APLIKASI *LINEAR SIDE CONDITIONS* $T\beta = 0$ PADA *NON-FULL RANK LINEAR MODEL*

Skripsi

Oleh

MELIYANA BOHORI
NPM. 2217031046

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

ABSTRACT

THE APPLICATION OF LINEAR SIDE CONDITIONS $T\beta = 0$ TO NON–FULL RANK LINEAR MODELS

By

Meliyana Bohori

Linear models are the basis of statistical analysis, including analysis of variance (ANOVA). However, under incomplete ranking conditions, the design matrix exhibits linear dependence, thereby preventing the estimation of unique model parameters. This study aims to address this issue by applying side conditions in the form of the linear constraint $T\beta = 0$ without altering the model structure. The methods employed include the formulation of a restricted linear model, the derivation of parameter estimators, and simulation studies. The results show that side conditions produce unique, stable, and nearly unbiased parameter estimators. Furthermore, the results indicate that test power increases as differences between parameters increase and decreases as the variance of the error term increases. Thus, this approach is effective in ensuring the uniqueness of parameter estimates and improving the quality of analysis in ANOVA models with non-full rank design matrices.

Keywords: side conditions, identifiability constraints, parameter estimation, least square, non-full rank.

ABSTRAK

APLIKASI *LINEAR SIDE CONDITIONS* $T\beta = 0$ PADA *NON-FULL RANK LINEAR MODEL*

Oleh

Meliyana Bohori

Model linier merupakan landasan analisis statistik, termasuk analisis variansi (ANOVA). Namun, dalam kondisi *non-full rank*, matriks desain menunjukkan ketergantungan linier, sehingga menghalangi estimasi parameter model yang unik. Penelitian ini bertujuan untuk mengatasi masalah tersebut dengan menerapkan *side condition* berupa batasan linier $T\beta = 0$ tanpa mengubah struktur model. Metode yang digunakan meliputi perumusan model linier terbatas, derivasi estimator parameter, dan studi simulasi. Hasil menunjukkan bahwa kondisi tambahan menghasilkan estimator parameter yang unik, stabil, dan tidak bias. Selain itu, hasil menunjukkan bahwa kuasa uji meningkat seiring dengan meningkatnya perbedaan antarparameter dan menurun seiring dengan meningkatnya varians. Dengan demikian, pendekatan ini efektif dalam memastikan keunikan estimasi parameter dan meningkatkan kualitas analisis pada model ANOVA dengan matriks desain yang *non-full rank*.

Kata-kata kunci: *Side conditions, identifiability constraints*, estimasi parameter, *least square*, *non-full* rank.

APLIKASI *LINEAR SIDE CONDITIONS* $T\beta = 0$ PADA *NON-FULL RANK LINEAR MODEL*

MELIYANA BOHORI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

Judul Skripsi : **APLIKASI *LINEAR SIDE CONDITIONS* $T\beta = 0$ PADA *NON-FULL RANK LINEAR MODEL***

Nama Mahasiswa : ***Meliyana Bohori***

Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031046**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.	**Riza Sawitri, S.Pd., M.Sc.**
NIP. 195701011984031020	NIP. 198905042024062001

2. Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama
FMIPA Universitas Lampung

Mulyono, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP. 197406112000031002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	:	**Prof. Dr. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.**.................
Sekretaris	:	**Riza Sawitri, S.Pd., M.Sc.** ....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Edwin Russel, S.E., M.Sc.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 6 Mei 2026

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Meliyana Bohori**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031046**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Aplikasi *Linear Side Conditions* $T\beta = 0$ pada *Non-full Rank Linear Model***

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 6 Mei 2026

Penulis,

METERAI TEMPEL

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000

76A5FANX412783931

Meliyana Bohori

NPM. 2217031046

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Meliyana Bohori, lahir di Desa Negeri Sakti, Kabupaten Pesawaran, pada tanggal 12 September 2004. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara.

Penulis menempuh pendidikan formal di SD Negeri 1 Negeri Sakti, Kabupaten Pesawaran, Provinsi Lampung pada tahun 2010 - 2016, kemudian melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 1 Pesawaran pada tahun 2016 - 2019, dan menyelesaikan pendidikan Menengah Atas di SMA Negeri 1 Gedong Tataan, Kabupaten Pesawaran, Provinsi Lampung pada tahun 2019 - 2022.

Pada tahun 2022, penulis diterima sebagai mahasiswa Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN).

Selama menempuh pendidikan di perguruan tinggi, penulis aktif dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) sebagai Anggota Biro Dana dan Usaha pada periode 2023. Penulis juga berpartisipasi dalam kepanitiaan kegiatan Dies Natalis Matematika ke-25 (DINAMIKA XXV) sebagai Koordinator Divisi Marketing dan Bazar.

Sebagai bentuk pelaksanaan Tri Dharma Perguruan Tinggi, khususnya dalam bidang pengabdian kepada masyarakat, penulis melaksanakan kegiatan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada periode Januari–Februari 2025 di Desa Wirata Agung, Kecamatan Seputih Mataram, Kabupaten Lampung Tengah. Selain itu, pada periode Juni–Agustus 2025, penulis melaksanakan Kerja Praktik di Bank BRI Kantor Cabang Tanjung Karang guna memperoleh pengalaman kerja serta mengaplikasikan ilmu pengetahuan yang telah diperoleh selama masa perkuliahan.

KATA INSPIRASI

”*Sesungguhnya Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya*.”
(Q.S. Al-Baqarah:286)

“*What is meant for you will never miss you.*”

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Aplikasi *Linear Side Conditions* $T\beta = 0$ pada *Non-full Rank Linear Model*" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Mustofa Usman, M.A., Ph.D. selaku Pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

2. Ibu Riza Sawitri, S.Pd., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Bapak Dr. Edwin Russel, S.E., M.Sc. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.

4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

5. Ibu Dra. Dorrah Azis, M.Si. dan Bapak Dr. Edwin Russel, S.E., M.Sc. selaku dosen pembimbing akademik.

6. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Keluarga tercinta, Ayah, Bunda, dan Adik yang senantiasa memberikan doa, dukungan, perhatian, serta motivasi kepada penulis. Terima kasih karena selalu hadir dengan kasih sayang, memberikan semangat dan keyakinan kepada penulis, sehingga proses penyelesaian studi ini terasa lebih ringan untuk dijalani.

8. Sahabat penulis sejak masa sekolah diantaranya Hesti Kurniawati, Niya Ramadani, Fadillah Tun Hasanah dan Damar Wulan yang telah banyak memberikan tawa, menjadi tempat berbagi cerita dan menghibur di tengah pelik pikiran. Meskipun jarang bertemu karena terpisah jarak, kebersamaan dan momen bersama kalian selalu menjadi hal yang dirindukan oleh penulis.

9. Teman seperjuangan semasa kuliah, yaitu Fadia Aulia Noor Praja, Desi Widiarti, Elsya Sundari, Niluh Cyntia Pratiwi, dan Muhammad Tri Harsono. Terima kasih telah menjadi bagian dari perjalanan perkuliahan penulis, memberikan banyak bantuan, dukungan, motivasi, serta menghadirkan kebersamaan yang penuh cerita dan kehangatan. Kehadiran kalian membuat masa perkuliahan terasa lebih bermakna, menyenangkan, dan jauh dari rasa sepi di tengah berbagai tantangan yang dihadapi selama menempuh pendidikan.

10. Rekan seperjuangan skripsi, terima kasih atas bantuan, dukungan, dan diskusi yang telah diberikan selama proses penyusunan skripsi ini.

