

**BILANGAN KROMATIK LOKASI SISI GRAF ORIGAMI DAN
BARBELNYA**

Skripsi

Oleh

**GEBRINA LORITA PALENTINA G
2217031127**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

ABSTRACT

THE EDGE-LOCATING CHROMATIC NUMBER OF ORIGAMI GRAPHS AND ITS BARBELL

By

Gebrina Lorita Palentina G

The edge-locating chromatic number, denoted by $\chi'_L(G)$, is the minimum number of colors required in an edge-locating coloring of G such that each vertex has a distinct edge color codes. This research determined the edge-locating chromatic number of origami graphs and barbell origami graphs. For the origami graphs O_n , $n \geq 3$ obtained, $\chi'_L(O_n) = 6$ for $3 \leq n \leq 6$, and $\chi'_L(O_n) = 7$ for $n \geq 7$. In addition, for the barbell origami graphs $\chi'_L(B_{O_n}) = 7$ for $n \geq 3$.

Keywords: edge-locating chromatic number, origami graphs, barbell origami graphs.

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI SISI GRAF ORIGAMI DAN BARBELNYA

Oleh

Gebrina Lorita Palentina G

Bilangan kromatik lokasi sisi, dinotasikan dengan $\chi'_L(G)$ adalah banyaknya minimum warna yang diperlukan untuk pewarnaan lokasi sisi pada G sehingga setiap titik memiliki kode warna sisi berbeda. Penelitian ini menentukan bilangan kromatik lokasi sisi graf origami dan graf barbel origami. Untuk graf origami O_n , $n \geq 3$ diperoleh, $\chi'_L(O_n) = 6$ untuk $3 \leq n \leq 6$, dan $\chi'_L(O_n) = 7$ untuk $n \geq 7$. Selain itu, untuk graf barbel origami B_{O_n} , $\chi'_L(B_{O_n}) = 7$ untuk $n \geq 3$.

Kata kunci: bilangan kromatik lokasi sisi, graf origami, graf barbel origami.

**BILANGAN KROMATIK LOKASI SISI GRAF ORIGAMI DAN
BARBELNYA**

GEBRINA LORITA PALENTINA G

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

Judul Skripsi : **BILANGAN KROMATIK LOKASI SISI
GRAF ORIGAMI DAN BARBELNYA**

Nama Mahasiswa : **Gebrina Lorita Palentina G**

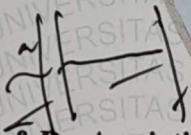
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031127**

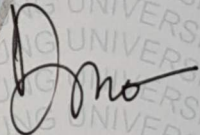
Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

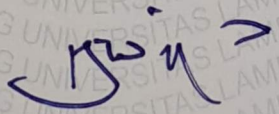


1. Komisi Pembimbing


Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP 197604112000122001


Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.
NIP 199311062019032018

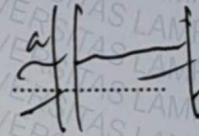
2. Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung


Mulyono, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP. 197406112000031002

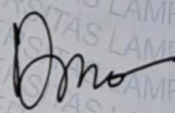
MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.



Sekretaris : Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.



**Penguji
Bukan Pembimbing : Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.**



2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 27 April 2026

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Gebrina Lorita Palentina G**
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031127**
Jurusan : **Matematika**
Judul Skripsi : **Bilangan Kromatik Lokasi Sisi Graf Origami dan Barbelnya**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 27 April 2026
Penulis,



Gebrina Lorita Palentina G

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Gebrina Lorita Palentina G yang lahir di Batu Penjemuran pada tanggal 23 Maret 2004. Penulis merupakan anak kedua dari dua bersaudara, putri dari pasangan Bahagia Alexander Ginting dan Rosnim br Purba.

Penulis memulai pendidikan formal di SD Swasta GKPS pada tahun 2010 dan menyelesaikannya pada tahun 2016. Penulis melanjutkan pendidikan di SMP RK Fransiskus Xaverius pada tahun 2016-2019, dan menyelesaikan pendidikan di SMA Negeri 1 Namorambe pada tahun 2019-2022. Pada tahun 2022, penulis diterima di program studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN).

