}
\end{aligned}
$$

Dengan transformasi yang dilakukan, model baru memiliki galat dengan varians konstan atau bersifat homoskedastik. Berdasarkan teorema Gauss–Markov, pada model linear yang memenuhi asumsi galat dengan mean nol dan varians konstan, metode *Least Squares* memberikan penduga terbaik dalam kelas estimator linear tak bias (*Best Linear Unbiased Estimator* atau BLUE). Karena bentuk model hasil transformasi menyerupai model *Least Squares*, maka pendugaan parameter dapat diperoleh:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^{*'}\mathbf{X}^{*})^{-1}\mathbf{X}^{*'}\mathbf{y}^{*}$$

adalah penduga yang BLUE dari $\boldsymbol{\beta}$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= ((\mathbf{PX})'\mathbf{PX})^{-1}(\mathbf{PX})'\mathbf{Py} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{P}'\mathbf{PX})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{P}'\mathbf{Py} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y} \\ &= \mathbf{b}^{*}\end{aligned}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa WLS adalah estimator BLUE dengan nilai harapan galat tak bias dan varians (Myers & Milton, 1991).

Berdasarkan Usman & Warsono (2009), penduga tak bias dari σ^2 pada model dengan $\mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\mathbf{V}$ berdasarkan persamaan (2.3) yaitu:

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{(\mathbf{Py} - \mathbf{PX}\boldsymbol{\beta}^{*})'(\mathbf{Py} - \mathbf{PX}\boldsymbol{\beta}^{*})}{n-p} \\ &= \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^{*})'\mathbf{P}'\mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^{*})}{n-p} \\ &= \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^{*})'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^{*})}{n-p}\end{aligned}$$

Rumus ini menunjukkan bahwa s^2 diperoleh dari jumlah kuadrat galat berbobot yang telah dikoreksi derajat bebasnya, di mana n adalah banyaknya pengamatan dan $p = k + 1$ adalah jumlah parameter yang diestimasi termasuk intersep.

2.5 Interval Kepercayaan

Estimasi interval umumnya digunakan untuk membangun selang kepercayaan dalam mengestimasi nilai suatu parameter. Dalam model linear yang bersifat *full rank*, pembentukan selang kepercayaan untuk koefisien $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ didasarkan pada distribusi t-Student.

Definisi 1

Misalkan Z adalah peubah acak yang berdistribusi normal dan χ^2_γ adalah peubah acak chi-square yang saling bebas dengan derajat bebas γ. Peubah acaknya yaitu

$$\frac{Z}{\sqrt{\chi^2_\gamma/\gamma}}$$

dinyatakan mengikuti distribusi t dengan derajat bebas γ (Myers & Milton, 1991).

Definisi 2

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan sampel acak dari fungsi densitas $f(x;\theta)$. Misalkan

$$L = l(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

dan

$$U = u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

adalah dua statistik yang memenuhi $L \leq U$ serta

$$P_\theta[L < \theta < U] = 1 - \alpha$$

dengan α tidak bergantung pada θ, maka selang acak $[L, U]$ dinamakan $(1-\alpha)100\%$ selang kepercayaan untuk θ. Nilai $1-\alpha$ dinamakan koefisien kepercayaan, sedangkan L dan U masing-masing dinamakan batas bawah dan batas atas untuk θ (Usman & Warsono, 2009).

Dalam pendugaan selang untuk menentukan selang dugaan yang baik, terdapat dua hal yang dapat dipertimbangkan yaitu:

1. Peluangnya kecil bahwa selang akan memuat nilai yang salah atau selang memiliki peluang tercakup (*coverage probability*) yang besar.
2. Lebar selang yang paling pendek, sehingga estimasi parameter menjadi lebih tepat (Usman & Warsono, 2009).

2.6 Metode Fieller

Metode Fieller digunakan untuk membangun interval kepercayaan rasio antara dua parameter yang masing-masing berdistribusi normal. Untuk menghitung interval kepercayaan suatu rasio pada metode Fieller dilakukan dengan mentransormasikan rasio tersebut menjadi ungsi linear dari dua varibel. Pembilang dan penyebut dari rasio tersebut diasumsikan mengikuti distribusi normal bivariat (Dong, *et al.*, 2025). Metode Fieller ini pertama kali diperkenalkan oleh Fieller pada tahun 1932 dan kemudian dikembangkan lebih lanjut pada tahun 1954 sebagai suatu prosedur umum untuk membangun batas atau interval kepercayaan bagi dua parameter statistik (Hirschberg & Lye, 2007). Pada penelitian Zerbe (1978), metode Fieller diaplikasikan pada model linear umum pada persamaan (2.1) dengan asumsi $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2\mathbf{I})$ yang dinyatakan dalam formulasi matriks. Misalkan akan dibangun batas kepercayaan untuk rasio