11. Rekan biro Dana dan Usaha HIMATIKA Periode 2023, terimakasih atas banyak kenangan dan pembelajaran yang diberikan.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 6 Mei 2026
Penulis,

Meliyana Bohori
NPM. 2217031046

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori model linear merupakan konsep fundamental dalam analisis statistik yang mencakup berbagai bentuk model analisis data, seperti regresi, analisis variansi dalam rancangan percobaan, serta model campuran. Secara umum, model linear dapat dinyatakan dalam bentuk $Y = X\beta + \varepsilon$, dengan asumsi utama bahwa $E(\varepsilon_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ bersifat konstan, dan $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ untuk $i \neq j$. Struktur hubungan antara variabel respon dan parameter model sepenuhnya ditentukan oleh matriks rancangan X. Dalam konteks ini, jika *rank* matriks X sama dengan jumlah kolomnya, maka model disebut sebagai model berperingkat penuh (*full rank model*). Sebaliknya, jika *rank* matriks X lebih kecil daripada jumlah kolomnya, maka model tersebut dikategorikan sebagai model tidak berperingkat penuh (*non–full rank model*) (Usman & Warsono, 2009).

Dalam rancangan percobaan, analisis data umumnya dirumuskan dalam kerangka model linear melalui analisis variansi (ANOVA), yang digunakan untuk membandingkan rataan respon dari berbagai perlakuan atau kombinasi perlakuan yang diterapkan pada unit percobaan (Montgomery, 2013). Secara konseptual ANOVA merupakan kasus khusus dari model linear yang dalam praktiknya sering dinyatakan dengan jumlah parameter yang melebihi jumlah parameter yang dapat diestimasi secara statistik. Kondisi ini menyebabkan model menjadi terparametrisasi berlebih (*overparameterized*). Secara matematis, kondisi ini menghasilkan matriks rancangan X berbentuk persegi panjang berdimensi $n \times p$, dengan $\mathrm{rank}(X) = r < p$, sehingga kolom-kolom X bersifat saling bergantung secara linear dan matriks tersebut tidak berperingkat penuh. Konsekuensinya, matriks $X'X$ menjadi matriks singular yang tidak memiliki invers, sehingga penduga kuadrat terkecil $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ tidak dapat ditentukan secara unik dan model menjadi tidak teridentifikasi dengan baik (Rencher & Schaalje, 2008).

Ketidakteridentifikasian ini secara langsung berimplikasi pada interpretasi ANOVA, karena ketidakunikan estimasi parameter menyebabkan efek faktor tidak memiliki makna tunggal. Nilai parameter yang diperoleh bergantung pada representasi model atau pembatas yang digunakan, meskipun nilai pendugaan respon yang dihasilkan tetap sama untuk seluruh representasi parameter yang ekuivalen (Hector dkk., 2010).

Untuk mengatasi ketidakteridentifikasian parameter pada model ANOVA dengan matriks rancangan *non-full rank*, berbagai pendekatan telah dikembangkan dalam literatur statistik. Salah satu pendekatan yang umum digunakan adalah *generalized inverse*, yang memungkinkan diperolehnya penduga kuadrat terkecil meskipun matriks normal $X'X$ bersifat singular dan tidak memiliki invers biasa (John, 1970). Namun, karena terdapat banyak bentuk *generalized inverse* yang sama-sama sah secara matematis, penduga parameter yang dihasilkan tidak bersifat unik sehingga interpretasi efek faktor dalam ANOVA tidak memiliki interpretasi tunggal (Murray-Lasso, 2008). Pendekatan lain yang sering digunakan adalah reparameterisasi model, yang bertujuan mengatasi redundansi parameter dengan membentuk parameter baru sebagai kombinasi linear dari parameter asli sehingga model menjadi berperingkat penuh dan teridentifikasi (Little dkk., 2010). Reparameterisasi ini dilakukan melalui pembatasan linear formal yang mengubah struktur parameter, sehingga formulasi model tidak lagi identik dengan struktur awal ANOVA dan dapat menyulitkan interpretasi langsung terhadap efek faktor asli (Hirschberg & Slottje, 1999).

Sebagai alternatif yang lebih langsung, pendekatan *side conditions* atau pembatasan linear pada parameter diterapkan untuk menutup defisiensi rank tanpa mengubah struktur model, dengan mengenakan kendala $T\beta = 0$ untuk mengatasi ketergantungan linear antar parameter. Pendekatan ini berfungsi sebagai *identifiability constraints* yang memastikan parameter model teridentifikasi secara unik dan pendugaan parameter dapat dilakukan secara tunggal (Seber, 2015). Keunggulan utama metode ini adalah kemampuannya mempertahankan nilai pendugaan respon dan konsistensi interpretasi efek faktor dalam kerangka ANOVA, meskipun representasi parameter individual bergantung pada pembatas yang digunakan (Hector dkk., 2010).

Dalam praktiknya, penerapan *side conditions* $T\beta = 0$ memungkinkan estimasi parameter menjadi unik pada model linear dengan matriks rancangan tidak penuh, seperti pada rancangan percobaan ANOVA dua arah dan faktorial dalam *Completely Randomized Design* (CRD). Landasan teoretis mengenai pembatasan linear sebagai *identifiability constraints* telah dibahas dalam literatur statistik klasik, antara lain oleh Plackett (1950) melalui modifikasi metode kuadrat terkecil, Nelder (1994) yang menekankan penyederhanaan konstrain parameter untuk interpretasi model, serta secara lebih sistematis dalam kerangka model linier oleh Rencher & Schaalje (2008), Wang & Chow (2007), dan Seber (2015).

Meskipun demikian, penerapan *side conditions* dalam praktik analisis rancangan percobaan masih relatif jarang ditemukan dan umumnya terbatas pada penjelasan konseptual dalam buku teks akademik. Upaya pengembangan pendekatan pernah dibahas oleh Seegrist (1973) melalui *augmentasi* data untuk mempermudah formulasi kuadrat terkecil serta lebih lanjut Darghan dkk. (2014) menunjukkan bahwa *side conditions* melalui matriks teraugmentasi yang diperluas (*extended augmented matrix*) efektif dalam menangani model *non-full rank*, termasuk pada kasus yang memiliki gangguan kompleks seperti efek overlap pada model klasifikasi dua arah. Namun, pendekatan tersebut belum secara eksplisit menunjukkan prosedur penurunan penduga parameter pada model linear *non-full rank* melalui *side conditions*, serta pembahasan sifat statistik estimator yang dihasilkan masih terbatas dan belum disajikan secara sistematis. Oleh karena itu, diperlukan kajian sistematis untuk memperoleh estimator unik melalui *linear side conditions* serta mengkaji sifat statistiknya.

Berdasarkan kesenjangan tersebut, penelitian ini difokuskan pada penerapan *linear side conditions* pada model *non-full rank* melalui konstruksi *augmented matrix* untuk menunjukkan prosedur penurunan penduga parameter yang teridentifikasi secara unik serta mengevaluasi sifat statistik estimator yang dihasilkan. Kajian ini diharapkan dapat memberikan gambaran yang lebih jelas mengenai implementasi *side conditions* dalam menjamin keunikan estimasi parameter dan kualitas hasil analisis pada rancangan percobaan.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memperoleh penduga parameter yang bersifat unik pada model linear *non-full rank* melalui penerapan *linear side conditions* $T\beta = 0$
2. Mengevaluasi sifat statistik dari estimator yang dihasilkan oleh penerapan *linear side conditions* $T\beta = 0$.

