

***MODEL REDUCTION METHOD (MRM) PADA ANALISIS GABUNGAN  
DUA RANDOMIZED COMPLETE BLOCK DESIGN (RCBD)***

**Skripsi**

**Oleh**

**MUHAMMAD TRI HARSONO**

**NPM. 2217031160**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMPUNG  
BANDAR LAMPUNG**

**2026**

## ABSTRACT

### *MODEL REDUCTION METHOD (MRM) PADA ANALISIS GABUNGAN DUA RANDOMIZED COMPLETE BLOCK DESIGN (RCBD)*

By

**MUHAMMAD TRI HARSONO**

Randomized Complete Block Design (RCBD) is an experimental design frequently used to control variation caused by nuisance factors. This design groups experimental units into relatively homogeneous blocks. However, the mathematical model of RCBD contains linear constraints on the treatment and block effect parameters, which causes its design matrix to be nonfull rank. The structural problem becomes more complex when combining two RCBD models in a single analytical framework to expand information. This research applies the Model Reduction Method (MRM) to the combination of two RCBD models, focusing on the formation of a full rank model, parameter estimation using the Least Squares method, and the evaluation of estimator properties based on the Best Linear Unbiased Estimator (BLUE) criteria. This research also includes a simulation using SAS 9.4 software to empirically assess the performance of parameter estimation and hypothesis testing. The results prove that MRM is effectively used to transform a nonfull rank model into a full rank model, which is represented in the form  $\mathbf{Y} = \mathbf{\Gamma}_r \mathbf{\Theta}_r + \mathbf{\Psi}$ . Parameter estimation on the full rank model produces estimators that are unbiased and have minimum variance, in accordance with the BLUE criteria. The hypothesis testing results indicate that the obtained model has a good power of test under low error variance conditions, and continues to show consistent performance, reaching a value of one across all error variance conditions as the spread of the parameter  $\mathbf{\Theta}_r$  becomes larger.

**Keywords:** RCBD, Model Reduction Method, Full Rank, Least Squares, BLUE.

## ABSTRAK

### **MODEL REDUCTION METHOD (MRM) PADA ANALISIS GABUNGAN DUA RANDOMIZED COMPLETE BLOCK DESIGN (RCBD)**

Oleh

**MUHAMMAD TRI HARSONO**

*Randomized Complete Block Design (RCBD)* merupakan desain percobaan yang sering digunakan untuk mengendalikan keragaman akibat faktor pengganggu. Desain ini mengelompokkan unit percobaan ke dalam blok yang relatif homogen. Namun, model matematis RCBD mengandung kendala linear pada parameter efek perlakuan dan blok, yang menyebabkan matriks desainnya bersifat *nonfull* rank. Permasalahan struktural menjadi lebih kompleks ketika mengombinasikan dua model RCBD dalam satu kerangka analisis guna memperluas informasi. Penelitian ini menerapkan *Model Reduction Method (MRM)* pada kombinasi dua model RCBD yang berfokus pada pembentukan model *full* rank, pendugaan parameter menggunakan metode *Least Squares*, serta evaluasi sifat penduga berdasarkan kriteria *Best Linear Unbiased Estimator (BLUE)*. Penelitian ini juga menyertakan simulasi menggunakan *software SAS 9.4* untuk menilai kinerja pendugaan parameter dan pengujian hipotesis secara empiris. Hasil penelitian membuktikan bahwa MRM efektif digunakan untuk mentransformasi model *nonfull* rank menjadi model *full* rank, yang direpresentasikan dalam bentuk  $\mathbf{Y} = \mathbf{\Gamma}_r \mathbf{\Theta}_r + \mathbf{\Psi}$ . Pendugaan parameter pada model *full* rank menghasilkan penduga yang bersifat takbias dan memiliki ragam minimum, sesuai dengan kriteria BLUE. Hasil pengujian hipotesis menunjukkan bahwa model yang diperoleh memiliki kuasa uji yang baik pada kondisi ragam galat rendah, serta tetap menunjukkan performa yang konsisten mencapai nilai satu pada seluruh kondisi ragam galat seiring dengan sebaran parameter  $\mathbf{\Theta}_r$  yang semakin besar.

**Kata kunci:** RCBD, *Model Reduction Method*, *Full Rank*, *Least Squares*, BLUE.

**MODEL REDUCTION METHOD (MRM) PADA ANALISIS GABUNGAN  
DUA RANDOMIZED COMPLETE BLOCK DESIGN (RCBD)**

**Oleh**

**MUHAMMAD TRI HARSONO**

**Skripsi**

**Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar  
SARJANA MATEMATIKA**

**Pada**

**Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMPUNG  
BANDAR LAMPUNG**

**2026**

Judul Skripsi : **MODEL REDUCTION METHOD (MRM)  
PADA ANALISIS GABUNGAN DUA  
RANDOMIZED COMPLETE BLOCK  
DESIGN (RCBD)**

Nama Mahasiswa : **Muhammad Tri Harsono**

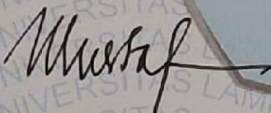
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031160**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

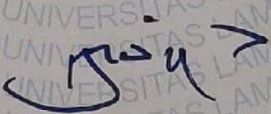


1. Komisi Pembimbing

  
**Prof. Dr. Mustofa, M.A., Ph.D.**  
NIP. 195701011984031020

  
**Riza Sawitri, S.Pd., M.Sc.**  
NIP. 198905042024062001

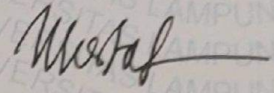
2. Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama,  
FMIPA Universitas Lampung

  
**Mulyono, Ph.D.**  
NIP. 197406112000031002

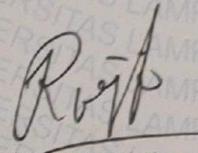
**MENGESAHKAN**

**1. Tim Penguji**

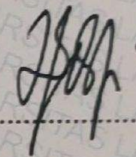
**Ketua : Prof. Dr. Mustofa, M.A., Ph.D.**



**Sekretaris : Riza Sawitri, S.Pd., M.Sc.**



**Penguji  
Bukan Pembimbing : Widiarti, S.Si., M.Si.**



**2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



**Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.**

**NIP. 197110012005011002**

**Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 7 Mei 2026**

## PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Muhammad Tri Harsono**  
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031160**  
Jurusan : **Matematika**  
Judul Skripsi : **MODEL REDUCTION METHOD (MRM)  
PADA ANALISIS GABUNGAN DUA  
RANDOMIZED COMPLETE BLOCK  
DESIGN (RCBD)**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 29 April 2026

Penulis,



**Muhammad Tri Harsono**

NPM. 2217031160

## **RIWAYAT HIDUP**

Penulis bernama lengkap Muhammad Tri Harsono, merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara, yang lahir di Kecamatan Kotaagung, Kabupaten Tanggamus, Provinsi Lampung pada tanggal 21 Mei 2004 dari pasangan Bapak Yatman dan Ibu Sakdiah.

Penulis memulai pendidikan formal di TK Darma Wanita pada tahun 2009–2010. Selanjutnya, penulis menempuh pendidikan dasar di SD Negeri 4 Kuripan pada tahun 2010–2016, kemudian melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMP Negeri 1 Kotaagung pada tahun 2016–2019. Pendidikan menengah atas ditempuh di SMA Negeri 1 Kotaagung, Kabupaten Tanggamus, Provinsi Lampung pada tahun 2019–2022.

Pada tahun 2022, penulis diterima sebagai mahasiswa Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung, melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Selama menjalani masa perkuliahan, penulis aktif dalam kegiatan kemahasiswaan, khususnya di Unit Kegiatan Mahasiswa Sains dan Teknologi Universitas Lampung periode 2022–2025 sebagai anggota dan menjabat sebagai pimpinan Departemen Hubungan Masyarakat. Selain itu, penulis juga berpartisipasi aktif dalam berbagai kegiatan kepanitiaan di lingkungan internal kampus.