Pada tahun 2023, penulis aktif dalam Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) dan diamanatkan sebagai anggota Bidang Kaderisasi dan Kepemimpinan. Penulis juga terlibat sebagai panitia dalam berbagai kegiatan yang diselenggarakan oleh HIMATIKA, antara lain panitia Dies Natalis Jurusan Matematika pada tahun 2023 dan 2024, panitia LKMM-TD Jurusan Matematika, panitia HIMATIKA Competition, serta dipercaya sebagai Sekretaris Pelaksana dalam kegiatan GEMATIKA. Selain aktif di HIMATIKA, penulis juga berpartisipasi dalam organisasi di luar HIMATIKA, yaitu sebagai panitia Dies Natalis UKM Katolik Universitas Lampung pada tahun 2024, panitia KMK Youth Day tahun 2024, serta panitia Musyawarah Wilayah II IKAHIMATIKA. Pada tahun 2025, penulis melaksanakan Kerja Praktik di PT Great Giant Pineapple pada Departemen Supply Chain selama 40 hari. Pada tahun yang sama, penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kelurahan Sawah Brebes.

KATA INSPIRASI

“Bersukacitalah dalam pengharapan, bersabarlah dalam kesesakan dan bertekunlah dalam doa.”

(Roma 12:12)

“Dengarlah nasehat dan terimalah didikan, supaya engkau menjadi bijak di masa depan.”

(Amsal 19:20)

“It always seems impossible until it's done.”

(Nelson Mandela)

PERSEMBAHAN

Syukur kepada Allah

Puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa karena limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya.

Dengan rasa syukur dan bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Bapak dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada kedua orang tuaku atas doa, dukungan, semangat, serta segala pengorbanan yang diberikan selama proses perkuliahan hingga penyusunan skripsi ini. Terimakasih karena senantiasa sabar dalam menguatkanmu untuk menjalani pendidikanku hingga selesai.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Puji dan Syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Bilangan Kromatik Lokasi Sisi Graf Origami dan Barbelnya" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. Asimati, S.Si., M.Si. selaku dosen Pembimbing 1 dan dosen Pembimbing Akademik yang telah banyak memberikan arahan, bimbingan, saran serta dukungan kepada penulis sepanjang proses penyusunan skripsi ini.
2. Ibu Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si. selaku dosen Pembimbing 2 yang telah memberikan arahan, bimbingan serta saran sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku dosen Penguji yang telah bersedia memberikan saran, kritik, serta evaluasi yang membangun sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak, ibu, abang, serta keluarga yang selalu memberikan dukungan, semangat, dan doa kepada penulis dalam menjalani perkuliahan hingga menyelesaikan skripsi ini.

7. Teman-teman yang tidak bisa saya sebutkan satu persatu, yang telah banyak membantu, menemani dan mendukung penulis selama menjalani perkuliahan.
8. Seluruh pihak terkait yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca.

Bandar Lampung, 27 April 2026

Gebrina Lorita Palentina G

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Tujuan Penelitian	2
1.3 Manfaat Penelitian	2
II TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Konsep Dasar Graf	4
2.2 Graf Origami dan Graf Barbel Origami	5
2.3 Bilangan Kromatik Lokasi Sisi	6
III METODE PENELITIAN	9
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	9
3.2 Langkah-langkah Penelitian	9
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	11
4.1 Bilangan Kromatik Lokasi Sisi Graf Origami	11
4.2 Bilangan Kromatik Lokasi Sisi Graf Barbel Origami	35
V KESIMPULAN DAN SARAN	73
5.1 Kesimpulan	73
5.2 Saran	73
DAFTAR PUSTAKA	74

DAFTAR GAMBAR

2.1 Representasi graf pada permasalahan jembatan Konigsberg (Sumber: knkland.com)	4
2.2 Contoh graf dengan 6 titik dan 10 sisi	5
2.3 Contoh graf siklus C_n dengan $3 \leq n \leq 6$	6
2.4 Graf origami O_5	6
2.5 Graf barbel origami B_{O_5}	6
2.6 Contoh pewarnaan lokasi sisi graf C_6	8
4.1 Graf origami O_3	11
4.2 Contoh pewarnaan lokasi sisi minimum graf origami O_3	12
4.3 Graf origami O_4	12
4.4 Contoh pewarnaan lokasi sisi minimum graf origami O_4	13
4.5 Graf origami O_5	14
4.6 Contoh pewarnaan lokasi sisi minimum graf origami O_5	14
4.7 Graf origami O_6	15
4.8 Contoh pewarnaan lokasi sisi minimum graf origami O_6	16
4.9 Graf origami O_7	18
4.10 Contoh pewarnaan lokasi sisi minimum graf origami O_7	18
4.11 Graf origami O_8	21
4.12 Contoh pewarnaan lokasi sisi minimum graf origami O_8	21
4.13 Graf origami O_9	24
4.14 Contoh pewarnaan lokasi sisi minimum graf origami O_9	24
4.15 Graf origami O_{10}	27
4.16 Contoh pewarnaan lokasi sisi minimum graf origami O_{10}	27
4.17 Graf barbel origami B_{O_3}	35
4.18 Contoh pewarnaan sisi minimum graf barbel origami B_{O_3}	36
4.19 Graf barbel origami B_{O_4}	37
4.20 Contoh pewarnaan sisi minimum graf barbel origami B_{O_4}	37
4.21 Graf barbel origami B_{O_5}	38