1.3 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memperkaya kajian metodologis mengenai penerapan *linear side conditions* pada model linear *non-full rank*, khususnya dalam menghasilkan estimasi parameter yang unik serta mengevaluasi sifat statistik estimator yang diperoleh. Selain itu, hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi referensi dalam penerapan kendala linear pada analisis rancangan percobaan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 *Factorial Completely Randomized Design* (Factorial CRD)

Rancangan percobaan (*experimental design*) adalah suatu rancangan pengambilan pengamatan yang disusun sedemikian rupa untuk memberikan jawaban yang paling informatif terhadap pertanyaan-pertanyaan yang sedang diteliti (Clarke, 2008). Menurut Milliken & Johnson (2009) terdapat dua hal yang mendasari suatu rancangan percobaan yaitu struktur perlakuan (*treatment structure*) yang merujuk pada jenis dan kombinasi perlakuan yang diuji, serta struktur rancangan (*design structure*) yang berkaitan dengan cara unit percobaan dikelompokkan, diacak, dan diberi perlakuan untuk mengendalikan variasi yang tidak diinginkan, termasuk melalui pembentukan kelompok unit percobaan yang relatif homogen.

Struktur rancangan terdiri atas beberapa jenis, salah satunya *Factorial Completely Randomized Design* (CRD). Percobaan faktorial menggunakan lebih dari satu faktor, di mana perlakuan merupakan kombinasi dari taraf suatu faktor dengan taraf faktor lain. Suatu percobaan faktorial yang terdiri atas dua faktor yaitu A dan B yang masing-masing memiliki taraf sebanyak a dan b, setiap kombinasi diulang c kali, sehingga terdapat abc unit percobaan. Model linier aditif untuk respon yang dihasilkan dapat dituliskan sebagai berikut :

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \qquad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \\ k = 1, 2, \ldots, c \end{cases} \tag{2.1}$$

dimana:

y_{ijk} = respon pengamatan pada taraf ijk

μ = nilai tengah umum

α_i = pengaruh taraf ke-i faktor A

β_j = pengaruh taraf ke-j faktor B

ε_{ijk} = residual pengamatan pada taraf ijk

Tabel rancangan data pada *Factorial Completely Randomized Design* (CRD) disajikan pada Tabel 2.1 sebagai berikut.

Tabel 2.1 Tabel Rancangan Faktorial FCRD (Montgomery, 2013)

i	1	2	$\cdots$	b	$\sum_{j=1}^{b} Y_{ijk} = Y_{i..}$
1	$Y_{11\cdot}$	$Y_{12\cdot}$	$\cdots$	$Y_{1b\cdot}$	$Y_{1..}$
2	$Y_{21\cdot}$	$Y_{22\cdot}$	$\cdots$	$Y_{2b\cdot}$	$Y_{2..}$
3	$Y_{31\cdot}$	$Y_{32\cdot}$	$\cdots$	$Y_{3b\cdot}$	$Y_{3..}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	c	$\vdots$	(bc)
a	$Y_{a1\cdot}$	$Y_{a2\cdot}$	$\cdots$	$Y_{ab\cdot}$	$Y_{a..}$
$\sum_{i=1}^{a} Y_{ijk} = Y_{.j.}$	$Y_{.1.}$	$Y_{.2.}$	(ac)	$Y_{.b.}$	$Y_{...}$ (abc)

Percobaan faktorial memiliki beberapa keunggulan dibandingkan percobaan satu faktor, antara lain:

1. Percobaan faktorial memungkinkan beberapa faktor diuji secara bersamaan dalam suatu rancangan percobaan, sehingga menjadikannya lebih efisien dibandingkan menguji satu faktor pada satu waktu (Montgomery, 2013).
2. Menghasilkan kesimpulan yang dapat diterapkan pada berbagai kondisi karena melibatkan kombinasi level faktor (Milliken & Johnson, 2009).

2.2 Konsep Dasar Matriks

Definisi 2.2.1 Matriks Suatu matriks adalah susunan angka-angka atau elemen dalam bentuk empat persegi dengan banyaknya baris m dan banyaknya kolom n. Suatu vektor Y adalah matriks dengan n baris dan 1 kolom (Usman & Warsono, 2009).

Bilangan yang terletak pada baris i dan kolom j di dalam matriks A akan dinyatakan sebagai a_{ij}. Matriks umum $m \times n$ dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Berikut ini beberapa contoh matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

Definisi 2.2.2 Matriks Identitas merupakan matriks berdimensi $n \times n$ yang anggota-anggotanya 1 pada diagonal utamanya dan nol selainnya dan dilambangkan dengan I_n (Usman & Warsono, 2009).
Contoh matriks identitas ukuran 3×3

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.3 Ruang Kolom (*Column Space*) Ruang kolom dari suatu matriks X berukuran $m \times n$ adalah himpunan yang elemennya terdiri dari semua vektor kolom berdimensi m yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari n kolom matriks X. Ruang kolom matriks X selanjutnya dinotasikan dengan $\mathcal{M}(X)$.
Dengan demikian, elemen-elemen ruang kolom X adalah semua vektor kolom berdimensi m yang berbentuk umum

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n,$$

dengan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ skalar dan $x_1, x_2, \dots, x_n$ menyatakan kolom-kolom dari X. Secara ekuivalen, ruang kolom X terdiri dari semua vektor yang berbentuk $X\alpha$ dengan α adalah vektor kolom berukuran $n \times 1$ (Harville, 2008).

Sebagai contoh misalkan diberikan matriks berukuran 3×4:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Kolom-kolom matriks X adalah

$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Maka ruang kolom matriks X adalah

$$\mathcal{M}(X) = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Sebagai contoh, vektor

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

merupakan elemen dari ruang kolom $\mathcal{M}(X)$. Sebaliknya, vektor

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bukan merupakan elemen dari ruang kolom $\mathcal{M}(X)$ karena tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari kolom-kolom matriks X.

Definisi 2.2.4 Ruang Baris (*Row Space*) Ruang baris dari suatu matriks X berukuran $m \times n$ adalah himpunan yang elemennya terdiri dari semua vektor baris berdimensi n yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari m baris matriks X. Ruang baris matriks X selanjutnya dinotasikan dengan $\mathcal{R}(X)$.

Dengan demikian, elemen-elemen ruang baris X adalah semua vektor baris berdimensi n yang berbentuk umum

$$\alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \cdots + \alpha_m x_m',$$

dengan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ skalar dan $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$ menyatakan baris-baris dari X. Secara ekuivalen, ruang baris X terdiri dari semua vektor yang berbentuk $a'X$, dengan a' adalah vektor baris berdimensi $1 \times m$ (Harville, 2008).
Misalkan diberikan matriks

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Dengan baris-barisnya adalah

$$x'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad x'_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad x'_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan definisi, ruang baris dari X adalah

$$\mathcal{R}(X) = \{\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \alpha_3 x'_3 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Sebagai contoh, vektor baris

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

merupakan elemen dari ruang baris $\mathcal{R}(X)$.
Sebaliknya, vektor baris

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bukan merupakan elemen dari ruang baris $\mathcal{R}(X)$ karena tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari baris-baris matriks X.

Hubungan antara ruang baris dan ruang kolom

Lemma berikut menjelaskan bahwa ruang baris dari suatu matriks X identik dengan ruang kolom dari transpose matriks tersebut atau X', sehingga $\mathcal{R}(X) = \mathcal{M}(X^\top)$.