Pada bulan Januari hingga Februari 2025, penulis melaksanakan kegiatan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Desa Bumi Kencana, Kecamatan Seputih Agung, Kabupaten Lampung Tengah. Selanjutnya, pada bulan Juni hingga Agustus 2025, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Bank Rakyat Indonesia (BRI) Cabang Tanjung Karang, Provinsi Lampung, pada Divisi BRIGUNA.

## **KATA INSPIRASI**

*“Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya.”.*

**(Q.S. Al-Baqarah: 286)**

*“Perjuangan itu tidak ada di jalan, tetapi perjuangan itu adalah jalannya.”*

**(Marc and Angel Chernoff)**

*“Jika kamu tidak bisa melakukan hal yang besar, lakukanlah dari hal yang kecil namun dengan cara yang hebat.”*

**(Napoleon Hill)**

## **PERSEMBAHAN**

Dengan mengucapkan Alhamdulillah sebagai ungkapan rasa syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat, nikmat, dan hidayah-Nya, sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat waktu.

Karya ini penulis persembahkan kepada:

### **Ayah dan Ibuku Tercinta**

Terima kasih atas segala doa, kasih sayang, pengorbanan, serta dukungan yang tiada henti. Terima kasih atas setiap nasihat dan pelajaran hidup yang telah diberikan, sehingga penulis dapat memahami arti perjuangan dan terus berusaha menjadi pribadi yang bermanfaat bagi orang lain.

### **Dosen Pembimbing dan Penguji**

Terima kasih atas bimbingan, arahan, ilmu, serta motivasi yang telah diberikan kepada penulis selama proses penyusunan skripsi ini.

### **Sahabat dan Rekan-rekan**

Terima kasih atas kebersamaan, dukungan, semangat, serta doa yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

### **Almamater Tercinta**

Universitas Lampung

## SANWACANA

Alhamdulillah rabbil 'alamin, puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat, karunia, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "*Model Reduction Method (MRM) Pada Analisis Gabungan Dua Randomized Complete Block Design (RCBD)*" dengan baik dan tepat waktu. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurah kepada Nabi Muhammad SAW.

Penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, bimbingan, dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Mustofa, M.A., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing I yang telah meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran dalam memberikan bimbingan, arahan, motivasi, serta saran kepada penulis selama penyusunan skripsi ini.
2. Ibu Riza Sawitri, S.Pd., M.Sc. selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, serta dukungan kepada penulis hingga skripsi ini dapat diselesaikan.
3. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik, saran, dan evaluasi yang membangun demi penyempurnaan skripsi ini.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Ibu Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan arahan dan dukungan selama masa perkuliahan.
6. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung atas ilmu dan bantuan yang telah diberikan.
7. Ayah dan Kakak tercinta yang senantiasa memberikan doa, dukungan, dan motivasi kepada penulis.

8. Sahabat penulis, yaitu Fadia, Meli, Niluh, serta teman-teman Wed yang selalu memberikan semangat, kebersamaan, dan bantuan selama proses penyusunan skripsi.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah memberikan bantuan dan kontribusi dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih memiliki keterbatasan dan kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun demi perbaikan di masa yang akan datang. Penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak yang membacanya.

Bandar Lampung, 29 April 2026  
Penulis,

**Muhammad Tri Harsono**  
NPM. 2217031160

## DAFTAR ISI

<b>DAFTAR TABEL</b> . . . . .	<b>xiv</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> . . . . .	<b>xv</b>
<b>I PENDAHULUAN</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Tujuan Penelitian . . . . .	3
1.3 Manfaat Penelitian . . . . .	3
<b>II TINJAUAN PUSTAKA</b> . . . . .	<b>4</b>
2.1 Matriks . . . . .	4
2.2 Model Linear Umum . . . . .	10
2.3 <i>Randomized Complete Block Design</i> (RCBD) . . . . .	11
2.4 <i>Model Reduction Method</i> (MRM) . . . . .	12
2.5 Pendugaan Parameter . . . . .	14
2.6 Pengujian Hipotesis . . . . .	18
<b>III METODE PENELITIAN</b> . . . . .	<b>20</b>
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian . . . . .	20
3.2 Data Simulasi . . . . .	20
3.3 Metode Penelitian . . . . .	20
<b>IV HASIL DAN PEMBAHASAN</b> . . . . .	<b>26</b>
4.1 Model Gabungan Dua RCBD . . . . .	26
4.2 Transformasi Model Menggunakan MRM . . . . .	28
4.3 Pendugaan Parameter . . . . .	32
4.4 Uji Hipotesis . . . . .	37
4.5 Simulasi . . . . .	37
4.5.1 Hasil Simulasi Pendugaan Parameter . . . . .	38
4.5.2 Hasil Simulasi Kuasa Uji . . . . .	42
<b>V KESIMPULAN</b> . . . . .	<b>45</b>
5.1 Kesimpulan . . . . .	45
5.2 Saran . . . . .	45
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>LAMPIRAN</b> . . . . .	<b>47</b>

## DAFTAR TABEL

2.1	Kesalahan Pengujian Hipotesis . . . . .	19
4.1	Hasil Simulasi Pendugaan Parameter $\Theta_r$ . . . . .	38
4.1	(lanjutan) . . . . .	39
4.2	Nilai Kuasa Uji . . . . .	42
4.2	(lanjutan) . . . . .	43

## DAFTAR GAMBAR

3.1	<i>Flowchart</i> Tahapan Penelitian. . . . .	21
3.2	<i>Flowchart</i> Simulasi Pendugaan Parameter. . . . .	23
3.3	<i>Flowchart</i> Simulasi Pengujian Hipotesis. . . . .	25
4.1	Pola Penyebaran Penduga Parameter ( $\beta$ ). . . . .	40
4.2	Pola Penyebaran Penduga Parameter ( $\tau$ ). . . . .	41
4.3	Pola Penyebaran Penduga Parameter ( $\mu$ ). . . . .	41
4.4	Grafik Nilai Kuasa Uji. . . . .	44

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Model linear merupakan kerangka dasar yang banyak digunakan dalam analisis statistika, terutama pada data dari berbagai pengaturan eksperimental dan observasional yang bertujuan mempelajari pengaruh perlakuan terhadap suatu variabel respon (Hocking, 1985). Model linear umum dinyatakan dalam bentuk  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ , dengan interpretasi dan sifat statistika yang bergantung pada asumsi distribusi galat  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , struktur kovarians matriks  $\boldsymbol{\Sigma}$ , serta rank struktur matriks desain  $\mathbf{X}$  (Usman dan Warsono, 2001). Berbagai desain percobaan dapat dipandang sebagai kasus khusus dari model linear umum yang memiliki struktur matriks desain dan kendala parameter tertentu.

*Randomized Complete Block Design* (RCBD) merupakan salah satu desain percobaan yang sering digunakan untuk mengendalikan keragaman akibat faktor blok. Desain RCBD mengelompokkan unit percobaan ke dalam blok yang relatif homogen sehingga variasi yang tidak diinginkan dapat diminimalkan (Myers dan Milton, 1991). Menurut Usman, dkk. (2011) penggunaan RCBD meningkatkan ketelitian analisis terhadap pengaruh perlakuan dan banyak diterapkan pada penelitian di bidang pertanian, biologi, dan ilmu terapan. Namun, model matematis RCBD mengandung kendala linear pada parameter efek perlakuan ( $\sum_{j=1}^t \tau_j = 0$ ) dan efek blok ( $\sum_{i=1}^b \beta_i = 0$ ), yang menyebabkan matriks desain model RCBD bersifat *nonfull* rank atau jumlah parameter melebihi rank matriks desain.