4.22	Contoh pewarnaan sisi minimum graf barbel origami B_{O_5}	39
4.23	Graf barbel origami B_{O_6}	42
4.24	Contoh pewarnaan sisi minimum graf barbel origami B_{O_6}	43
4.25	Graf barbel origami B_{O_7}	46
4.26	Contoh pewarnaan sisi minimum graf barbel origami B_{O_7}	47
4.27	Graf barbel origami B_{O_8}	51
4.28	Contoh pewarnaan sisi minimum graf barbel origami B_{O_8}	51
4.29	Graf barbel origami B_{O_9}	55
4.30	Contoh pewarnaan sisi minimum graf barbel origami B_{O_9}	56
4.31	Graf barbel origami $B_{O_{10}}$	60
4.32	Contoh pewarnaan sisi minimum graf barbel origami $B_{O_{10}}$	60

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan salah satu cabang dalam ilmu matematika yang berfokus pada penelitian tentang bagaimana objek-objek saling berhubungan melalui titik (*vertex*) dan garis penghubung yang disebut sisi (*edge*). Konsep dasar teori ini pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler, seorang matematikawan asal Swiss, pada tahun 1736 melalui permasalahan tujuh jembatan yang menghubungkan empat daratan di kota Königsberg. Dalam permasalahan tersebut, Euler mencoba menjawab apakah seseorang dapat melintasi ketujuh jembatan masing-masing tepat satu kali dan kembali ke titik awal. Euler membuktikan bahwa hal tersebut tidak mungkin dilakukan. Temuan ini kemudian menjadi titik awal terbentuknya teori graf, yang kini berkembang luas dan memiliki banyak penerapan dalam berbagai bidang seperti jaringan komputer, transportasi, dan analisis data.

Salah satu topik yang banyak dikembangkan dalam teori graf adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf merupakan suatu metode untuk memberikan warna pada elemen-elemen graf, seperti titik, sisi, atau peta, dengan syarat dua elemen yang bertetangga tidak boleh memiliki warna yang sama. Banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk pewarnaan titik suatu graf disebut bilangan kromatik lokasi yang dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Konsep bilangan kromatik lokasi diperkenalkan oleh Chartrand dkk. (2002). Konsep ini merupakan penggabungan teori antara dimensi partisi dan pewarnaan titik dari suatu graf (Kabang dkk., 2020).

Chartrand dkk. (2002) membuktikan bilangan kromatik lokasi untuk beberapa kelas graf, di antaranya untuk graf terhubung G dengan orde $n \geq 3$ diperoleh $3 \leq \chi_L(G) \leq n$, pada graf siklus diperoleh $\chi_L(C_n) = 3$ jika n ganjil dan $\chi_L(C_n) = 4$ jika n genap. Selanjutnya, Chartrand dkk. (2003) menunjukkan bahwa graf pohon dengan $n \geq 5$, bilangan kromatik lokasinya dapat bernilai $k \in \{3, 4, \dots, n - 2, n\}$, tetapi tidak pernah bernilai $n - 1$. Penelitian mengenai

bilangan kromatik lokasi juga dilakukan oleh Prawinasti dkk. (2021) pada graf split siklus. Asmiati dkk. (2024) kemudian menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi pada graf *shadow* siklus.

Irawan dkk. (2021) memperoleh bahwa bilangan kromatik lokasi graf origami O_n bernilai $\chi_L(O_n) = 4$ untuk $n = 3$ dan $\chi_L(O_n) = 5$ untuk $n \geq 4$, di mana hal tersebut juga berlaku pada subdivisi sisi luarnya O_n^* . Irawan dkk. (2021) juga melakukan penelitian mengenai bilangan kromatik lokasi untuk subdivisi dari operasi barbel tertentu pada graf origami. Penelitian tersebut kemudian dikembangkan oleh Asmiati dkk. (2023) yang menunjukkan bahwa untuk graf origami hasil operasi tertentu HO_m , diperoleh $\chi_L(HO_m) = 5$ untuk $m = 3$ dan $\chi_L(HO_m) = 6$ untuk m lainnya.