Lemma 2.2.5 Untuk setiap matriks X, berlaku

$$y \in \mathcal{M}(X') \text{ jika dan hanya jika } y' \in \mathcal{R}(X).$$

Bukti. Jika $y \in \mathcal{M}(X')$, maka terdapat vektor kolom a sehingga

$$y = X'a.$$

Dengan mentranspose diperoleh

$$y' = (X'a)' = a'X.$$

Ini menunjukkan bahwa y' merupakan kombinasi linier dari baris-baris X, sehingga

$$y' \in \mathcal{R}(X).$$

Sebaliknya, dengan argumen serupa dapat ditunjukkan bahwa jika $y' \in \mathcal{R}(X)$, maka $y \in \mathcal{M}(X')$. ■

Definisi 2.2.6 Transpose Jika matriks X berdimensi $n \times k$, transpose matriks X dilambangkan dengan X' dan ditandai dengan pertukaran baris dan kolom sehingga dimensi menjadi $k \times n$ (Myers & Milton, 1991). Sebagai contoh, misalkan diberikan matriks

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Transpose dari matriks X adalah

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Sifat dasar transpose:

1. $(cX)' \quad = cX',$ c adalah skalar, X adalah matriks.
2. $(X \pm Y)' \quad = X' \pm Y',$ X dan Y adalah matriks berukuran sama.
3. $(X')' \quad = X,$ X adalah matriks apa pun.
4. $(XY)' \quad = Y'X',$ Terdefinisi jika kolom X sama dengan baris Y

Definisi 2.2.7 Invers Matriks Suatu matriks X berdimensi $n \times n$ dikatakan mempunyai invers, dilambangkan dengan X^{-1} berlaku $XX^{-1} = X^{-1}X = I$. Jika suatu matriks mempunyai invers maka dikatakan matriks tersebut *nonsingular*, jika tidak mempunyai invers dikatakan matriks tersebut *singular* (Usman & Warsono, 2009).

Sebagai contoh, misalkan diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinan matriks A adalah

$$\det(A) = (2)(1) - (1)(1) = 1 \neq 0,$$

sehingga matriks A invertibel. Invers dari matriks A adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.2.8 Jika suatu matriks mempunyai invers, maka inversnya unik.

Bukti. Misalkan invers dari suatu matriks *nonsingular* X adalah Y dan Z, harus berlaku

$$\begin{aligned} XY &= YX = I \\ XZ &= ZX = I \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa $Y = Z$

$$Y = YI = Y(XZ) = (YX)Z = IZ = Z$$

Jadi diperoleh invers dari X adalah unik. ■

Teorema 2.2.9 Jika X dan Y adalah *nonsingular* matriks, dan XY mempunyai invers, maka inversnya adalah $(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$.

Bukti. Kita ketahui bahwa $XY(XY)^{-1} = I$, tetapi juga

$$\begin{aligned} XYY^{-1}X^{-1} &= X(YY^{-1})X^{-1} \\ &= XIX^{-1} \\ &= XX^{-1} \\ &= I \end{aligned}$$

diperoleh invers dari XY adalah unik. ■

Definisi 2.2.10 Rank Matriks Rank dari suatu matriks X berukuran $m \times n$ adalah banyaknya maksimum baris (atau kolom) yang saling bebas secara linier dalam matriks X. Rank matriks X dinotasikan dengan $\mathrm{rank}(X) = p$ (Myers & Milton, 1991). Sebagai contoh misalkan

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kolom-kolom matriks B saling bebas linear, sehingga $\text{rank}(B) = 3$.
Sifat dasar rank:

1. $\text{rank}(X) = \text{rank}(X')$.
2. Untuk matriks bujur sangkar X berukuran $n \times n$, berlaku $\text{rank}(X) = n$ jika dan hanya jika X *nonsingular*.
3. Jika $X = \text{diag}(x_i)$ merupakan matriks diagonal, maka $\text{rank}(X)$ sama dengan banyaknya elemen diagonal X yang tidak bernilai nol.

Definisi 2.2.11 *Linear Dependen* Suatu Matriks Jika X adalah matriks berukuran $n \times p$ dengan $p \leq n$, dan $x_1, x_2, \ldots, x_p$ menyatakan p vektor kolom dari matriks X yang masing-masing berdimensi $n \times 1$, maka vektor-vektor $x_1, x_2, \ldots, x_p$ dikatakan bergantung secara linear (*linear dependent*) jika terdapat skalar $a_1, a_2, \ldots, a_p$ yang tidak semuanya nol sedemikian sehingga

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = 0.$$

Sebaliknya, vektor-vektor tersebut dikatakan bebas secara linear (*linear independent*) jika persamaan di atas hanya dipenuhi untuk $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0$.
Jika terdapat tepat $r \leq p$ vektor kolom dari $x_1, x_2, \ldots, x_p$ yang bebas secara linear, sementara setiap vektor kolom lainnya dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari r vektor bebas linear tersebut, maka *rank* dari matriks X didefinisikan sebagai r dan dinotasikan dengan $\text{rank}(X) = r$ (Usman & Warsono, 2009).
Contoh misalkan diberikan matriks

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dengan vektor-vektor kolom

$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa terdapat skalar $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, dan $a_3 = -1$ yang tidak semuanya nol sehingga

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 1 \cdot x_1 - 1x_2 - 1x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, vektor-vektor kolom x_1, x_2, x_3 bergantung secara linear (*linear dependent*).

Definisi 2.2.12 ***Generalized inverse*** Jika matriks X berukuran $m \times n$ dan jika X^- ada dan memenuhi empat syarat berikut maka X^- dikatakan ***Generalized inverse*** X.

1. XX^- simetrik;
2. X^-X simetrik;
3. $XX^-X = X$; dan
4. $X^-XX^- = X^-$.

Jelas bahwa jika X *nonsingular* maka X^{-1} memenuhi keempat syarat tersebut (Usman & Warsono, 2009).
Sebagai contoh ambil matriks bujur sangkar *nonsingular*, misalnya

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matriks ini invertibel, sehingga inversnya adalah

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Sekarang kita cek empat syarat *generalized inverse*:

1. XX^{-} simetrik

$$XX^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I,$$

   jelas simetrik.

2. $X^{-}X$ simetrik

$$X^{-1}X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I,$$

   juga simetrik.

3. $XX^{-}X = X$

$$XX^{-1}X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = X$$

4. $X^{-}XX^{-} = X^{-}$

$$X^{-1}XX^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = X^{-1}.$$

2.3 Model Linear Umum

Model linear umum adalah sebagai berikut

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{2.2}$$

Dengan Y adalah $n \times 1$ vektor peubah acak yang teramati, X adalah $n \times p$ matrik $(n > p)$ dengan unsur-unsurnya adalah bilangan tertentu yang diketahui, β adalah $p \times 1$ vektor parameter yang tidak diketahui nilainya, ε adalah $n \times 1$ vektor variabel acak yang tidak teramati, dengan $E(\varepsilon) = 0$ dan $Cov(\varepsilon) = \sum$.

Jika rank dari matriks X sama dengan jumlah kolomnya model dinamakan model berperingkat penuh (*full rank model*) dan jika peringkat matriksnya tidak penuh maka modelnya dinamakan model berperingkat tidak penuh (*non-full rank model*) (Usman & Warsono, 2009).

Model pada 2.1 dapat dinyatakan dalam representasi matriks model linear umum sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} y_{11c} \\ y_{12c} \\ \vdots \\ y_{1bc} \\ y_{21c} \\ \vdots \\ y_{abc} \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times p} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_a \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_b \end{bmatrix}_{p\times 1} + \varepsilon_{ijk_{n\times 1}}$$

2.4 Estimabilitas Fungsi Parameter dalam Model Linier Umum

Dalam kerangka model linier umum, $\{y, X\beta\}$, suatu fungsi parameter dikatakan *estimable* apabila fungsi tersebut dapat diestimasi secara tak bias oleh suatu estimator linier berbasis data yang tersedia. Fokus utama adalah pada fungsi linier dari parameter berbentuk $c'\beta$, dengan c merupakan vektor tetap. Fungsi $c'\beta$ disebut *estimable* jika dan hanya jika terdapat estimator linier tak bias untuk fungsi tersebut. Dengan demikian, estimabilitas dipahami sebagai kemungkinan melakukan estimasi tak bias yang bermakna berdasarkan struktur rata-rata model $X\beta$ dan informasi yang terkandung dalam data y.