Permasalahan struktural menjadi lebih kompleks ketika mengombinasikan dua model RCBD dalam satu kerangka analisis. Kombinasi dua RCBD bertujuan memperluas informasi dan meningkatkan efisiensi analisis. Namun, struktur model gabungan menghasilkan lebih banyak parameter yang saling bergantung secara linear, sehingga tetap menyebabkan matriks desain bersifat *nonfull* rank. Model

linear *nonfull* rank menimbulkan solusi pendugaan parameter yang tidak unik Usman, dkk. (2011). Nilai harapan dan ragam penduga sulit ditentukan secara eksplisit karena parameter tidak teridentifikasi secara penuh.

Penanganan model linear yang mengandung kendala linear telah dibahas dalam berbagai penelitian metodologis. Hocking (1985) memperkenalkan *Model Reduction Method* (MRM) sebagai pendekatan untuk mereduksi model *nonfull* rank berkendala menjadi model *full* rank tanpa kendala melalui transformasi matriks. Penelitian oleh Daoud, dkk. (2006) membuktikan bahwa MRM mampu mentransformasi model linear berkendala menjadi model tereduksi yang bersifat *full* rank tanpa menghilangkan informasi penting yang terkandung dalam model awal. Usman, dkk. (2013) dan Usman, dkk. (2016) menerapkan MRM pada desain percobaan yang lebih kompleks dan memperoleh model *full* rank yang memungkinkan pendugaan parameter dan pengujian hipotesis dilakukan secara optimal. Usman, dkk. (2011) menunjukkan bahwa kombinasi beberapa RCBD menghasilkan model *nonfull* rank akibat kendala linear pada parameter efek perlakuan dan blok. Kajian yang secara khusus membahas penerapan MRM pada kombinasi dua model RCBD beserta evaluasi sifat penduga dan kinerja pengujian hipotesis melalui simulasi masih terbatas.

Penelitian ini membahas penerapan *Model Reduction Method* (MRM) pada kombinasi dua model *Randomized Complete Block Design* (RCBD) yang menitikberatkan pada pembentukan model *full* rank, pendugaan parameter menggunakan metode *Least Squares*, serta evaluasi sifat penduga berdasarkan kriteria *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE). Penelitian ini juga menyertakan simulasi menggunakan bantuan *software* SAS 9.4 untuk menilai kinerja pendugaan parameter dan pengujian hipotesis secara empiris.

## 1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menerapkan *Model Reduction Method* (MRM) pada kombinasi dua model *Randomized Complete Block Design* (RCBD).
2. Melakukan pendugaan parameter dan pengujian hipotesis pada kombinasi dua model *Randomized Complete Block Design* (RCBD) yang bersifat *full rank*.
3. Mendesain simulasi menggunakan *software SAS 9.4*.

## 1.3 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Menjadi sumber acuan dalam penerapan *Model Reduction Method* (MRM) pada kombinasi dua model *Randomized Complete Block Design* (RCBD).
2. Menjelaskan proses pendugaan parameter dan pengujian hipotesis pada kombinasi dua model *Randomized Complete Block Design* (RCBD) yang bersifat *full rank*.
3. Menjadi panduan praktis dalam mendesain simulasi menggunakan *software SAS 9.4*.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Matriks

**Definisi 2.1.1 Matriks** (Usman dan Warsono, 2001)

Matriks  $\mathbf{X}$  berukuran  $n \times k$  merupakan susunan elemen berbentuk persegi panjang yang terdiri atas  $n$  baris dan  $k$  kolom. Suatu vektor  $\mathbf{Y}$  berukuran  $n \times 1$  merupakan matriks yang memiliki  $n$  baris dan satu kolom.

##### Contoh 2.1.1

Misalkan diberikan matriks:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Matriks  $\mathbf{X}$  merupakan matriks persegi  $3 \times 3$  dan  $\mathbf{Y}$  merupakan vektor  $3 \times 1$ .

**Definisi 2.1.2 Transpos Matriks** (Myers dan Milton, 1991)

Misalkan  $\mathbf{X}$  merupakan matriks berukuran  $n \times k$ . Transpos dari matriks  $\mathbf{X}$  dilambangkan dengan  $\mathbf{X}'$ , merupakan matriks berukuran  $k \times n$  yang diperoleh dengan menukar baris dan kolom dari  $\mathbf{X}$ .

Sifat-sifat Transpos Matriks (Myers dan Milton, 1991):

1.  $(c\mathbf{X})' = c\mathbf{X}'$ , dengan  $\mathbf{X}$  matriks berukuran  $n \times k$  dan  $c$  bilangan real.
2.  $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})' = \mathbf{X}' + \mathbf{Y}'$ , dengan  $\mathbf{X}$  dan  $\mathbf{Y}$  matriks berukuran  $n \times k$ .
3.  $(\mathbf{X}')' = \mathbf{X}$ , dengan  $\mathbf{X}$  matriks berukuran  $n \times k$ .
4.  $(\mathbf{XY})' = \mathbf{Y}'\mathbf{X}'$ , dengan  $\mathbf{X}$  matriks berukuran  $n \times k$  dan  $\mathbf{Y}$  matriks berukuran  $k \times m$ .

**Contoh 2.1.2**

Misalkan diberikan matriks:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks  $\mathbf{X}$  berukuran  $3 \times 2$ , sehingga transpos matriks  $\mathbf{X}$  berukuran  $2 \times 3$  dan dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Definisi 2.1.3 Matriks Identitas, Matriks Satuan, dan Matriks Nol** (Usman dan Warsono, 2001)

Matriks identitas adalah matriks persegi berukuran  $n \times n$  yang memiliki elemen bernilai satu pada diagonal utama dan elemen bernilai nol pada posisi selain diagonal utama. Matriks identitas dilambangkan dengan  $\mathbf{I}_n$ . Matriks satuan adalah matriks yang seluruh elemennya bernilai satu. Matriks satuan berukuran  $n \times n$  dilambangkan dengan  $\mathbf{J}_n$ , sedangkan matriks satuan berukuran  $n \times 1$  dilambangkan dengan  $\mathbf{1}_n$ . Matriks nol adalah matriks yang seluruh elemennya bernilai nol. Matriks nol berukuran  $m \times n$  dilambangkan dengan  $\mathbf{0}_{m \times n}$ .

**Contoh 2.1.3**

Misalkan diberikan matriks:

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{0}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks  $\mathbf{I}_3$  merupakan matriks identitas berukuran  $3 \times 3$ , matriks  $\mathbf{J}_3$  merupakan matriks satuan berukuran  $3 \times 3$ , dan matriks  $\mathbf{0}_{3 \times 2}$  merupakan matriks nol berukuran  $3 \times 2$ .

**Definisi 2.1.4 Matriks Diagonal** (Usman dan Warsono, 2001)

Misalkan  $\mathbf{X}$  merupakan matriks berukuran  $n \times n$  dengan elemen diagonal  $x_{ii}$  dan elemen di luar diagonal  $x_{ij}$ . Matriks  $\mathbf{X}$  disebut sebagai matriks diagonal apabila  $x_{ij} = 0$  untuk setiap  $i \neq j$ . Matriks diagonal umumnya dilambangkan dengan  $\mathbf{D}$ .

**Contoh 2.1.4**

Misalkan diberikan matriks:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriks  $\mathbf{X}$  merupakan matriks diagonal berukuran  $3 \times 3$ .

**Definisi 2.1.5 Invers Matriks** (Myers dan Milton, 1991)

Misalkan  $\mathbf{X}$  merupakan matriks persegi berukuran  $n \times n$ . Invers dari matriks  $\mathbf{X}$  dilambangkan dengan  $\mathbf{X}^{-1}$ , merupakan matriks berukuran  $n \times n$  yang memenuhi

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{I}$$

Apabila invers dari matriks  $\mathbf{X}$  ada, maka matriks  $\mathbf{X}$  disebut *invertible* atau *nonsingular*. Sebaliknya, apabila invers dari matriks  $\mathbf{X}$  tidak ada, maka matriks  $\mathbf{X}$  disebut *noninvertible* atau *singular*.