Pada tahun 2024, Korivand dkk. melakukan penelitian mengenai bilangan kromatik lokasi yang berfokus pada pewarnaan sisi, yang dinamakan dengan bilangan kromatik lokasi sisi. Bilangan kromatik lokasi sisi adalah banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk pewarnaan lokasi sisi pada suatu graf. Pada penelitian tersebut, Korivand dkk. (2024) menemukan bahwa untuk graf siklus C_n dengan $n \geq 3$, diperoleh $\chi'_L(C_n) = 3$ untuk $n = 3$ dan $\chi'_L(C_n) = 4$ untuk $n \geq 4$. Sementara itu, untuk graf lengkap K_n diperoleh hasil $\chi'_L(K_n) = n + 1$ apabila n genap dan $n \geq 4$, serta $\chi'_L(K_n) = n$ apabila n ganjil dan $n \geq 3$ (Korivand dkk., 2024).

Berdasarkan penelusuran literatur, belum ada penelitian yang membahas bilangan kromatik lokasi sisi graf origami. Penelitian ini difokuskan untuk mengkaji bilangan kromatik lokasi sisi pada graf origami dan graf barbel origami.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan bilangan kromatik lokasi sisi graf origami dan graf barbel origami.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang ingin diperoleh dari penelitian ini yaitu:

1. memperluas pemahaman tentang bilangan kromatik lokasi sisi khususnya pada graf origami dan graf barbel origami;

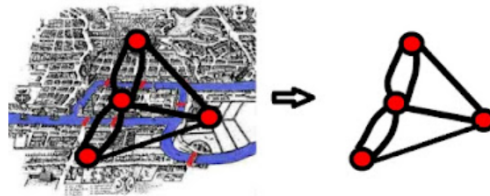
2. sebagai referensi pendukung untuk penelitian selanjutnya yang berkaitan dengan bilangan kromatik lokasi sisi pada suatu graf.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

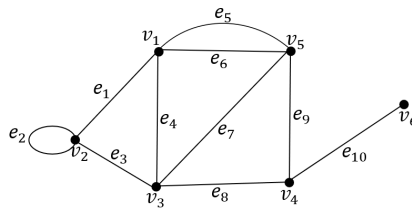
2.1 Konsep Dasar Graf

Pada tahun 1736, Leonhard Euler memperkenalkan teori graf untuk pertama kalinya dalam menyelesaikan permasalahan tujuh jembatan yang menghubungkan empat daratan yang dibelah oleh sungai Pregel di kota Königsberg. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, Euler memodelkannya ke dalam bentuk graf, dengan daratan yang dihubungkan oleh jembatan dinyatakan sebagai titik dan jembatan sebagai sisi. Euler menyimpulkan bahwa tidak ada kemungkinan untuk melalui ketujuh jembatan tersebut masing-masing tepat satu kali dan kembali ke titik awal, kecuali jika setiap titik berderajat genap (Daniel & Taneo, 2019).



Gambar 2.1 Representasi graf pada permasalahan jembatan Königsberg
(Sumber: knkland.com)

Konsep dasar yang digunakan pada penelitian ini diperoleh dari Deo (1989). Suatu graf G didefinisikan sebagai himpunan terurut $(V(G), E(G))$, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ menyatakan himpunan titik yang tidak kosong dari G dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ menyatakan himpunan sisi, yaitu pasangan tak terurut dari $V(G)$. Banyaknya titik pada himpunan $V(G)$ dinamakan orde pada graf G . Jika dua titik v_1 dan v_2 dihubungkan oleh sisi e , maka v_1 dan v_2 dikatakan bertetangga (*adjacent*), titik v_1 dan v_2 juga dikatakan menempel (*incident*) dengan sisi e , demikian pula sisi e dikatakan menempel (*incident*) dengan titik v_1 dan v_2 . $N(v)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan v .



