PENERAPAN METODE REPARAMETERISASI DALAM MENGATASI MATRIKS *NON FULL RANK* PADA RANCANGAN *NESTED* DUA FAKTOR

(Skripsi)

Oleh

EJIA KHINARA
NPM. 2217031072

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

ABSTRACT

APPLICATION OF THE REPARAMETERIZATION METHOD IN RESOLVING NON-FULL RANK MATRICES IN TWO-FACTOR NESTED DESIGNS

By

Ejia Khinara

The matrix **X** in experimental design models is sometimes found to be non-full-rank, which causes parameter estimates to be non-unique. One example of this occurs in two-factor nested designs. This study aims to transform such a design model into a full-rank model and to evaluate the unbiasedness of its estimators theoretically using the Gauss-Markov theorem and empirically through simulation using SAS software. The method used is the reparameterization method, which works by redefining the model's parameters by combining them into a single parameter to obtain a new matrix that is full-rank. The results of the study show that this method is capable of transforming a two-factor nested design model that is not full rank into a full rank model. The resulting estimator is unbiased and has minimum variance.

Keywords: Reparameterization, full rank, estimable, unbiased, estimated value.

ABSTRAK

PENERAPAN METODE REPARAMETERISASI DALAM MENGATASI MATRIKS *NON FULL RANK* PADA RANCANGAN *NESTED* DUA FAKTOR

Oleh

Ejia Khinara

Matriks **X** pada model rancangan eksperimental terkadang dijumpai tidak berperingkat penuh yang menyebabkan estimasi parameternya menjadi tidak unik. Salah satu contohnya terjadi pada rancangan tersarang (*nested*) dua faktor. Penelitian ini bertujuan membuat model rancangan tersebut menjadi model *full rank* dan mengevaluasi ketakbiasan estimatornya secara teoritis menggunakan teorema *Gauss-Markov* dan empiris melalui simulasi dengan *software* SAS. Metode yang digunakan adalah metode reparameterisasi. Cara kerjanya adalah mendefinisikan kembali parameter-parameter model dengan menggabungkan parameter menjadi satu sehingga diperoleh matriks baru yang memiliki peringkat penuh. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode ini mampu membuat model rancangan tersarang (*nested*) dua faktor yang tidak *full rank* menjadi model *full rank*. Estimator yang dihasilkan memiliki sifat tak bias dan varians minimum.

Keywords: Reparameterisasi, *full rank*, *estimable,* tak bias, nilai dugaan.

PENERAPAN METODE REPARAMETERISASI
DALAM MENGATASI MATRIKS *NON FULL RANK*
PADA RANCANGAN *NESTED* DUA FAKTOR

EJIA KHINARA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

Judul Skripsi	:	**PENERAPAN METODE REPARAMETERISASI DALAM MENGATASI MATRIKS *NON FULL RANK* PADA RANCANGAN *NESTED* DUA FAKTOR**
Nama Mahasiswa	:	Ejia Khinara
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031072**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.	**Widiarti, S.Si., M.Si.**
NIP. 195701011984031020	NIP. 198005022005012003

2. Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama,
FMIPA Universitas Lampung

Mulyono, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP. 197406112000031002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	:	**Prof. Dr. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.** ....
Sekretaris	:	**Widiarti, S.Si., M.Si.** ....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Edwin Russel, S.E., M.Sc.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **29 April 2026**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Ejia Khinara**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031072**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**PENERAPAN METODE REPARAMETERISASI DALAM MENGATASI MATRIKS *NON FULL RANK* PADA RANCANGAN *NESTED* DUA FAKTOR**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 29 April 2026

Penulis

Ejia Khinara

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Ejia Khinara dilahirkan di Tulang Bawang pada 29 April 2004. Penulis merupakan anak kedua dari empat bersaudara, putri satu-satunya dari pasangan Bapak Ruslan dan Ibu Susanti.

Penulis memulai pendidikan formal di TK Dharma Wanita Bumi Dipasena Mulia pada tahun 2007 dan menyelesaikannya pada tahun 2009. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di SD Negeri 12 Tegineneng pada tahun 2010 sampai dengan 2016. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 3 Metro pada tahun 2016 sampai dengan tahun 2019, dan menyelesaikan pendidikan di SMA Negeri 3 Metro pada tahun 2022.