**Contoh 2.1.5**

Misalkan diberikan matriks:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Melalui perkalian matriks secara langsung, diperoleh invers dari matriks  $\mathbf{X}$  adalah:

$$\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

yang menunjukkan bahwa matriks  $\mathbf{X}$  merupakan matriks *nonsingular*.

**Definisi 2.1.6 Linear Dependen** (Myers dan Milton, 1991)

Misalkan  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$  merupakan himpunan yang terdiri atas  $k$  vektor kolom. Jika terdapat bilangan real  $a_1, a_2, \dots, a_k$  yang tidak semuanya nol sehingga:

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \dots + a_k\mathbf{x}_k = 0$$

ada, maka vektor-vektor  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$  dikatakan saling bergantung linear (*linearly dependent*). Jika tidak, vektor-vektor tersebut dikatakan saling bebas linear (*linearly independent*).

**Contoh 2.1.6**

Misalkan diberikan vektor-vektor:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Misalkan  $a_1$ ,  $a_2$ , dan  $a_3$  merupakan bilangan real sedemikian sehingga:

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + a_3\mathbf{x}_3 = 0$$

Substitusi vektor menghasilkan:

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ekuivalen sebagai:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan terpenuhi apabila  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ , sehingga vektor  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$ , dan  $\mathbf{x}_3$  *linearly independent*.

**Definisi 2.1.7 Rank Matriks** (Myers dan Milton, 1991)

Misalkan  $\mathbf{X}$  merupakan matriks berukuran  $n \times k$ . Rank dari matriks  $\mathbf{X}$  dilambangkan dengan  $\text{rank}(\mathbf{X})$  atau  $r(\mathbf{X})$ , merupakan jumlah maksimum baris atau kolom matriks  $\mathbf{X}$  yang saling bebas secara linear.

Sifat-sifat Rank Matriks (Myers dan Milton, 1991):

1. Misalkan  $\mathbf{X}$  adalah matriks berukuran  $n \times k$  dengan  $n \geq k$ . Jika  $\mathbf{X}$  merupakan matriks *full rank*, maka berlaku  $r(\mathbf{X}) = r(\mathbf{X}') = r(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = k$ .
2. Misalkan  $\mathbf{X}$  adalah matriks persegi berukuran  $k \times k$ . Matriks  $\mathbf{X}$  bersifat *nonsingular* jika dan hanya jika  $r(\mathbf{X}) = k$ .
3. Misalkan  $\mathbf{X}$  adalah matriks berukuran  $n \times k$ ,  $\mathbf{P}$  adalah matriks *nonsingular* berukuran  $n \times n$ , dan  $\mathbf{Q}$  adalah matriks *nonsingular* berukuran  $k \times k$ , maka berlaku  $r(\mathbf{X}) = r(\mathbf{P}\mathbf{X}) = r(\mathbf{X}\mathbf{Q})$ .

4. Rank suatu matriks diagonal sama dengan jumlah elemen diagonal yang tidak bernilai nol.
5. Rank  $\mathbf{XY}$  kurang dari atau sama dengan rank  $\mathbf{X}$  dan kurang dari atau sama dengan rank  $\mathbf{Y}$ .

**Contoh 2.1.7**

Misalkan diberikan matriks:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks  $\mathbf{X}$  berukuran  $4 \times 3$ , sehingga rank maksimum matriks tersebut adalah 3. Namun, pengamatan terhadap kolom-kolom matriks menunjukkan bahwa  $\mathbf{x}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_2$ . Terlihat bahwa kolom  $\mathbf{x}_1$  dan  $\mathbf{x}_2$  saling bebas secara linear, sehingga rank matriks  $\mathbf{X}$  adalah 2 atau dapat ditulis  $r(\mathbf{X}) = 2$ .

**Teorema 2.1.1** (Usman dan Warsono, 2001)

Peringkat (rank) hasil perkalian dua matriks  $\mathbf{X}$  dan  $\mathbf{Y}$  memenuhi ketaksamaan:

$$\text{rank}(\mathbf{XY}) \leq \min[\text{rank}(\mathbf{X}), \text{rank}(\mathbf{Y})]$$

**Bukti:**

Setiap baris matriks  $\mathbf{XY}$  merupakan kombinasi linear dari baris-baris matriks  $\mathbf{Y}$ . Akibatnya, jumlah baris yang saling bebas secara linear pada  $\mathbf{XY}$  tidak melebihi jumlah baris bebas linear pada  $\mathbf{Y}$ , sehingga berlaku  $\text{rank}(\mathbf{XY}) \leq \text{rank}(\mathbf{Y})$ . Setiap kolom matriks  $\mathbf{XY}$  merupakan kombinasi linear dari kolom-kolom matriks  $\mathbf{X}$ . Akibatnya, jumlah kolom yang saling bebas secara linear pada  $\mathbf{XY}$  tidak melebihi jumlah kolom bebas linear pada  $\mathbf{X}$ , sehingga berlaku  $\text{rank}(\mathbf{XY}) \leq \text{rank}(\mathbf{X})$ . Berdasarkan kedua ketaksamaan, diperoleh  $\text{rank}(\mathbf{XY}) \leq \min[\text{rank}(\mathbf{X}), \text{rank}(\mathbf{Y})]$ .

**Teorema 2.1.2** (Usman dan Warsono, 2001)

Misalkan  $\mathbf{X}$  merupakan matriks berukuran  $n \times k$ ,  $\mathbf{P}$  merupakan matriks *nonsingular* berukuran  $n \times n$ , dan  $\mathbf{Q}$  merupakan matriks *nonsingular* berukuran  $k \times k$ . Maka berlaku:

$$r(\mathbf{X}) = r(\mathbf{PX}) = r(\mathbf{XQ})$$

**Bukti:**

$\mathbf{P}$  adalah matriks *nonsingular*, sehingga berlaku  $\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{I}$ . Berdasarkan sifat rank matriks dan ketaksamaan rank hasil perkalian matriks, diperoleh:

$$r(\mathbf{X}) = r(\mathbf{IX}) = r(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{PX}) \leq r(\mathbf{PX}) \leq r(\mathbf{X})$$

$$r(\mathbf{X}) \leq r(\mathbf{PX}) \leq r(\mathbf{X}) \rightarrow r(\mathbf{X}) = r(\mathbf{PX})$$

$\mathbf{Q}$  adalah matriks *nonsingular*, sehingga berlaku  $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ . Berdasarkan sifat rank matriks dan ketaksamaan rank hasil perkalian matriks, diperoleh:

$$r(\mathbf{X}) = r(\mathbf{XI}) = r(\mathbf{XQ}\mathbf{Q}^{-1}) \leq r(\mathbf{XQ}) \leq r(\mathbf{X})$$

$$r(\mathbf{X}) \leq r(\mathbf{XQ}) \leq r(\mathbf{X}) \rightarrow r(\mathbf{X}) = r(\mathbf{XQ})$$

Berdasarkan uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa  $r(\mathbf{X}) = r(\mathbf{PX}) = r(\mathbf{XQ})$ .

**Definisi 2.1.8 Generalized Invers** (Usman dan Warsono, 2001)

Misalkan  $\mathbf{X}$  merupakan matriks berukuran  $n \times k$ . Suatu matriks  $\mathbf{X}^-$  dikatakan sebagai *Generalized Invers* dari  $\mathbf{X}$  apabila  $\mathbf{X}^-$  ada dan memenuhi empat syarat berikut:

1.  $\mathbf{XX}^-$  simetrik
2.  $\mathbf{X}^-\mathbf{X}$  simetrik
3.  $\mathbf{XX}^-\mathbf{X} = \mathbf{X}$
4.  $\mathbf{X}^-\mathbf{XX}^- = \mathbf{X}^-$

Jika matriks  $\mathbf{X}$  bersifat *nonsingular*, maka  $\mathbf{X}^{-1}$  memenuhi keempat syarat di atas.