Gambar 2.2 Contoh graf dengan 6 titik dan 10 sisi

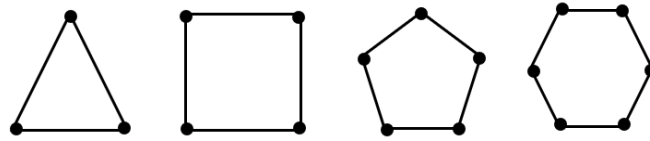
Gambar 2.2 merupakan graf $G(V, E)$, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$. Titik v_3 bertetangga dengan v_1, v_2, v_4 , dan v_5 , sedangkan titik v_2 dan v_3 menempel pada sisi e_3 . Sebaliknya, sisi e_3 menempel pada titik v_2 dan v_3 . Himpunan tetangga dari v_4 adalah $N(v_4) = \{v_3, v_5, v_6\}$. Banyaknya sisi yang menempel pada titik v disebut derajat (*degree*) yang dinotasikan dengan $d(v)$. Daun (*pendant*) adalah titik yang berderajat satu. Derajat masing-masing titik pada Gambar 2.2 adalah $d(v_1) = 4, d(v_2) = 4, d(v_3) = 4, d(v_4) = 3, d(v_5) = 4$, titik v_6 adalah daun, karena $d(v_6) = 1$.

Graf G dikatakan terhubung (*connected graph*) apabila untuk setiap pasangan titik u dan v di $V(G)$ terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. *Loop* adalah sisi yang hanya menempel pada satu titik sebagai titik awal dan akhir. Dua atau lebih sisi yang terhubung dengan dua titik ujung yang sama disebut sisi ganda (*parallel edges*). Graf yang tidak memuat *loop* dan sisi ganda disebut graf sederhana. Pada Gambar 2.2, sisi e_2 merupakan *loop*, sedangkan e_5 dan e_6 adalah sisi ganda.

Jalan (*walk*) adalah barisan terurut yang terdiri dari titik dan sisi secara bergantian, di mana setiap sisi terhubung dengan titik sebelumnya dan sesudahnya. Contoh jalan berdasarkan Gambar 2.2 adalah $v_1 - e_1 - v_2 - e_2 - v_2 - e_3 - v_3 - e_7 - v_5 - e_9 - v_4 - e_{10} - v_6$. Lintasan (*path*) adalah jalan yang melewati titik yang berbeda-beda dengan setiap titik dilewati tepat satu kali. Contoh lintasan berdasarkan Gambar 2.2 adalah $v_6 - e_{10} - v_4 - e_8 - v_3 - e_7 - v_5 - e_6 - v_1 - e_1 - v_2$. Lintasan dengan titik awal dan titik akhir yang sama dinamakan lintasan tertutup (sirkuit). Contoh sirkuit pada Gambar 2.2 adalah $v_1 - e_4 - v_3 - e_7 - v_5 - e_5 - v_1$.

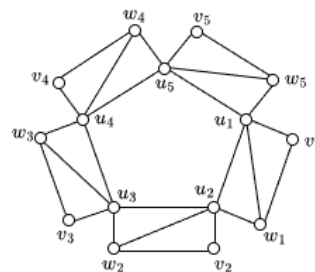
2.2 Graf Origami dan Graf Barbel Origami

Graf siklus merupakan suatu lintasan tertutup, yaitu lintasan yang dimulai dan diakhiri pada titik yang sama, yang dinotasikan dengan C_n , dengan n menyatakan orde dari graf tersebut.



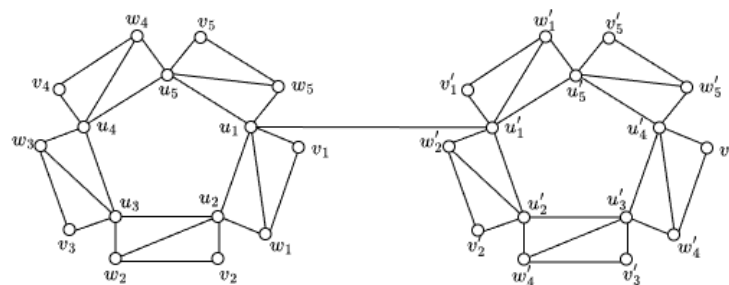
Gambar 2.3 Contoh graf siklus C_n dengan $3 \leq n \leq 6$

Graf origami O_n , dengan $n \geq 3$, merupakan graf dengan pusat berupa graf siklus dan lipatan-lipatan origami yang terbentuk dari gabungan dua graf siklus C_3 . Himpunan titik dari O_n adalah $V(O_n) = \{u_i, v_i, w_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisinya $E(O_n) = \{u_i w_i, u_i v_i, v_i w_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i u_{i+1}, w_i w_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_1 u_n, w_1 w_n\}$ (Fakhira dkk., 2025).