Secara aljabar matriks, kondisi perlu dan cukup bagi estimabilitas suatu fungsi linier adalah bahwa vektor koefisien c' berada dalam ruang baris matriks desain, yaitu $c' \in \mathcal{M}(X')$. Kondisi ini ekuivalen dengan keberadaan suatu vektor a sedemikian sehingga

$$c' = a'X,$$

yang menjamin bahwa $c'\beta$ dapat dituliskan sebagai nilai harapan dari kombinasi linier pengamatan. Dengan demikian, estimabilitas bergantung sepenuhnya pada struktur ruang vektor yang dibentuk oleh matriks desain, bukan pada distribusi galat atau bentuk kovariansnya (Zimmerman, 2020).

Apabila matriks desain X tidak memiliki rank penuh, maka tidak semua parameter individual dalam β dapat diestimasi secara tak bias, hanya kombinasi linier tertentu yang berada dalam *estimable space* yang dapat diinterpretasikan secara statistik. Ruang semua fungsi *estimable* membentuk ruang vektor linier dengan dimensi sama dengan $\mathrm{rank}(X)$, dan suatu basis dari ruang ini dapat digunakan untuk merepresentasikan seluruh fungsi *estimable*. Hal ini menunjukkan bahwa estimabilitas merupakan konsep struktural yang fundamental dalam teori model linier dan berperan penting dalam penentuan parameter atau fungsi parameter yang memiliki makna inferensial (Harville, 2018).

2.5 Estimasi Parameter pada Model Linear

Pendugaan parameter dalam model linier merupakan proses untuk memperoleh nilai taksiran bagi parameter-parameter model berdasarkan data pengamatan yang tersedia. Pendugaan ini dilakukan dalam kerangka model linier dengan asumsi utama bahwa $E(\varepsilon_i) = 0, \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \delta^2$ bersifat konstan. Metode yang umum digunakan untuk melakukan pendugaan parameter tersebut adalah metode kuadrat terkecil (*least squares method*), yaitu suatu pendekatan yang bertujuan meminimumkan jumlah kuadrat residual antara nilai pengamatan dan nilai respon yang diprediksi oleh model (Myers & Milton, 1991).

Misalkan $Y = X\beta + \varepsilon$ dimana X adalah $n \times p$ matriks. β adalah $p \times 1$ vektor parameter yang tidak diketahui nilainya, dan ε adalah $n \times 1$ random vektor residual dengan rata-rata 0 dan varian $\sigma^2 I$. Penduga parameter β dengan meminimumkan jumlah kuadrat residual adalah sebagai berikut :

jumlah kuadrat galat adalah

$$\varepsilon'\varepsilon = (y - X\beta)'(y - X\beta). \tag{2.3}$$

Penyederhanaannya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\varepsilon'\varepsilon &= (y' - \beta'X')(y - X\beta) \\ &= y'y - y'X\beta - \beta'X'y + \beta'X'X\beta\end{aligned}$$

Karena $y'X\beta$ dan $\beta'X'y$ merupakan skalar dimensi 1×1 yang saling transpose dan bernilai sama, kedua suku tersebut dapat digabungkan menjadi $2\beta'X'y$.

$$\varepsilon'\varepsilon = y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta.$$

Untuk meminimumkan fungsi $\varepsilon'\varepsilon$ terhadap parameter β, dilakukan diferensiasi terhadap β. Turunan yang diperoleh kemudian disetarakan dengan nol, sehingga dihasilkan suatu persamaan yang dikenal sebagai persamaan normal. Dengan menggunakan aturan diferensiasi diperoleh

$$\frac{\partial(\varepsilon'\varepsilon)}{\partial\beta} = -2X'y + (X'X)\beta + (X'X)'\beta = -2X'y + 2(X'X)\beta.$$

Dengan menyetarakan turunan ini sama dengan nol, kita peroleh

$$-2X'y + 2(X'X)\beta = 0.$$

Atau

$$(X'X)\beta = X'y \qquad \text{(Persamaan Normal)} \tag{2.4}$$

Dengan mengalikan kedua ruas persamaan tersebut dengan invers matriks $(X'X)^{-1}$ diperoleh penduga parameter metode kuadrat terkecil, yaitu

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y.$$

Model 2.1 dalam matriks persamaan normal dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} abc & bc & \cdots & bc & ac & \cdots & ac \\ bc & bc & \cdots & 0 & c & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ bc & 0 & \cdots & bc & c & \cdots & c \\ ac & c & \cdots & c & ac & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ac & c & \cdots & c & 0 & \cdots & ac \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} y_{...} \\ y_{1..} \\ \vdots \\ y_{a..} \\ y_{.1.} \\ \vdots \\ y_{.b.} \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa baris dan kolom matriks $X'X$ terpaut linier, sehingga matriks $X'X$ bersifat singular. Kondisi ini dapat diatasi menggunakan *linear side conditions*.

2.6 *Linear Side Conditions*

Dalam model linear $y = X\beta + \varepsilon$, *side conditions* adalah sekumpulan kendala linear yang dikenakan pada parameter β untuk mengatasi masalah ketidakunikan (*non-identifiability*) yang muncul ketika matriks desain X tidak memiliki rank penuh. Pada model *non-full rank*, kolom-kolom X saling bergantung secara linear sehingga parameter β tidak dapat diestimasi secara unik. Secara matematis, ketika $rank(X) = r < p$, sistem persamaan normal yang diberikan pada (2.4) yaitu

$$(X'X)\beta = X'y$$

memiliki tak hingga banyak solusi. Untuk mengatasi hal ini, Seber (2015) dan Rencher & Schaalje (2008) menyatakan bahwa perlu dikenakan *side conditions* berbentuk

$$T\beta = 0 \tag{2.5}$$

di mana T merupakan matriks berukuran $(p - r) \times p$ dengan rank $(p - r)$. *Side conditions* ini berfungsi untuk "melengkapi" kekurangan rank pada X sehingga $\hat{\beta}$ menjadi dapat diidentifikasi secara unik kondisional.

Definisi 2.6.1 Misalkan terdapat vektor a berukuran $n \times 1$ sedemikian sehingga $E(a'y) = c'\beta$ untuk semua β yang memenuhi $T\beta = 0$. Dengan demikian $c'\beta$ disebut fungsi yang dapat diestimasi secara kondisional dan $a'y$ adalah penduga tak-bias kondisional dari $c'\beta$ (Wang & Chow, 2007).

Teorema 2.6.2 Di bawah kendala linear $T\beta = 0$, fungsi linear $c'\beta$ dapat diestimasi secara kondisional jika dan hanya jika

$$c \in \mathcal{M}(X' : T')$$

Bukti. Menurut definisi, di bawah kendala $T\beta = 0$, $c'\beta$ dapat diestimasi secara kondisional jika dan hanya jika terdapat $a'y$ sedemikian sehingga

$$E(a'y) = c'\beta$$

untuk semua β yang memenuhi $T\beta = 0$.
Untuk β yang memenuhi $T\beta = 0$, kita mempunyai

$$a'X\beta - c'\beta = 0,$$

atau secara ekuivalen,

$$(a'X - c') \in \mathcal{M}(T').$$

Pernyataan ini benar jika dan hanya jika terdapat suatu vektor b sehingga

$$c = X'a + T'b.$$

Ini menyelesaikan pembuktian. ■

Berdasarkan Teorema estimabilitas kondisional (Wang & Chow, 2007), suatu fungsi linear parameter $c'\beta$ dapat diestimasi secara kondisional di bawah kendala $T\beta = 0$ jika dan hanya jika vektor c berada dalam ruang kolom gabungan matriks desain dan matriks kendala, yaitu $c \in \mathcal{M}(X' : T')$. Teorema ini menunjukkan bahwa kendala linear berperan melengkapi kekurangan informasi akibat matriks desain yang *non-full rank*, tanpa mengubah makna inferensial model. Suatu kendala linear $T\beta = 0$ disebut *side condition* yang valid apabila memenuhi dua syarat.