**Contoh 2.1.8**

Misalkan diberikan matriks:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks  $\mathbf{X}$  bersifat *singular* sehingga invers biasa  $\mathbf{X}^{-1}$  tidak ada. Salah satu *generalized inverse* dari  $\mathbf{X}$  dipilih sebagai:

$$\mathbf{X}^- = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Verifikasi keempat syarat *generalized inverse*:

1.  $\mathbf{XX}^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$ , simetrik.

$$2. \mathbf{X}^{-}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \text{ simetrik.}$$

$$3. \mathbf{X}\mathbf{X}^{-}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{X}.$$

$$4. \mathbf{X}^{-}\mathbf{X}\mathbf{X}^{-} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} = \mathbf{X}^{-}.$$

karena keempat syarat terpenuhi, sehingga matriks  $\mathbf{X}^{-}$  merupakan *generalized inverse* dari matriks  $\mathbf{X}$ .

## 2.2 Model Linear Umum

**Definisi 2.2.1** (Usman dan Warsono, 2001)

Misal  $\mathbf{Y}$  adalah vektor peubah acak  $n \times 1$  yang teramati, misal  $\mathbf{X}$  adalah matriks  $n \times p$  dengan  $n > p$  dan unsur-unsurnya adalah bilangan tertentu yang diketahui, misal  $\beta$  adalah vektor parameter  $p \times 1$  yang tidak diketahui nilainya, misal  $\varepsilon$  adalah vektor peubah acak  $n \times 1$  yang tidak teramati, dengan  $E(\varepsilon) = 0$  dan  $cov(\varepsilon) = \Sigma$ . Misalkan hal ini dihubungkan menjadi:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon \quad (2.1)$$

Model (2.1) didefinisikan sebagai model linear umum dan dapat dituliskan sebagai berikut, dengan  $p = k + 1$ :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}_{n \times p} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}_{p \times 1} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Menurut Usman dan Warsono (2001), Model (2.1) memiliki banyak pengertian khusus tergantung pada distribusi galat  $\varepsilon$ , struktur kovarians matriks  $\Sigma$ , serta rank struktur matriks desain  $\mathbf{X}$ , jika peringkat atau rank dari matriks  $\mathbf{X}$  sama dengan jumlah kolomnya, maka modelnya dinamakan berperingkat penuh (*full rank model*) dan jika peringkat matriksnya lebih kecil dari jumlah kolomnya, maka model tersebut dinamakan model tidak penuh (*nonfull rank model*).

### 2.3 *Randomized Complete Block Design (RCBD)*

*Randomized Complete Block Design (RCBD)* merupakan salah satu desain percobaan yang digunakan untuk mengendalikan sumber keragaman yang berasal dari faktor pengganggu (*nuisance factor*) yang diketahui dan dapat dikendalikan. Faktor pengganggu didefinisikan sebagai faktor yang berpotensi memengaruhi respon, tetapi tidak menjadi fokus utama penelitian. Keberadaan faktor pengganggu dapat meningkatkan ragam galat sehingga mengurangi ketelitian dalam membandingkan pengaruh perlakuan (Montgomery, 2013).

RCBD menerapkan prinsip *blocking*, yaitu pengelompokan unit percobaan ke dalam beberapa blok yang relatif homogen berdasarkan faktor pengganggu tertentu. Setiap blok memuat seluruh perlakuan yang diteliti, sehingga setiap perlakuan muncul tepat satu kali pada setiap blok. Istilah *complete* pada RCBD menunjukkan bahwa seluruh perlakuan terdapat di setiap blok. Proses pengacakan dilakukan pada urutan perlakuan di dalam masing-masing blok untuk menghilangkan pengaruh faktor acak yang tidak teramati (Montgomery, 2013).

Menurut Montgomery (2013), RCBD bertujuan untuk memisahkan variasi yang disebabkan oleh perbedaan antarblok dari variasi galat percobaan. Pemisahan variasi menyebabkan ragam galat menjadi lebih kecil dibandingkan desain acak lengkap, sehingga perbandingan antarperlakuan dapat dilakukan dengan tingkat ketelitian yang lebih tinggi. RCBD banyak digunakan pada penelitian eksperimental di bidang pertanian, industri, biologi, dan ilmu terapan, terutama ketika unit percobaan memiliki heterogenitas yang dapat dikendalikan melalui pengelompokan.

Secara konseptual, RCBD merupakan pengembangan dari uji *paired t-test*, karena setiap perlakuan dibandingkan pada kondisi blok yang sama. Contoh penerapan RCBD meliputi penggunaan mesin yang berbeda sebagai blok, *batch* bahan baku sebagai blok, perbedaan waktu pengamatan, atau variasi individu sebagai unit percobaan. Selain mengendalikan faktor pengganggu, RCBD juga dapat digunakan untuk menguji kekokohan (*robustness*) pengaruh perlakuan terhadap kondisi yang sulit dikendalikan secara langsung (Montgomery, 2013).

Model RCBD dinyatakan sebagai berikut:

$$y_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + \varepsilon_{ij} \quad \text{dengan} \quad i = 1, 2, \dots, b, \quad j = 1, 2, \dots, t. \quad (2.2)$$

keterangan:

$y_{ij}$  : respon pada blok ke- $i$  dan perlakuan ke- $j$ .

$\mu$  : rata-rata umum.

$\beta_i$  : efek blok ke- $i$ .

$\tau_j$  : efek perlakuan ke- $j$ .

$\varepsilon_{ij}$  : galat pada blok ke- $i$  dan perlakuan ke- $j$ .

$\varepsilon_{ij} \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

Model efek tetap digunakan pada RCBD, sehingga parameter efek blok dan efek perlakuan diperlakukan sebagai konstanta yang tidak bersifat acak (Montgomery, 2013). Model efek tetap pada RCBD memuat kendala parameter berupa:

$$\sum_{i=1}^b \beta_i = 0, \quad \sum_{j=1}^t \tau_j = 0$$

#### 2.4 Model Reduction Method (MRM)

Pada pemodelan linear, matriks desain  $X$  tidak selalu memiliki peringkat penuh. Matriks desain yang bersifat *nonfull* rank menyebabkan pendugaan parameter model linear tidak bersifat unik karena lebih dari satu solusi memenuhi persamaan normal. Model *nonfull* rank umumnya muncul akibat adanya kendala linear pada parameter model. Hocking (1985) memperkenalkan *Model Reduction Method* (MRM) sebagai pendekatan untuk mereduksi model *nonfull* rank yang mengandung kendala menjadi model *full* rank tanpa kendala melalui transformasi matriks, tanpa menghilangkan informasi struktural model.

Misalkan diberikan model linear:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.3)$$

dengan kendala parameter:

$$\mathbf{G}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{g}$$

keterangan:

- $\mathbf{Y}$  : vektor respons berukuran  $n \times 1$ .
- $\mathbf{X}$  : matriks desain berukuran  $n \times p$  dengan  $\text{rank} < p$ .
- $\boldsymbol{\theta}$  : vektor parameter berukuran  $p \times 1$ .
- $\boldsymbol{\varepsilon}$  : vektor galat berukuran  $n \times 1$  dengan  $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I})$ .
- $\mathbf{G}$  : matriks berukuran  $q \times p$  berperingkat  $q$ .
- $\mathbf{g}$  : vektor konstanta berukuran  $q \times 1$ .

Langkah awal dalam MRM dilakukan dengan mendefinisikan matriks permutasi ortogonal  $\mathbf{T}$  yang bertujuan untuk menyusun ulang parameter sehingga kendala dapat dipisahkan. Matriks  $\mathbf{T}$  memenuhi sifat:

$$\mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{I}_p$$

Penerapan transformasi pada Model (2.3) menghasilkan bentuk:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{T}'\mathbf{T}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

ekuivalen sebagai:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.4)$$

dengan:

- $\mathbf{X}_1$  :  $\mathbf{X}\mathbf{T}'$ .
- $\boldsymbol{\theta}_1$  :  $\mathbf{T}\boldsymbol{\theta}$ .