Gambar 2.4 Graf origami O_5

Graf barbel origami yang dinotasikan sebagai B_{O_n} untuk $n \geq 3$ merupakan graf yang dibentuk oleh dua graf origami, yaitu O_n dan O'_n , yang dihubungkan oleh sebuah jembatan. Himpunan titik dari O'_n adalah $V(O'_n) = \{u'_i, v'_i, w'_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ dan sisi jembatannya adalah $u_1 u'_1$ (Fakhira dkk., 2025).



Gambar 2.5 Graf barbel origami B_{O_5}

2.3 Bilangan Kromatik Lokasi Sisi

Berikut diberikan definisi pewarnaan lokasi sisi untuk graf terhubung sederhana G . Misalkan $c : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ adalah pewarnaan sisi pada G , dengan sisi-sisi yang

bertetangga memiliki warna yang berbeda. Bilangan kromatik sisi yang dinotasikan $\chi'(G)$ adalah banyaknya warna minimum yang dibutuhkan untuk melakukan pewarnaan pada sisi-sisi di G sehingga tidak ada dua sisi yang bertetangga memiliki warna yang sama. Berdasarkan definisi ini, diperoleh bahwa jika ρ menyatakan derajat maksimum titik pada G , maka $\chi'(G) \geq \rho$ (Beineke & Wilson, 1973).

Misalkan $\pi : (C_1, C_2, \dots, C_n)$ menyatakan partisi terurut dari $E(G)$, yaitu kelas-kelas warna yang dihasilkan oleh c . Untuk suatu titik v di G , kode warna sisi $c_\pi(v)$ adalah n -tuple $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_n))$, dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, e) \mid e \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq n$, dan $d(v, e) = \min\{d(v, x), d(v, y) \mid e = xy\}$. Pewarnaan c merupakan pewarnaan lokasi sisi jika titik-titik pada G memiliki kode warna sisi yang berbeda. Bilangan kromatik lokasi sisi yang dinotasikan dengan $\chi'_L(G)$ adalah banyaknya minimum warna yang diperlukan untuk pewarnaan lokasi sisi pada G (Korivand dkk., 2024).

Berikut ini diberikan Teorema dasar mengenai bilangan kromatik lokasi sisi.

Teorema 2.3.1 Misalkan G graf terhubung dengan derajat maksimum $\Delta(G)$, maka $\chi'_L(G) \geq \Delta(G)$.

Bukti. Misalkan $v \in V(G)$ dengan $d(v) = \Delta(G)$, maka semua sisi yang bertetangga dengan v diberi warna yang berbeda. Jadi, $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Hal ini mengakibatkan $\chi'_L(G) \geq \Delta(G)$. ■

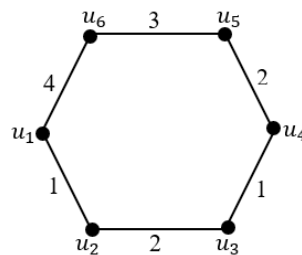
Teorema 2.3.2 (Korivand dkk., 2024) Untuk bilangan bulat $n \geq 3$, diperoleh

$$\chi'_L(C_n) = \begin{cases} 3, & \text{jika } n = 3; \\ 4, & \text{jika } n \geq 4. \end{cases}$$

Bukti. Untuk $n = 3$, diperoleh bahwa $\chi'_L(C_n) = 3$. Selanjutnya untuk $n \geq 4$, akan dilakukan pembuktian menggunakan kontradiksi. Misalkan $\chi'_L(C_n) = 3$. Tanpa mengurangi perumuman, diasumsikan bahwa warna 3 adalah warna yang paling sedikit digunakan pada graf siklus C_n . Misalkan $e = v_1v_2$ menyatakan sisi yang diberi warna 3. Karena $n \geq 4$, untuk n ganjil, titik-titik v_3, v_n memiliki kode warna sisi yang sama, dan untuk n genap, v_1, v_2 memiliki kode warna sisi yang sama. Akibatnya, terdapat setidaknya dua sisi yang diberi warna 3. Asumsikan e dan f merupakan dua sisi yang diberi warna 3 dengan jarak minimum, sedemikian sehingga $d(e, f) = \min\{d(e_1, e_2) \mid e_1, e_2 \in C_3\}$. Jika jarak e dan f sekurang-kurangnya dua, maka terdapat lintasan $a - v - u - b$ dengan $e = uv$ sehingga kode warna sisi titik a dan b adalah sama, yaitu $c_\pi(a) = c_\pi(b)$. Hal ini bertentangan dengan definisi pewarnaan lokasi sisi. Selanjutnya, misalkan $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ merupakan *matching*