$$\rho = \frac{\mathbf{K}'\hat{\boldsymbol{\beta}}}{\mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\beta}}} \tag{2.5}$$

di mana $\mathbf{K}$ dan $\mathbf{L}$ merupakan vektor konstanta $p \times 1$ yang diketahui (Zerbe, 1978). Catat bahwa statistik uji untuk rasio linear dari parameter model linear yang dinotasikan T yaitu

$$T = \frac{\mathbf{K}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \rho\mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\beta}}}{\hat{\sigma}\sqrt{\mathbf{K}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{K} - 2\rho\mathbf{K}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L} + \rho^2\mathbf{L}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L}}} \tag{2.6}$$

mengikuti distribusi t-Student dengan derajat bebas $n - p$. Interval kepercayaan $100(1 - \alpha)\%$ untuk ρ diperoleh dengan menggunakan pendekatan Fieller. Secara probabilistik, peluang bahwa T berada di antara $-t$ dan t sama dengan peluang terpenuhinya ketidaksamaan kuadrat dalam ρ:

$$1-\alpha = P[-t \leq T \leq t] = P(A\rho^2 + B\rho + C \leq 0) \tag{2.7}$$

dengan:

$$A = (\mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\beta}})^2 - t^2\mathbf{L}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L}\sigma^2 \tag{2.8}$$

$$B = 2\left[t^2\mathbf{K}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L}\sigma^2 - (\mathbf{K}'\hat{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\beta}})\right] \tag{2.9}$$

$$C = (\mathbf{K}'\hat{\boldsymbol{\beta}})^2 - t^2\mathbf{K}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{K}\sigma^2 \tag{2.10}$$

Misalkan $a, b,$ dan c menyatakan nilai pengamatan dari $A, B,$ dan C. Maka interval kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ untuk ρ diberikan oleh

$$\left[\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right] \tag{2.11}$$

Pembuktian bentuk A, B, dan C mengacu pada penelitian Daoud, *et al*. (2006), sebagai berikut:

$$P\left[\frac{(\mathbf{K}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \rho\mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\beta}})^2}{\sigma^2\left(\mathbf{K}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{K} - 2\rho\mathbf{K}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L} + \rho^2\mathbf{L}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L}\right)} \leq t^2\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\frac{(\mathbf{K}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \rho\mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\beta}})^2}{\sigma^2\mathbf{K}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{K} - 2\rho\sigma^2\mathbf{K}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L} + \rho^2\sigma^2\mathbf{L}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L}} \leq t^2\right] = 1-\alpha$$

$$P\Big[(\mathbf{K}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \rho\mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\beta}})^2 \leq t^2\big(\sigma^2\mathbf{K}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{K} - 2\rho\sigma^2\mathbf{K}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L} + \rho^2\sigma^2\mathbf{L}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L}\big)\Big] = 1-\alpha$$

$$P\Big[(\mathbf{K}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \rho\mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\beta}})^2 \leq t^2\mathbf{K}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{K} - 2\rho\sigma^2t^2\mathbf{K}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L} + \rho^2\sigma^2t^2\mathbf{L}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L}\Big] = 1-\alpha$$

$$P\Big[(\mathbf{K}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \rho\mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\beta}})^2 - \sigma^2t^2\mathbf{K}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{K} + 2\rho\sigma^2t^2\mathbf{K}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L} - \rho^2\sigma^2t^2\mathbf{L}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L} \leq 0\Big] = 1-\alpha$$

$$P\Big[(\mathbf{K}'\hat{\beta})^2 - 2\rho(\mathbf{K}'\hat{\beta})(\mathbf{L}'\hat{\beta}) + \rho^2(\mathbf{L}'\hat{\beta})^2 - \sigma^2 t^2\mathbf{K}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{K}$$
$$+2\rho\sigma^2 t^2\mathbf{K}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L} - \rho^2\sigma^2 t^2\mathbf{L}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L} \le 0\Big] = 1-\alpha$$