1. Kendala tersebut tidak membatasi informasi yang telah terkandung dalam data, yang secara matematis dinyatakan dengan $\mathcal{M}(X') \cap \mathcal{M}(T') = \{0\}$.
2. Kendala tersebut harus cukup untuk menjamin bahwa seluruh fungsi parameter dapat diestimasi secara kondisional, yaitu $\mathcal{M}(X' : T') = R^p$.

Apabila kendala pertama terpenuhi sehingga baris-baris matriks T bebas linear dari baris-baris matriks X, maka ruang baris keduanya tidak saling beririsan. Dengan menetapkan $\text{rank}(T) = (p - r)$ untuk melengkapi kekurangan rank matriks desain X, rank dari matriks gabungan $\begin{bmatrix} X \\ T \end{bmatrix}$ menjadi penjumlahan dari rank masing-masing matriks

$$\text{rank}\begin{bmatrix} X \\ T \end{bmatrix} = \text{rank}(X) + \text{rank}(T).$$

Dengan mensubstitusi rank yang diketahui:

$$\begin{aligned} \text{rank}\begin{bmatrix} X \\ T \end{bmatrix} &= r + (p - r) \\ \text{rank}\begin{bmatrix} X \\ T \end{bmatrix} &= p. \end{aligned} \tag{2.6}$$

sehingga diperoleh $\mathcal{M}(X' : T') = R^p$.

Teorema 2.6.3 (Wang & Chow, 2007) Misalkan S adalah matriks simetri berdimensi $p \times p$ yang bersifat positif semidefinit dan T adalah matriks berukuran $q \times p$ maka invers general dari matriks blok

$$\begin{bmatrix} S & T' \\ T & 0 \end{bmatrix}^{-} = \begin{bmatrix} H^{-} - H^{-}T'Q^{-}TH^{-} & H^{-}T'Q^{-} \\ Q^{-}TH^{-} & Q^{-}Q - Q^{-} \end{bmatrix},$$

di mana $H = S + T'T$ dan $Q = TH^{-}T'$.

Bukti. Diberikan

$$F = \begin{bmatrix} I & T' \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Maka

$$F\begin{bmatrix} S & T' \\ T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S + T'T & T' \\ T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & T' \\ T & 0 \end{bmatrix}.$$

Kemudian,

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -TH^{-} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H & T' \\ T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -H^{-}T' \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & T' - HH^{-}T' \\ T - TH^{-}H & M \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

di mana

$$M = -TH^{-}T' - (T - TH^{-}H)H^{-}T'.$$

Karena $S \geq 0$, maka terdapat sebuah matriks X sedemikian sehingga $S = X'X$. Oleh karena itu,

$$H = X'X + T'T = \begin{bmatrix} X \\ T \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X \\ T \end{bmatrix}.$$

Hal ini membawa ke

$$\mathcal{M}(T') \subset \mathcal{M}(X' \vdots T') = \mathcal{M}(H),$$

yang menyiratkan $T - TH^{-}H = 0$. Dengan memanfaatkan sifat invariansi dari *generalized inverse* dan berdasarkan simetri dari H, diperoleh

$$T' - HH^{-}T' = 0.$$

Oleh karena itu, (2.7) menjadi

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -LT^- & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & L' \\ L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -T^-L' \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & -LT^-L' \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Jika kita mendefinisikan

$$P_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -TH^- & I \end{bmatrix} F,$$

dan

$$P_2 = \begin{bmatrix} I & -H^-T' \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

maka Persamaan (2.8) menjadi

$$P_1 \begin{bmatrix} S & T' \\ T & 0 \end{bmatrix} P_2 = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & -Q \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S' & T' \\ T & 0 \end{bmatrix}^- &= P_2 \begin{bmatrix} H^- & 0 \\ 0 & -Q^- \end{bmatrix} P_1 \\ &= \begin{bmatrix} I & -H^-T' \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^- & 0 \\ 0 & -Q^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & T' \\ -TH^- & I-Q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H^- - H^-T'Q^-TH^- & H^-T'Q^- + H^-T'(I - Q^-Q) \\ Q^-TH^- & Q^-Q - Q^- \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Karena $\mathcal{M}(T') \subset \mathcal{M}(H)$, maka $Q = TH^-T'$ tidak bergantung pada pilihan H^-. Jika kita memilih H^- yang *nonsingular*, maka $\mathcal{M}(T) \subset \mathcal{M}(Q)$. Dengan demikian, kita memperoleh

$$T' = T'Q^-Q. \tag{2.10}$$

Substitusi T' di 2.9 dengan 2.10, maka hasil diperoleh

$$\begin{bmatrix} S & T' \\ T & 0 \end{bmatrix}^- = \begin{bmatrix} H^- - H^-T'Q^-TH^- & H^-T'Q^- \\ Q^-TH^- & Q^-Q - Q^- \end{bmatrix}$$

■

Korolari 2.6.4 Misalkan $S = X'X \geq 0$ berdimensi $p \times p$, $\mathcal{M}(X') \cap \mathcal{M}(T') = \{0\}$, $\text{rank}(X) + \text{rank}(T) = p$, dan $\text{rank}(T_{q \times p}) = q$ dengan $q = p - r$. Maka:

1. $H = X'X + T'T$ dan $\begin{bmatrix} X'X & T' \\ T & 0 \end{bmatrix}^{-1}$ adalah matriks *nonsingular*.

2. $$\begin{bmatrix} X'X & T' \\ T & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} H^{-1}X'XH^{-1} & H^{-1}T' \\ TH^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Bukti.

1. Di bawah asumsi $\mathcal{M}(X') \cap \mathcal{M}(T') = \{0\}$, diperoleh

$$\begin{aligned} \text{rank}(H) &= \text{rank}(X) + \text{rank}(T) \\ &= r + (p - r) \\ &= p. \end{aligned}$$

Dengan demikian matriks H adalah *nonsingular*.

Selanjutnya, berdasarkan asumsi tersebut:

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} X'X & T' \\ T & 0 \end{bmatrix} &= \text{rank} \begin{bmatrix} X'X \\ T \end{bmatrix} + \text{rank} \begin{bmatrix} T' \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{rank}(X'X) + \text{rank}(T) + \text{rank}(T') \\ &= p + q. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Sehingga bagian (1) terbukti: matriks tersebut *nonsingular*.

2. Di bawah asumsi $M(X') \cap M(T') = \{0\}$ dapat ditunjukkan bahwa

$$Q = TH^{-1}T' = T'(X'X + T'T)^{-1}T = T(T'T)^{-1}T'.$$

Hal ini diperoleh dengan mempertimbangkan ruang baris R^p yang dibentang oleh baris-baris independen dari X dan T. Karena $Q^2 = Q$, maka setiap nilai eigen dari matriks Q berukuran $q \times q$ bernilai 0 atau 1.

Namun, karena

$$\text{rank}(Q) = \text{rank}(T) = q,$$

maka Q bersifat *nonsingular* sehingga inversnya ada. Dengan demikian semua nilai eigen dari Q bernilai 1. Selain itu, karena Q adalah matriks simetri, diperoleh $Q = I_q$.

Dengan mengombinasikan $Q = I_q$ dengan Teorema 2.6.3, maka pernyataan pada bagian (2) korolari terbukti.