alternatif maksimum dari sisi-sisi yang diberi warna 3, yaitu suatu himpunan sisi berwarna 3 yang tersusun berurutan sedemikian sehingga setiap dua sisi berurutan memenuhi $d(e_i, e_{i+1}) = 1$, untuk $1 \leq i \leq m$. Karena warna 3 adalah warna yang paling sedikit digunakan di C_n , maka titik a dan b dengan sifat $d(a, e_1) = d(b, e_m) = 1$ dan bukan titik ujung dari e_i , untuk setiap $1 \leq i \leq m$, memiliki kode warna sama yaitu $(0, 0, 1)$ yang menyebabkan kontradiksi terhadap syarat pewarnaan lokasi sisi. Akibatnya, diperoleh pewarnaan lokasi sisi pada graf siklus C_n adalah 4 dengan dua sisi yang bertetangga diberi warna 3 dan 4, sedangkan sisi lainnya diberi warna 1 dan 2. ■

Berikut ini diberikan contoh graf siklus C_6 . Akan ditentukan bilangan kromatik lokasi sisi untuk graf tersebut.



Gambar 2.6 Contoh pewarnaan lokasi sisi graf C_6

Diberikan graf siklus C_6 seperti pada Gambar 2.6, akan ditentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi sisi graf siklus C_6 . Karena graf siklus C_6 memiliki 6 sisi, maka berdasarkan Teorema 2.3.2, diperoleh $\chi'_L(C_6) \geq 4$.

Misalkan c adalah pewarnaan sisi pada graf siklus C_6 menggunakan empat warna. Sehingga diperoleh kelas-kelas warna $C_1 = \{u_1u_2, u_3u_4\}$, $C_2 = \{u_2u_3, u_4u_5\}$, $C_3 = \{u_5u_6\}$ dan $C_4 = \{u_1u_6\}$. Diperoleh kode warna sebagai berikut:

$$\begin{aligned} c_\pi(u_1) &= (0, 1, 1, 0); & c_\pi(u_4) &= (0, 0, 1, 2); \\ c_\pi(u_2) &= (0, 0, 2, 1); & c_\pi(u_5) &= (1, 0, 0, 1); \\ c_\pi(u_3) &= (0, 0, 2, 2); & c_\pi(u_6) &= (1, 2, 0, 0). \end{aligned}$$

Setiap titik pada graf siklus C_6 memiliki kode warna yang berbeda, maka c merupakan pewarnaan lokasi sisi. Jadi, $\chi'_L(C_6) \leq 4$. Oleh karena itu, diperoleh $\chi'_L(C_6) = 4$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester genap tahun ajaran 2025/2026 di Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Langkah-langkah Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan dalam menentukan bilangan kromatik lokasi sisi graf origami dan graf barbel origami adalah sebagai berikut.

1. Langkah-langkah menentukan bilangan kromatik lokasi sisi graf origami sebagai berikut.
 - a. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi sisi graf origami O_n untuk $n \geq 3$. Dengan menggunakan Teorema 2.3.1, maka $\chi'_L(O_n) \geq \Delta(O_n)$. Apabila batas bawah tersebut tidak memenuhi syarat pewarnaan lokasi sisi, maka dilakukan penyesuaian melalui penambahan warna hingga seluruh syarat pewarnaan lokasi sisi terpenuhi.
 - b. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi sisi graf origami O_n untuk $n \geq 3$ dengan cara membangun pola pewarnaan berdasarkan karakteristik struktur graf. Pewarnaan sisi dimulai dari penggunaan label terkecil sehingga diperoleh minimum warna yang memenuhi syarat pewarnaan lokasi sisi.
 - c. Jika batas atas bilangan kromatik lokasi sisi $\chi'_L(O_n) \leq x$ dan batas bawah bilangan kromatik lokasi sisi $\chi'_L(O_n) \geq x$, maka diperoleh bilangan kromatik lokasi sisi $\chi'_L(O_n) = x$.