$$P\Big[\rho^2\big((\mathbf{L}'\hat{\beta})^2 - \sigma^2 t^2\mathbf{L}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L}\big) + \rho\big(2(\sigma^2 t^2\mathbf{K}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L} - (\mathbf{K}'\hat{\beta})(\mathbf{L}'\hat{\beta}))\big)$$
$$+\big((\mathbf{K}'\hat{\beta})^2 - \sigma^2 t^2\mathbf{K}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{K}\big) \le 0\Big] = 1-\alpha$$

atau

$$P(A\rho^2 + B\rho + C \le 0) = 1-\alpha$$

di mana:

$$\begin{aligned} A &= (\mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\beta}})^2 - t^2\mathbf{L}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L}\sigma^2 \\ B &= 2\left[t^2\mathbf{K}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L}\sigma^2 - (\mathbf{K}'\hat{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\beta}})\right] \\ C &= (\mathbf{K}'\hat{\boldsymbol{\beta}})^2 - t^2\mathbf{K}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{K}\sigma^2 \end{aligned}$$

dengan syarat $a > 0$ dan $b^2 - 4ac > 0$ sehingga ada dua solusi real dari persamaan kuadrat tersebut menjadi persamaan (2.11). Namun, jika $a < 0$ interval kepercayaan metode Fieller akan tak berhingga (*unbounded*). Jika $b^2 - 4ac > 0$, interval kepercayaan metode Fieller akan menjadi komponen dari interval terbatas, yaitu:

$$(-\infty, \rho_{\text{upper}}) \cup (\rho_{\text{lower}}, \infty)$$

Dan jika $b^2 - 4ac < 0$, maka interval kepercayaan metode Fieller mencakup seluruh garis bilangan real $(-\infty, \infty)$. Untuk kasus $a = 0$, interval kepercayaan metode Fieller menjadi $(-\infty, -c/b]$ jika $b > 0$ $(-c/b, \infty]$ jika $b < 0$ (Ratsimalahelo, 2025). Sehingga, metode ini dapat digunakan untuk mencari interval kepercayaannya dengan syarat bahwa $a > 0$ dan $b^2 - 4ac > 0$.

Metode Fieller digunakan untuk membuat interval kepercayaan pada rasio parameter dengan asumsi bahwa datanya mengikuti distribusi normal. Metode ini lebih unggul dibandingkan metode Delta karena mampu menangani kondisi di mana penyebut mendekati nol dan distribusi rasio tidak simetris. Selain itu, interval kepercayaan tidak harus simetris. Dengan demikian, interval kepercayaan yang dihasilkan lebih tepat dan akurat dalam berbagai kondisi (Ratsimalahelo, 2025).Selain itu, metode Fieller ini memiliki siat robust dan mampu memberikan informasi ketidakpastian estimasi secara lebih akurat, bahkan bentuk interval tak terbatas pada parameter rasio yang rentan terhadap masalah identifikasi dan ketidakberaturan distribusi (Marie, *et al*., 2024). Metode Fieller ini telah banyak dimanfaatkan dan digunakan seperti pada bidang kesehatan dalam penentuan obat efektif, ekonomi, dan banyak lainnya (Hirschberg & Lye, 2007).

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data yang dibangkitkan melalui simulasi pada *software* SAS, dengan jumlah pengamatan yang ditetapkan sebesar $n = 30$ dan $n = 50$. Model yang digunakan adalah model linear dengan tiga variabel independen, dengan asumsi galat berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan ragam $\sigma^2\mathbf{V}$, serta galat tidak berkorelasi. Matriks penjelas $\mathbf{X}$ dibangkitkan dari distribusi uniform pada interval 1 sampai 4. Setiap elemen diagonal matriks $\mathbf{V}$ ditentukan oleh $V_i = z(\gamma)\,(|X_{i1}| + |X_{i2}| + |X_{i3}|)^\gamma$ dengan $\gamma = 0, 1, 3, 5$. Selain itu, $z(\gamma)$ berfungsi sebagai faktor penskalaan yang memastikan bahwa rata-rata varians ε_i bernilai satu, sementara tingkat heteroskedastisitas tetap sama (Sterchi & Wolf, 2017).