2.7 Kuasa Uji

Pengujian hipotesis pada model linear dilakukan menggunakan uji F, yang digunakan untuk menguji apakah sekumpulan parameter dalam model secara simultan berpengaruh signifikan terhadap variabel respon. Secara umum, hipotesis yang diuji dirumuskan sebagai berikut:

$$H_0 : G\beta = g, \qquad H_a : G\beta \neq g,$$

dengan G adalah matriks berukuran $q \times p$ dan berperingkat q, β adalah vektor parameter berukuran $p \times 1$, dan w adalah vektor berukuran $q \times 1$ (Usman & Warsono, 2009). Kriteria pengujian adalah:

$$\text{Tolak } H_0 \quad \text{jika} \quad F_{\text{calc}} > F_\alpha.$$

Pada proses pengujian hipotesis terdapat dua jenis kesalahan, sebagaimana ditunjukkan pada Tabel 2.2

Tabel 2.2 Dua tipe kesalahan tolak H_0

	Hipotesis benar	**Hipotesis salah**
Tidak tolak H_0	Keputusan benar $(1-\alpha)$	Kesalahan tipe II (β)
Tolak H_0	Kesalahan tipe I (α)	Keputusan benar $(1-\beta)$

Kesalahan tipe I yaitu a merupakan peluang menolak H_0 padahal H_0 benar. Sedangkan kesalahan tipe II adalah β, yaitu peluang tidak tolak H_0 dimana H_0 salah. Pada kuasa uji, statistik uji akan jatuh pada wilayah penolakan H_0 ketika H_0 salah. Dengan demikian kuasa uji $= 1 - \beta$ (Walpole, 1992).

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Waktu penelitian dilaksanakan pada semester Ganjil tahun ajaran 2025/2026.

3.2 Data Simulasi

Data yang digunakan adalah data yang dibangkitkan melalui *software* SAS 9.4. Adapun data yang dibangkitkan adalah $Y\ \ N(\mu, \sigma^2)$, dengan desain simulasi mencakup dua faktor, yaitu A dengan 4 level dan B dengan 3 level, masing-masing diulang sebanyak 3 kali, sehingga menghasilkan 36 observasi.

3.3 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian yang dilakukan pada penelitian ini meliputi studi pustaka dan peninjauan literatur mengenai penerapan *linear constraints side conditions* pada *non-full rank linear model*. Adapun langkah-langkah yang ditempuh adalah sebagai berikut:

1. **Studi Pustaka**
   Mengkaji pendugaan parameter β dan sifat-sifat estimasinya pada model linear *non-full rank* dengan menggunakan *linear side conditions* melalui kajian pustaka.

2. **Simulasi Tahap 1: Evaluasi Ketakbiasan Penduga Parameter**
   Melakukan simulasi data sejumlah 36 observasi menggunakan perangkat lunak SAS 9.4. Adapun langkah-langkah yang dilakukan adalah:

(a) Membentuk matriks desain X dengan men-*generate* x_1 sampai x_8 yang mencakup dua faktor, yaitu faktor A dengan 4 level dan faktor B dengan 3 level, masing-masing diulang sebanyak 3 kali.

(b) Membangkitkan data respon $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(c) Mencari $\hat{\beta}$ dengan menerapkan *linear side conditions* dan mengevaluasi hasil pendugaan.

(d) Mengevaluasi sifat ketakbiasan dari hasil pendugaan parameter tersebut.

3. **Simulasi Tahap 2: Pengujian Hipotesis dan Evaluasi Kuasa Uji**
Tahap ini secara khusus mengevaluasi kuasa uji (*power of the test*) dari pengujian hipotesis berikut:

$$H_0 : G\beta = g, \qquad H_a : G\beta \neq g$$

Adapun langkah-langkah simulasi Monte Carlo yang dilakukan meliputi:

(a) Menetapkan skenario simulasi yang terdiri dari 20 variasi nilai vektor β dan 4 variasi ragam galat (σ^2).

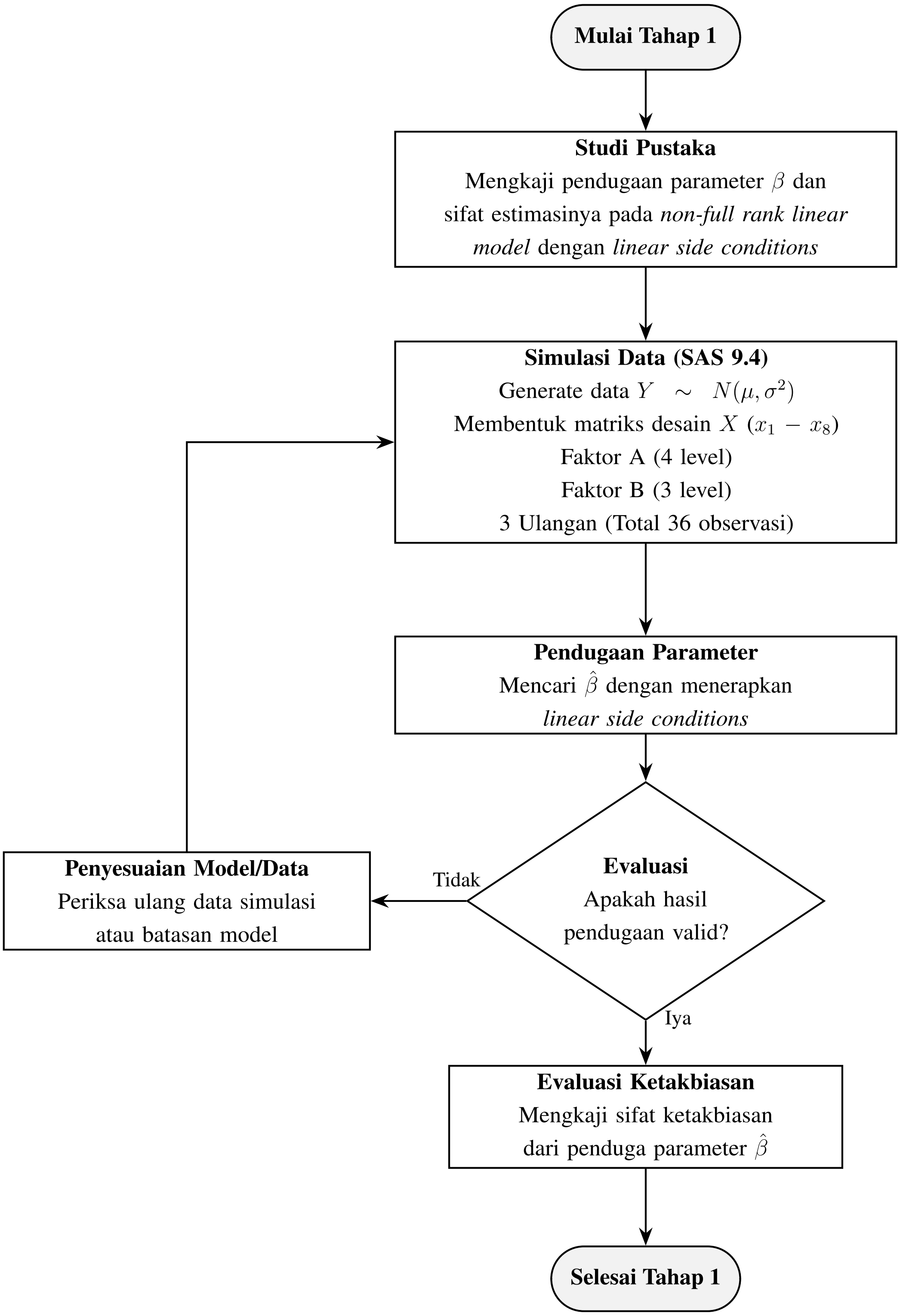
(b) Membentuk matriks desain X dengan faktor A (4 level) dan faktor B (3 level), dengan ulangan sebanyak 7 kali (total 84 observasi).

(c) Melakukan simulasi Monte Carlo sebanyak 1000 ulangan untuk setiap skenario guna menghitung nilai statistik uji F.

(d) Menghitung nilai Kuasa Uji berdasarkan proporsi penolakan H_0 dari 1000 ulangan tersebut.