- d. Merumuskan hasil yang telah diperoleh ke dalam bentuk pernyataan matematika.
 - e. Melakukan pembuktian terhadap hasil yang diperoleh sebelumnya.
2. Langkah-langkah menentukan bilangan kromatik lokasi sisi graf barbel origami sebagai berikut.
- a. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi sisi graf barbel origami B_{O_n} untuk $n \geq 3$. Dengan menggunakan Teorema 2.3.1, maka $\chi'_L(B_{O_n}) \geq \Delta(B_{O_n})$. Apabila batas bawah tersebut tidak memenuhi syarat pewarnaan lokasi sisi, maka dilakukan penyesuaian melalui penambahan warna hingga seluruh syarat pewarnaan lokasi sisi terpenuhi.
 - b. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi sisi graf barbel origami B_{O_n} untuk $n \geq 3$ dengan cara membangun pola pewarnaan berdasarkan karakteristik struktur graf. Pewarnaan sisi dimulai dari penggunaan label terkecil sehingga diperoleh minimum warna yang memenuhi syarat pewarnaan lokasi sisi.
 - c. Jika batas atas bilangan kromatik lokasi sisi $\chi'_L(B_{O_n}) \leq x$ dan batas bawah bilangan kromatik lokasi sisi $\chi'_L(B_{O_n}) \geq x$, maka diperoleh bilangan kromatik lokasi sisi $\chi'_L(B_{O_n}) = x$.
 - d. Merumuskan hasil yang telah diperoleh ke dalam bentuk pernyataan matematika.
 - e. Melakukan pembuktian hasil yang diperoleh sebelumnya.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan sebelumnya, diperoleh bahwa bilangan kromatik lokasi sisi graf origami O_n adalah 6 untuk $3 \leq n \leq 6$, dan 7 untuk $n \geq 7$. Pada graf barbel origami B_{O_n} , $\chi'_L(B_{O_n}) = 7$ untuk $n \geq 3$.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan mengkaji bilangan kromatik lokasi sisi graf origami untuk operasi graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Asmiati, Irawan, A., Nuryaman, A., & Muludi, K. (2023). The Locating Chromatic Number for Certain Operation of Origami Graphs. *Mathematics and Statistics*, 11(1), 101-106.
- Asmiati, Okzarima, W., Notiragayu, & Zakaria, L. (2024). Upper Bounds of the Locating Chromatic Numbers of Shadow Cycle Graphs. *Internation Journal of Mathematics and Computer Science*, 19(1), 239-248.
- Beineke, L. W., & Wilson, R. J. (1973). On the Edge-Chromatic Number of a Graph. *Discrete Mathematics*, 5(1), 15-20.
- Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M. A., Slater, P. J., & Zhang, P. (2002). The Locating-Chromatic Number of a Graph. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and Its Applications*, 36, 89-101.
- Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M. A., Slater, P. J., & Zhang, P. (2003). Graphs of Order n with Locating-Chromatic Number $n - 1$. *Discrete Mathematics*, 269, 65-79.
- Daniel, F., & Taneo, P. N. L. (2019). *Teori Graf*. Deepublish, Yogyakarta.
- Deo, N. (1989). *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall of India Private Limited, New Delhi.
- Fakhira, L. A., Hadi, N. W., Asmiati., & Nurvazly, D. E. (2025). The Partition Dimension of Origami Graphs and Its Barbel. *Indonesian Journal of Combinatorics*, 9(2), 90-101.
- Irawan, A., Asmiati., Zakaria, L., & Muludi K. (2021). The Locating Chromatic number of Origami Graphs. *Algorithms*, 14(6), 167.
- Irawan, A., Asmiati., Zakaria, L., Muludi K., & Utami, B. (2021). Subdivision of Certain Barbell Operation of Origami Graphs has Locating-Chromatic Number Five. *International Journal of Computer Science and Network Security*, 21(9), 79-85.

- Kabang, N. K., Yundari., & Fran, F. (2020). Bilangan Kromatik Lokasi pada Graf Bayangan dan Graf Middle dari Graf Bintang. *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)*, 09(2), 329-336.
- Korivand, M., Mojdeh, D. A., Baskoro, E. T., & Erfanian, A. (2024). Edge-Locating Coloring of Graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, 12(1), 55-73.
- Prawinasti, K., Ansori, M., Asmiati, Notiragayu, Rofi, G. N. AR. (2021). The Locating Chromatic Number for Split Graph of Cycle. *Journal of Physics: Conference Series*, 1751(1), 1-5.