3.3 Metode Penelitian

Metode yang digunakan untuk menentukan interval kepercayaan pada penelitian ini adalah metode Fieller. Pembangkitan data dalam simulasi dilakukan menggunakan model linear dengan menggunakan tiga variabel independen. Data dibangkitkan menggunakan software SAS yang telah diatur agar mengalami heteroskedastisitas, yang kemudian ditangani menggunakan Weighted Least Squares (WLS). Bias dari suatu penduga dalam simulasi dihitung menggunakan rumus:

$$\text{bias}(\hat{\theta}) = \left|\hat{\theta} - \theta\right|$$

di mana $\hat{\theta}$ merupakan parameter hasil estimasi dan θ merupakan parameter sebenarnya. Kebaikan model pada data simulasi diperoleh dari nilai peluang tercakup (coverage probability) atau sering disingkat CP dan panjang selang (average length) atau sering disingkat AL yang dirumuskan sebagai berikut :

$$CP = \frac{\sum_{i=1}^{m}[\rho \in I_i]}{m}$$

$$AL = \sum_{i=1}^{m} \frac{\text{panjang } I_i}{m}$$

di mana I_i adalah selang ke-i

i = $i = 1, 2, 3, \ldots, m.$

m = banyaknya ulangan.

Langkah-langkah dalam menentukan selang interval untuk setiap rasio pada data simulasi dengan ulangan sebanyak 10.000 adalah sebagai berikut:

1. Membangkitkan peubah acak $X_{ij} \sim U[1, 4]$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, 3$, dengan X_{ij} saling independen.
2. Menetapkan parameter sebenarnya $\beta_0 = 0{,}5$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1{,}5$, dan $\beta_3 = 2$.
3. Menetapkan fungsi varians pada galat $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2\mathbf{V})$, di mana setiap elemen diagonal matriks $\mathbf{V}$ ditentukan oleh $V_i = z(\gamma)\left(|X_{i1}| + |X_{i2}| + |X_{i3}|\right)^{\gamma}$, dengan $\gamma = 0, 1, 3, 5$. Penggunaan nilai γ yang berbeda menghasilkan tingkat heteroskedastisitas yang berbeda. Faktor $z(\gamma)$ merupakan faktor penskalaan yang ditentukan sedemikian rupa sehingga rata-rata varians galat bernilai satu, yaitu $z(\gamma) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(|X_{i1}|+|X_{i2}|+|X_{i3}|)^{\gamma}}$. Dengan demikian, perubahan nilai γ hanya mencerminkan perbedaan tingkat heteroskedastisitas, sehingga hasil antar nilai γ memiliki skala varians yang sama.

4. Menetapkan nilai varians galat sebenarnya sebesar $\sigma^2 = 1$.
5. Mengestimasi parameter $\hat{\beta}$ dan $\hat{\sigma}^2$ menggunakan metode WLS, kemudian membandingkannya dengan nilai sebenarnya untuk menghitung biasnya.
6. Menghitung nilai ρ berdasarkan vektor $\mathbf{K}'$ dan $\mathbf{L}'$ yang telah ditetapkan.

Tabel 1. Vektor Konstanta K' dan L'

$\mathbf{K}'$	$\mathbf{L}'$
$[0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]$	$[0\ \ 0\ \ 1\ \ 0]$
$[0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]$	$[0\ \ 0\ \ 1\ \ 0]$
$[0\ \ 1\ \ 3\ \ 0]$	$[0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]$
$[0\ \ 4\ \ -2\ \ 3]$	$[0\ \ 1\ \ 1\ \ 1]$