Kendala parameter setelah transformasi dinyatakan dalam bentuk:

$$\mathbf{G}_1\boldsymbol{\theta}_1 = \mathbf{g}$$

Asumsikan bahwa  $\boldsymbol{\theta}_1$  dan  $\mathbf{G}_1$  dapat dipartisi sehingga kendala dapat ditulis:

$$\mathbf{G}_{11}\boldsymbol{\theta}_{11} + \mathbf{G}_{12}\boldsymbol{\theta}_{12} = \mathbf{g}$$

$\mathbf{G}_{11}$  adalah matriks  $q \times q$  dengan rank  $q$ , sehingga penyelesaian untuk  $\boldsymbol{\theta}_{11}$  dapat diperoleh sebagai:

$$\boldsymbol{\theta}_{11} = \mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{g} - \mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{G}_{12}\boldsymbol{\theta}_{12}$$

Selanjutnya, matriks desain  $\mathbf{X}_1$  dipartisi menjadi  $\mathbf{X}_1 = [\mathbf{X}_{11} \quad \mathbf{X}_{12}]$  dan substitusikan ke dalam Model (2.4), sehingga diperoleh:

$$\mathbf{Y}_r = \mathbf{X}_r \boldsymbol{\theta}_r + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.5)$$

dengan:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_r &: \mathbf{Y} - \mathbf{X}_{11} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{g}. \\ \mathbf{X}_r &: \mathbf{X}_{12} - \mathbf{X}_{11} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{G}_{12}. \\ \boldsymbol{\theta}_r &: \boldsymbol{\theta}_{12}. \end{aligned}$$

Model (2.5) disebut dengan model *full* rank tanpa kendala (Hocking, 1985).

## 2.5 Pendugaan Parameter

Pendugaan parameter merupakan salah satu aspek utama dalam inferensia statistika yang bertujuan memperoleh nilai penduga bagi parameter populasi yang tidak diketahui. Proses pendugaan parameter dilakukan melalui pemilihan penduga yang memenuhi kriteria tertentu sehingga penduga yang dihasilkan memiliki sifat-sifat statistika yang optimal (Usman dan Warsono, 2001).

**Teorema 2.5.1** (Myers dan Milton, 1991)

Model linear umum  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$  dimana  $\mathbf{X}$  adalah matriks *full* rank  $n \times p$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  adalah vektor parameter tidak diketahui  $p \times 1$ , dan  $\boldsymbol{\varepsilon}$  adalah vektor acak  $n \times 1$  dengan  $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ ,  $cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}$ ,  $E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ , dan  $Var(\mathbf{Y}) = \sigma^2 \mathbf{I}$ , penduga *least squares* untuk  $\boldsymbol{\beta}$  dan  $\sigma^2$  adalah:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}; \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p} \mathbf{Y}'[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}']\mathbf{Y}$$

**Bukti:**

**Penduga *Least Squares* untuk  $\boldsymbol{\beta}$**

Vektor galat ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) dapat ditulis sebagai  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ , sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \\ &= (\mathbf{Y}' - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}')(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \boldsymbol{\beta}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})\boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

Menggunakan aturan turunan terhadap  $\beta$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \epsilon' \epsilon}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} [\mathbf{Y}' \mathbf{Y} - 2\beta' \mathbf{X}' \mathbf{Y} + \beta' (\mathbf{X}' \mathbf{X}) \beta] \\ &= -2\mathbf{X}' \mathbf{Y} + 2(\mathbf{X}' \mathbf{X}) \beta\end{aligned}$$

Menyamakan turunan dengan nol

$$\begin{aligned}-2\mathbf{X}' \mathbf{Y} + 2(\mathbf{X}' \mathbf{X}) \beta &= 0 \\ -\mathbf{X}' \mathbf{Y} + (\mathbf{X}' \mathbf{X}) \beta &= 0 \\ (\mathbf{X}' \mathbf{X}) \beta &= \mathbf{X}' \mathbf{Y} \\ (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{X}) \beta &= (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{Y}\end{aligned}$$

sehingga penduga *Least Squares* untuk  $\beta$  diperoleh sebagai:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{Y}$$

Ekspektasi penduga ( $\hat{\beta}$ )

$$\begin{aligned}E(\hat{\beta}) &= E[(\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{Y}] \\ &= (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' E(\mathbf{Y}) \\ &= (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{X}) \beta \\ &= \beta \quad \rightarrow \quad \hat{\beta} \text{ penduga takbias bagi } \beta.\end{aligned}$$

Ragam penduga ( $\hat{\beta}$ )

$$\begin{aligned}Var(\hat{\beta}) &= Var[(\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{Y}] \\ &= (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' Var(\mathbf{Y}) [(\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}']' \\ &= (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{X}) (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \sigma^2 \\ &= (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \sigma^2\end{aligned}$$

**Penduga *Least Squares* untuk  $\sigma^2$**

Penduga logis  $\sigma^2$  (Myers dan Milton, 1991):

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})}{n}$$

Koreksi bias penduga ragam ( $\hat{\sigma}^2$ )

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}^2) &= \frac{1}{n} E[(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})] \\ &= \frac{1}{n} E[(\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y})] \\ &= \frac{1}{n} E[\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y}] \end{aligned}$$

karena  $(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')$  idempoten, maka:

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}^2) &= \frac{1}{n} E[\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y}] \\ &= \frac{1}{n} [tr(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\sigma^2 + (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}] \\ &= \frac{1}{n} [\sigma^2[tr(\mathbf{I}) - tr(\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')] + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}] \\ &= \frac{1}{n} [\sigma^2[tr(\mathbf{I}) - tr(\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')] ] \end{aligned}$$

Pertimbangkan rank matriks  $\mathbf{I}$  dan  $\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}^2) &= \frac{1}{n} \sigma^2 [n - p] \\ &= \frac{n - p}{n} \sigma^2 \\ E(\hat{\sigma}^2) &\neq \sigma^2 \rightarrow \text{bias} \end{aligned}$$

Mengatasi bias diberlakukan pengali  $\frac{n}{n-p}$ , sehingga:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n - p} \mathbf{Y}'[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}']\mathbf{Y}$$

**Teorema 2.5.2 Gauss–Markov** (Myers dan Milton, 1991)

Misal  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$  dimana  $\mathbf{X}$  adalah matriks *full rank*  $n \times p$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  adalah vektor parameter tidak diketahui  $p \times 1$ , dan  $\boldsymbol{\varepsilon}$  adalah vektor acak  $n \times 1$  dengan rata-rata 0 dan ragam  $\sigma^2\mathbf{I}$ . Penduga *least squares*  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  merupakan *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE) bagi  $\boldsymbol{\beta}$ .

**Bukti:**

Misalkan  $\beta^*$  sebagai penduga linear takbias lainnya dari  $\beta$ . Penduga  $\beta^*$  dinyatakan dalam bentuk:

$$\beta^* = [(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B}]\mathbf{Y}$$

dengan  $\mathbf{B}$  merupakan matriks  $p \times n$  yang elemennya bilangan real.

**Ekspektasi penduga ( $\beta^*$ )**

$$\begin{aligned} E(\beta^*) &= E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B}]\mathbf{Y} \\ &= [(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B}]E(\mathbf{Y}) \\ &= [(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B}]\mathbf{X}\beta \\ &= [\mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{X}]\beta \end{aligned}$$

karena  $\beta^*$  penduga takbias untuk  $\beta$ , maka  $E(\beta^*) = \beta$ , sehingga  $(\mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{X})$  adalah matriks identitas dengan  $\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ .