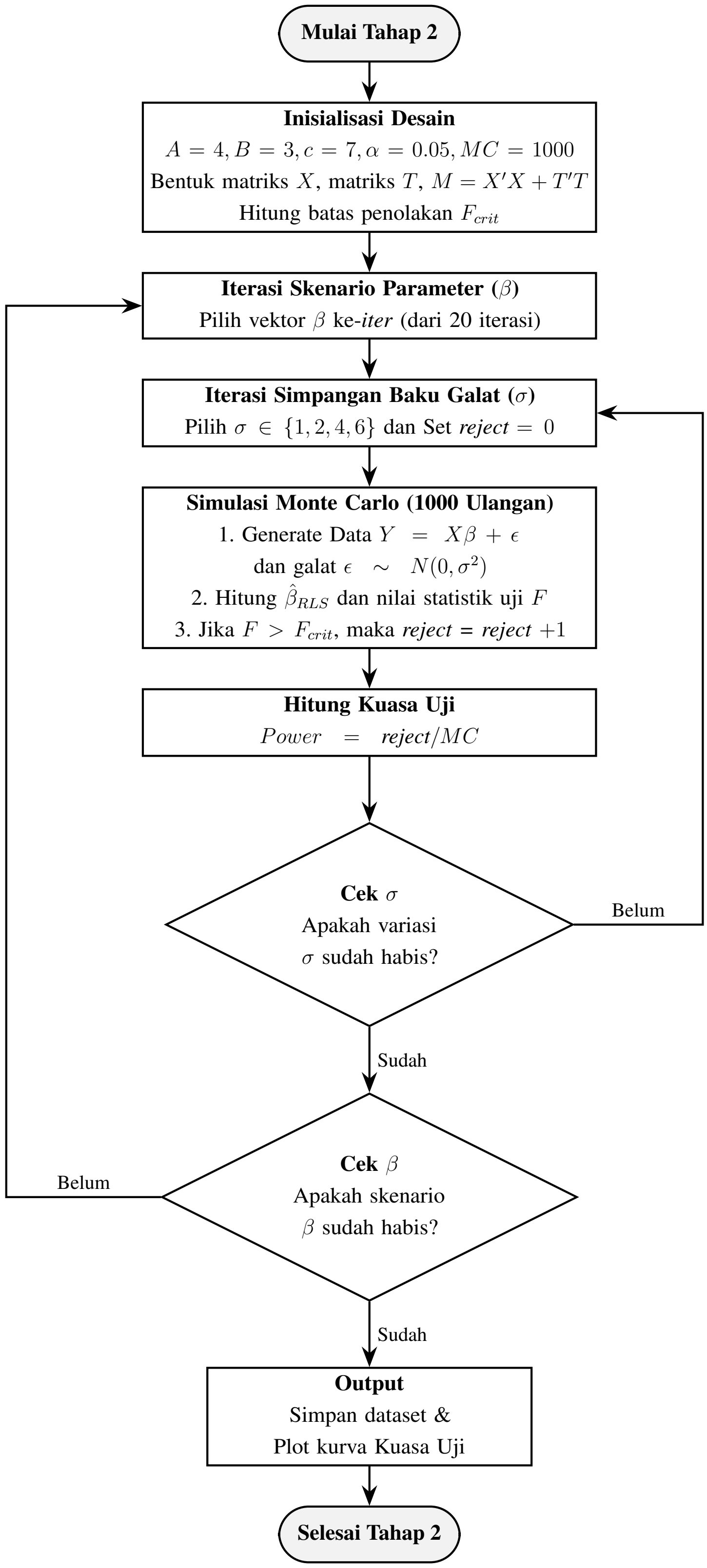
3.4 *Flowchart Simulasi*

(a) Simulasi Tahap 1



Gambar 3.1 Diagram Alir Simulasi Tahap 1

(b) Simulasi Tahap 2



Gambar 3.2 Flowchart Algoritma Simulasi Monte Carlo Tahap 2

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa:

1. Penerapan *side conditions* mampu mengatasi masalah *non-full rank* dengan membatasi ruang parameter sehingga parameter model dapat diperoleh secara unik tanpa mengubah struktur ruang kolom matriks rancangan.
2. Hasil simulasi menunjukkan bahwa penerapan *side conditions* $T\beta = 0$ berhasil menghasilkan penduga parameter yang stabil dan hampir tidak bias serta memberikan kinerja pengujian yang baik, di mana kuasa uji meningkat ketika perbedaan parameter semakin besar dan menurun seiring meningkatnya varians galat.

5.2 Saran

Pengembangan penelitian berikutnya dapat diarahkan pada implementasi *side conditions* pada model linear yang lebih kompleks, seperti dalam menangani masalah keteridentifikasian pada desain tak seimbang (*unbalanced design*).

DAFTAR PUSTAKA

Clarke, B. R. (2008). *Linear Models: The Theory and Application of Analysis of Variance*. Hoboken: John Wiley & Sons.

Darghan, A., Surendra, S., & Monroy, J. (2014). A score test for the agronomical overlap effect in a two-way classification model. *Agronomía Colombiana*, **32**(3), 417–422.

Harville, D. A. (2008). *Matrix Algebra: From a Statistician's Perspective*. New York: Springer.

Harville, D. A. (2018). *Linear Models and the Relevant Distributions and Matrix Algebra*. CRC Press.

Hector, A., von Felten, S., & Schmid, B. (2010). Analysis of variance with unbalanced data: an update for ecology & evolution. *Journal of Animal Ecology*, **79**(2), 308–316.

Hirschberg, J. G., & Slottje, D. J. (1999). *The Reparameterization of Linear Models Subject to Exact Linear Restrictions*. Department of Economics, University of Melbourne & Southern Methodist University.

John, J. A. (1970). Use of Generalized Inverse Matrices in MANOVA. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, **32**(1), 137–143.

Little, M. P., Heidenreich, W. F., & Li, G. (2010). Parameter Identifiability and Redundancy: Theoretical Considerations. *PLoS ONE*, **5**(1), 1–6.

Milliken, G. A., & Johnson, D. E. (2009). *Analysis of Messy Data, Volume 1: Designed Experiments*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.

Montgomery, D. C. (2013). *Design and Analysis of Experiments* (8th ed.). Hoboken: John Wiley & Sons.

Murray-Lasso, M. A. (2008). Alternative Methods of Calculation of the Pseudo Inverse of a Non Full-Rank Matrix. *Journal of Applied Research and Technology*, **6**(3), 170–183.

Myers, R. H., & Milton, J. S. (1991). *A First Course in the Theory of Linear Statistical Models*. New York: John Wiley & Sons.

Nelder, J. A. (1994). The statistics of linear models: back to basics. *Statistics and Computing*, **4**, 221–234.

Plackett, R. L. (1950). Some Theorems in Least Squares. *Biometrika*, **37**(1/2), 149–157.

Rencher, A. C., & Schaalje, G. B. (2008). *Linear Models in Statistics* (2nd ed.). Hoboken: John Wiley & Sons.

Seber, G. A. (2015). *The Linear Model and Hypothesis: A General Unifying Theory*. Cham: Springer International Publishing.

Seegrist, D. W. (1973). Least Squares Analysis of Experimental Design Models by Augmenting the Data with Side Conditions. *Technometrics*, **15**(3), 643–645.

Usman, M., & Warsono. (2009). *Teori Model Linear dan Aplikasinya*. Bandung: Sinar Baru Algesindo.

Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., & Ye, K. (2012). *Probability & Statistics for Engineers & Scientists*. 9th Edition. Boston: Pearson Education.

Wang, S. G., & Chow, S. C. (2007). *Advanced Linear Models: Theory and Applications*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.

Zimmerman, D. L. (2020). *Linear Model Theory: With Examples and Exercises*. Springer Nature.