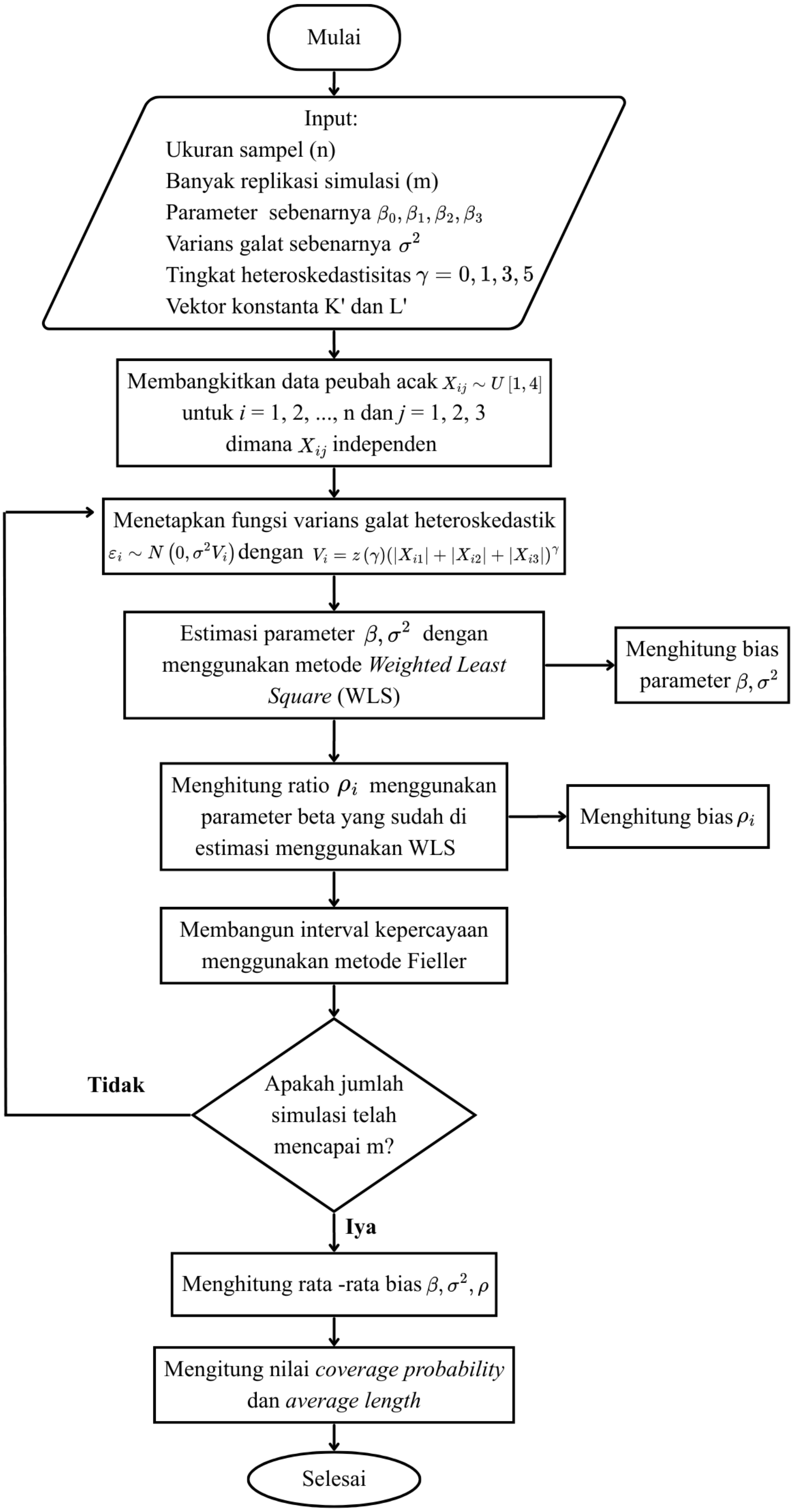
Sehingga untuk masing-masing $\rho = \dfrac{\mathbf{K}'\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}'\boldsymbol{\beta}}$ diperoleh

$$\rho_1 = \frac{\beta_1}{\beta_2}, \quad \rho_2 = \frac{\beta_3}{\beta_2}, \quad \rho_3 = \frac{2\beta_1 + 3\beta_2}{\beta_3}, \quad \rho_4 = \frac{-2\beta_1 + 4\beta_2 + 3\beta_3}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}.$$

7. Menghitung nilai $\hat{\rho}$ dari hasil estimasi β_{WLS}, kemudian menghitung bias dari setiap ρ_i yang telah ditetapkan.
8. Membangun interval kepercayaan menggunakan metode Fieller untuk setiap ρ_i.
9. Menghitung nilai CP dan AL pada setiap interval untuk melihat kebaikan metode Fieller pada masing-masing tingkat heteroskedastisitas.

3.4 Metode Penelitian

Flowchart penelitian disusun untuk menggambarkan secara ringkas dan sistematis tahapan simulasi dalam pembentukan selang kepercayaan rasio parameter menggunakan metode Fieller. *Flowchart* ini merupakan visualisasi dari langkah-langkah penelitian yang telah dijelaskan sebelumnya dan disajikan sebagai berikut:



Gambar 1. *Flowchart* Penelitian

BAB V

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil simulasi dan pembahasan yang telah dilakukan, diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Metode *Weighted least squares* (WLS) mampu menghasilkan penduga parameter yang tidak bias pada kondisi heteroskedastisitas. Hal ini ditunjukkan oleh nilai bias parameter dan rasio yang berada sangat dekat dengan nol pada seluruh tingkat heteroskedastisitas. Hal ini menunjukkan bahwa WLS efektif dalam mengatasi masalah ragam galat yang tidak konstan.