**Ragam penduga ( $\beta^*$ )**

$$\begin{aligned} Var(\beta^*) &= Var[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B}]\mathbf{Y} \\ &= [(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B}]Var(\mathbf{Y})[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B}]' \\ &= [(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B}][\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \mathbf{B}']\sigma^2 \\ &= [(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{B}' + \mathbf{B}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{B}']\sigma^2 \end{aligned}$$

karena  $\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{0}$  maka  $\mathbf{X}'\mathbf{B}' = \mathbf{0}$ , sehingga  $Var(\beta^*)$  dapat ditulis:

$$\begin{aligned} Var(\beta^*) &= [(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{B}']\sigma^2 \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\sigma^2 + \mathbf{B}\mathbf{B}'\sigma^2 \\ &= Var(\hat{\beta}) + \mathbf{B}\mathbf{B}'\sigma^2 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa  $Var(\hat{\beta}) \leq Var(\beta^*)$ .

## 2.6 Pengujian Hipotesis

Pengujian hipotesis merupakan aspek utama lain dalam inferensia statistika yang bertujuan mengevaluasi kebenaran suatu pernyataan atau dugaan mengenai parameter populasi berdasarkan informasi yang diperoleh dari data sampel. Proses pengujian hipotesis dilakukan melalui perumusan hipotesis nol dan hipotesis alternatif, penentuan statistik uji yang sesuai, serta pengambilan keputusan berdasarkan kaidah pengujian yang ditetapkan (Usman dan Warsono, 2001).

Pada model linear umum, hipotesis dinyatakan dalam bentuk:

$$H_0 : \mathbf{H}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{h} \quad \text{vs.} \quad H_a : \mathbf{H}\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{h}$$

atau

$$H_0 : \mathbf{H}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{h} = \mathbf{0} \quad \text{vs.} \quad H_a : \mathbf{H}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{h} \neq \mathbf{0}$$

dimana  $\mathbf{H}$  adalah matriks  $q \times p$  dengan rank  $q \leq p$  dan  $\mathbf{h}$  adalah vektor  $q \times 1$ . Hipotesis ini memungkinkan untuk menguji hubungan fungsional antara parameter (Myers dan Milton, 1991).

Kriteria pengujian:

$$\text{Tolak } H_0 \text{ jika } F_{hit} \geq F_\alpha$$

dengan:

$$F_{hit} = \left( \frac{(\mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{h})' [\mathbf{H}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{H}']^{-1} (\mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{h})}{\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{X}^{-})\mathbf{Y}} \right) \left( \frac{n-p}{q} \right) \quad (2.6)$$

Pengambilan keputusan pada pengujian hipotesis dapat menghasilkan keputusan yang sesuai atau tidak sesuai dengan keadaan sebenarnya dari hipotesis nol. Keputusan yang tidak sesuai terdiri atas kesalahan tipe I, yaitu penolakan hipotesis nol ketika hipotesis nol benar, dan kesalahan tipe II, yaitu kegagalan menolak hipotesis nol ketika hipotesis nol salah. Keputusan yang sesuai terjadi ketika hipotesis nol ditolak pada kondisi hipotesis nol salah  $(1-\beta)$ , dan peluang terjadinya keputusan tersebut didefinisikan sebagai kuasa uji atau *power of test* (Usman dan Warsono, 2001). Ringkasan hubungan antara keputusan pengujian dan keadaan hipotesis nol disajikan pada Tabel 2.1.

**Tabel 2.1 Kesalahan Pengujian Hipotesis**

Keputusan \ Situasi	$H_0$ Benar	$H_0$ Salah
Tidak Tolak $H_0$	Keputusan Benar $(1 - \alpha)$	Kesalahan Tipe II $(\beta)$
Tolak $H_0$	Kesalahan Tipe I $(\alpha)$	Keputusan Benar $(1 - \beta)$

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

#### **3.1 Waktu dan Tempat Penelitian**

Penelitian dilaksanakan pada Semester Ganjil Tahun Akademik 2025/2026 dengan lokasi penelitian di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

#### **3.2 Data Simulasi**

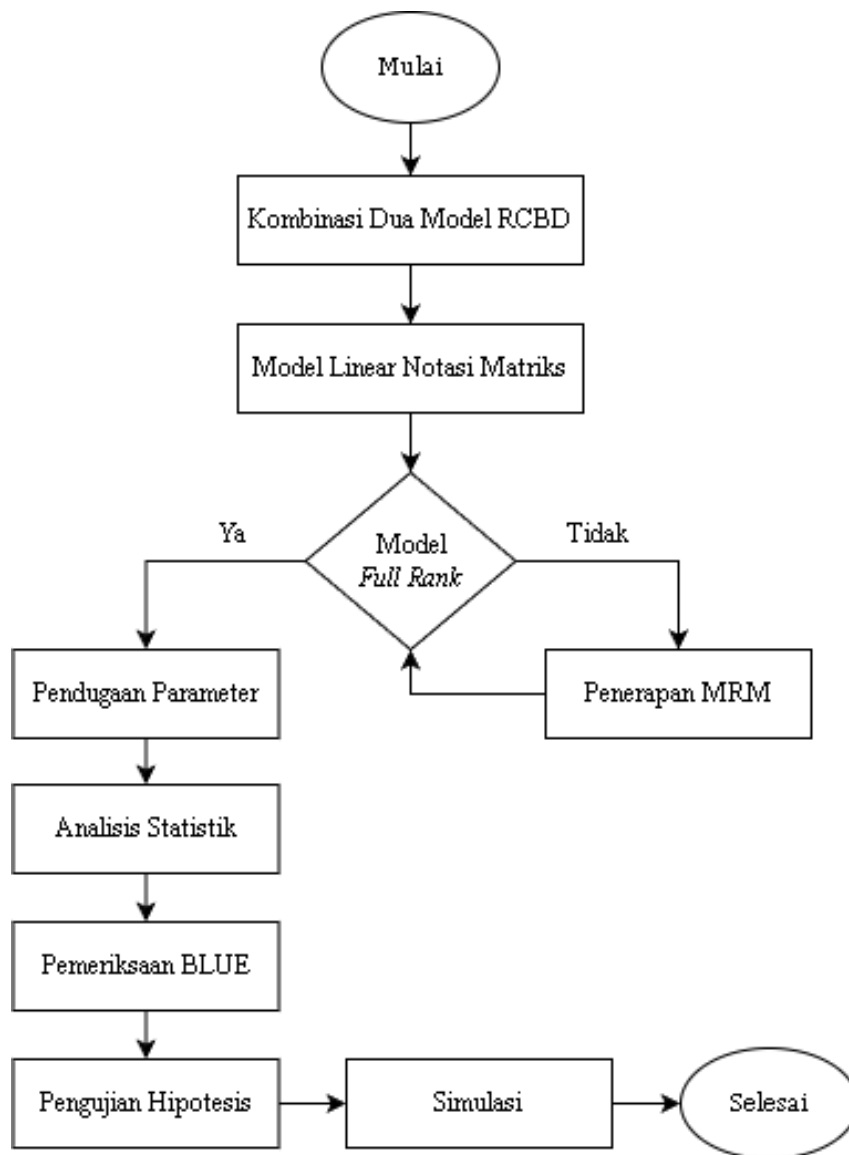
Data yang digunakan merupakan data simulasi yang dibangkitkan menggunakan *software* SAS 9.4 dengan variabel respon diasumsikan berdistribusi normal  $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Desain simulasi terdiri atas dua model *Randomized Complete Block Design* (RCBD) yang dikombinasikan, dimana setiap model memiliki 4 efek blok dan 3 efek perlakuan, sehingga diperoleh 24 observasi.

#### **3.3 Metode Penelitian**

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini disusun melalui tahapan sebagai berikut:

1. Kombinasi dua model *Randomized Complete Block Design* (RCBD) diformulasikan ke dalam bentuk model linear umum menggunakan notasi matriks.
2. Model linear yang diperoleh selanjutnya diperiksa sifat *full* rank-nya. Apabila model awal bersifat *nonfull* rank, maka dilakukan reduksi model menggunakan *Model Reduction Method* (MRM) untuk memperoleh model tereduksi yang bersifat *full* rank.

3. Melakukan pendugaan parameter menggunakan metode *Least Squares* dan menganalisis sifat-sifat penduga parameter.
4. Pemeriksaan karakteristik penduga parameter sesuai dengan kriteria *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE).
5. Pengujian hipotesis dilakukan dengan hipotesis nol yang menyatakan bahwa seluruh efek blok dan efek perlakuan pada RCBD kedua tidak berbeda dengan efek pada RCBD pertama.
6. Melakukan simulasi.



**Gambar 3.1** *Flowchart* Tahapan Penelitian.

Tahapan simulasi pendugaan parameter:

1. Penetapan parameter sebenarnya

Menentukan nilai-nilai parameter tetap (*true values*) yang akan menjadi acuan evaluasi, yaitu:

- (a) Jumlah blok ( $b$ ) = 4.
- (b) Jumlah perlakuan ( $t$ ) = 3.
- (c) Replika simulasi ( $N_{sim}$ ) = 1000 iterasi untuk setiap skenario.
- (d) Dua skenario varians, yaitu  $\sigma^2 = 1$  dan  $\sigma^2 = 9$ .
- (e) Nilai parameter rata-rata umum ( $\mu_1 = 10, \mu_2 = 20$ ), efek blok ( $\beta$ ), dan efek perlakuan ( $\tau$ ) untuk dua variabel respon.

2. Pembangkitan data

Data dibangkitkan menggunakan model matematis RCBD:

$$y_{ij(l)} = \mu(l) + \beta_{i(l)} + \tau_{j(l)} + \epsilon_{ij(l)}$$

Proses ini dilakukan di dalam *loop* sim = 1 to 1000 dengan ketentuan:

- (a) Galat ( $\epsilon$ ) berdistribusi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .
- (b) Blok dan perlakuan pertama ditetapkan memiliki efek nol sebagai pembanding.
- (c) Membuat variabel indikator untuk mengakomodasi struktur multivariate dalam satu model regresi tunggal.

3. Estimasi parameter

Pendugaan parameter menggunakan Prosedur Regresi (PROC REG) pada *software* SAS sebanyak 1000 kali untuk setiap skenario varians.

4. Penghitungan nilai harapan penduga

- (a) Mengelompokkan hasil estimasi berdasarkan tipe parameter.
- (b) Menghitung nilai harapan dari total 1000 estimasi per parameter.

5. Evaluasi kualitas penduga

Kualitas penduga dievaluasi menggunakan ukuran statistik RMSE.

## 6. Visualisasi

Menyajikan grafik antara *Expected Value* hasil simulasi dengan *True Value* pada berbagai tingkat  $\sigma^2$ .



**Gambar 3.2** *Flowchart* Simulasi Pendugaan Parameter.

Tahapan simulasi pengujian hipotesis:

1. Penentuan skenario parameter

Menentukan variasi kondisi untuk menguji sensitivitas model:

- (a) 20 tingkat nilai parameter  $\Theta$ . Iterasi 1 dimulai dengan semua  $\Theta = 0$  (untuk mengecek Kesalahan Tipe I).
- (b) 4 level varians ( $\sigma^2 = 3, 6, 9, 12$ ).
- (c) Setiap skenario dijalankan 1000 kali pengulangan.

2. Pembangkitan data

Data dibangkitkan menggunakan model matematis RCBD dengan ketentuan yang sama pada Pendugaan Parameter.

3. Pengujian hipotesis

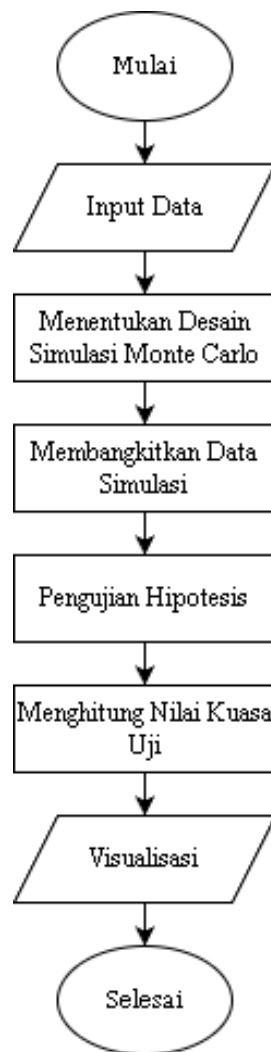
Melakukan uji hipotesis simultan berbasis statistik  $F$  untuk menguji kesamaan efek blok dan perlakuan antar level respons.

4. Perhitungan nilai kuasa uji

Nilai kuasa uji dihitung dengan merata-ratakan hasil keputusan penolakan hipotesis nol dari 1000 replika.

5. Visualisasi

Menyajikan hasil simulasi kuasa uji dalam bentuk tabel ringkasan.



**Gambar 3.3** *Flowchart* Simulasi Pengujian Hipotesis.

## BAB V

### KESIMPULAN

#### 5.1 Kesimpulan

1. Hasil penelitian membuktikan bahwa *Model Reduction Method* (MRM) efektif digunakan untuk mentransformasi model *nonfull* rank yang mengandung kendala menjadi model *full* rank tanpa kendala pada kombinasi dua model *Randomized Complete Block Design* (RCBD).
2. Pendugaan parameter pada model *full* rank menghasilkan penduga yang bersifat takbias dan memiliki ragam minimum, sesuai dengan kriteria *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE).
3. Hasil pengujian hipotesis menunjukkan bahwa model yang diperoleh memiliki kuasa uji (*power of test*) yang baik pada kondisi ragam galat rendah, serta tetap menunjukkan performa yang konsisten mencapai nilai satu pada seluruh kondisi ragam galat seiring dengan sebaran parameter  $\Theta_r$  yang semakin besar.

#### 5.2 Saran

1. Mengembangkan penerapan *Model Reduction Method* (MRM) pada desain percobaan atau model linear lain yang memiliki struktur lebih kompleks guna menguji konsistensi efektivitas metode tersebut.
2. Analisis dapat diperluas dengan mempertimbangkan variasi struktur ragam dan ukuran sampel yang berbeda agar kinerja pendugaan parameter serta pengujian hipotesis dapat dievaluasi secara lebih komprehensif.

## DAFTAR PUSTAKA

- Daoud, J. I., Usman, M., Elfaki, F. A. M., Othman, R., & Sidiq, A. (2006). Transformation of a constrained model into unconstrained model in two way treatment structure with interaction. *Quantitative Methods*, 2(2), 29-36.
- Graybill, F. A. (1976). *Theory and application of the linear model*. Massachusetts: Duxbury Press.
- Hocking, R. R. (1985). *The analysis of linear models*. California: Brooks/Cole Publishing Company.
- Montgomery, D. C. (2013). *Design and Analysis of Experiments* (8th ed.). Hoboken: John Wiley & Sons.
- Myers, R. H., & Milton, J. S. (1991). *A First Course in the Theory of Linear Statistical Models*. New York: John Wiley & Sons.
- Usman, M., Elfaki, F. A. M., & Daoud, J. I. (2013). Ratio of linear function of parameters and testing hypothesis of the combination two split plot designs. *Middle-East Journal of Scientific Research*, 13(Mathematical Applications in Engineering), 109-115.
- Usman, M., Malik, I., Warsono, & Elfaki, F. A. M. (2016). Analysis and ratio of linear function of parameters in fixed effect three level nested design. *ARPJN Journal of Engineering and Applied Sciences*, 11(11), 7121-7128.
- Usman, M., Njuho, P., Elfaki, F. A. M., & Daoud, J. I. (2011). The combination of several RCBDS. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 5(4), 67-75.
- Usman, M., & Warsono. (2001). *Teori model linear dan aplikasinya*. Sinar Baru Algensindo.