2. Pendugaan interval kepercayaan rasio parameter menggunakan metode Fieller pada model linear yang telah ditangani dengan WLS memberikan hasil yang baik dan stabil. Hal ini terlihat dari nilai *Coverage Probability* (CP) yang berada di sekitar 0,95 dengan fluktuasi yang relatif kecil pada seluruh tingkat heteroskedastisitas, sehingga mampu mempertahankan probabilitas cakupan sesuai tingkat kepercayaan yang ditetapkan. Selain itu, nilai *Average Length* (AL) cenderung semakin pendek seiring meningkatnya tingkat heteroskedastisitas akibat pengaruh faktor penskalaan dan mekanisme pembobotan pada metode WLS. Oleh karena itu, kombinasi metode WLS dan Fieller dapat digunakan secara efektif dalam pendugaan interval kepercayaan rasio parameter pada kondisi heteroskedastisitas.

DAFTAR PUSTAKA

Daoud J. I, Usman, M., Elfaki, A. M., Othman, R., & Sidiq, A. 2006. Transformation of A Contrained Model into Unconstrained Model in Two Way Treatment Structure with Interaction. *Quantitative Methods*. **2**(2): 29-36.

Dong, N., Maynard, R. A., Kelcey, B., Spybrook, J., Li, W., Bowden, A. B., & Pham, D. 2025. Advantages of Monte Carlo Confidence Intervals for Incremental Cost-Effectiveness Ratios: A Comparison of Five Methods. *Journal of Research on Educational Effectiveness*. **4**(18): 951-979.

Freedman, L. S. 2001. Confidence Intervals and Statistical Power of The 'Validation' Ratio for Surrogate or Intermediate Endpoints. *Journal of Statistical Planning and Inference*. **96**(2001): 143–153.

Hirschberg, J. G., & Lye, J. N. 2007. *Providing Intuition to the Fieller Method with Two Geometric Representations Using STATA and EVIEWS*. Working Paper, Department of Economics, University of Melbourne, Parkville, Victoria, Australia.

Marie, J., Dufour., Flachaire, E., Khalaf, L., & Zalghout, A. 2024. Identification-Robust Methods For Comparing Inequality With an Application to Regional Disparities. *The Journal of Economic Inequality*. 22: 433-452.

McGrath, O., & Burke, K. 2024. Binomial Confidence Intervals for Rare Events: Importance of Defining Margin of Error Relative to Magnitude of Proportion. *The American Statistician*. **4**(78): 437-449.

Myers, R. H., & Milton, J. S. 1991. *A First Course in The Theory of Linier Statistical Models*. PWS-KENT Publishing Company, Boston.

Nisa, H., Kusnandar, D., & Martha, S. 2020. Estimasi Parameter Metode Weighted Least Square dalam Mengatasi Masalah Heteroskedastisitas. *Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)*. **9**(1): 65-70.

Ratsimalahelo, Z. 2025. Re-Examining Confidence Intervals for Ratios of Parameters. *Econometrics*. **13**(3): 1-27.

Rencher A. C., & Schaalje G. B. 2008. *Linear Models in Statistics*. Second Edition. John Wiley and Sons, New Jersey.

Sitepu, R. K. & Sinaga, B.M. 2006. *Aplikasi Model Ekonometrika*. IPB, Bogor.

Sterchi, M., & Wolf, M. 2017. *Weighted least squares and adaptive least squares: Further empirical evidence.* Department of Economics, University of Zurich.

Usman, M. & Warsono. 2009. *Teori Model Linear dan Aplikasinya*. Sinar Baru Algensindo, Bandung.

Veljkovic, K. 2024. Comparing Confidence Intervals for the Mean of Symmetric and Skewed Distributions. *Symmetry*. **16**(1424): 1-22.

Wang, P., Xu, S., Wang, Y., Wu, B., Fung, W. K., Gao, G., Liang, Z., & Liu, N. 2020. Penalized Fieller's Confidence Interval for The Ratio Ofbivariate Normal Means. *Biometric*. **77**(4):1355-1368.

White, H. 1980. A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity. *Econometrica*. **48**(4): 817-838.

Zerbe, G. O. 1978. On Fieller's Theorem and General Linear Model. *The American Statistican*. **32**(3): 103-105.