Pada bulan Agustus tahun 2022, penulis melanjutkan pendidikannya di program studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN). Pada akhir tahun 2024, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Pusat Statistik Kota Metro selama 40 hari sampai dengan Januari 2025. Selain itu, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Kelurahan Sukabumi, Kecamatan Sukabumi, Kota Bandar Lampung, Provinsi Lampung.

KATA INSPIRASI

”...dan aku akan berdoa kepada Tuhanku, semoga aku tidak kecewa dengan doaku kepada Tuhanku”

(QS. Maryam: 48)

”Manusia tidak akan memperoleh selain dari apa yang diusahakannya. Usaha itu akan diperlihatkan, lalu dibalas dengan balasan yang sempurna”

(QS. An-Najm: 39-41)

”Apabila yang di depan membuatmu takut, dan yang di belakang membuatmu luka maka lihatlah ke atas, sungguh Allah tidak pernah gagal menolongmu”

– Anonim –

”Aku membahayakan nyawa ibu untuk lahir ke dunia maka tidak mungkin aku tidak ada artinya. Begitu pula aku membuat bapak bekerja setiap hari hingga lelah sehingga aku pastikan bahwa lelahnya tidak sia-sia ”

– Anonim –

PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahim
Dengan mengucapkan puji syukur kepada Allah SWT, penulis mempersembahkan karya sederhana ini kepada:

Bapak, Ibu, dan Keluarga Tercinta

Terima kasih kepada orang tua, kakak, mbak, dan adik-adik atas doa yang tak pernah putus, kasih sayang, nasihat, motivasi juga ridho serta dukungannya selama ini. Tiap tetes keringat dan lantunan doa dalam solat menjadi sumber kekuatan bagi penulis hingga dapat menyelesaikan pendidikan dan meraih gelar sarjana.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Yang sudah memberikan bimbingan, bantuan, dan motivasi yang sangat berharga juga ilmu yang tidak ternilai harganya.

Sahabat-sahabatku

Yang selalu menemani juga memberikan pengalaman, semangat, motivasi, serta doa-doa dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Penerapan Metode Reparameterisasi dalam Mengatasi Matriks *Non Full Rank* pada Rancangan *Nested* Dua Faktor” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis menyadari bahwa keberhasilan tidak terlepas dari bantuan, dukungan, dan bimbingan berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Mustofa Usman, M.A., Ph.D. selaku Pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

2. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Bapak Dr. Edwin Russel, S.E., M.Sc. selaku Penguji yang telah memberikan kritik, saran, dan kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.

4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

5. Ibu Dr. Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing akademik.

6. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Cinta pertama sekaligus pahlawan bagi penulis, Bapak Ruslan, dan pintu surga penulis, Ibu Susanti. Terima kasih atas perjuangan, nasihat, serta kerja keras yang tak pernah berhenti demi masa depan dan pendidikan penulis. Terima kasih atas setiap peluh yang menjadi nafkah, setiap masakan yang tersaji penuh cinta, serta setiap doa yang mengiringi langkah penulis. Kasih sayang dan pengorbanan yang diberikan menjadi penyemangat bagi penulis untuk terus memberikan yang terbaik demi membanggakan Bapak dan Ibu.

8. Kakak Ray, Mba Tiara, Adik Zhio, dan Adik Marchel. Terima kasih atas segala dukungan, perhatian, doa, dan semangat yang senantiasa diberikan.

9. Teman seperjuangan penulis, saudari Apri Puspitasari. Terima kasih karena telah membersamai sejak awal perkuliahan. Saudari Pretty Enjelina Br Pelawi, terima kasih karena telah menemani selama proses penyusunan skripsi. Segala dukungan dan kebaikan kalian sangat berarti bagi penulis dalam menyelesaikan proses ini.

10. Teman-teman penulis, Niluh Cyntia, Khusni, Shintia, Sanditha, dan Agus. Terima kasih atas semangat dan dukungan yang diberikan.

11. Sahabat penulis Anggun Agustina Pratiwi, Devi Fitriana, dan Chika Indah Noan. Meskipun jarak memisahkan, terima kasih atas segala dukungan, nasihat, dan semangat yang diberikan.

12. Para anabul tersayang, Neng, Dhani, Sabtu, Addin, Titin, dan Wiwin. Terima kasih karena senantiasa menemani dan menghibur penulis di berbagai keadaan.

13. Manusia yang tak bisa penulis sebutkan namanya. Terima kasih atas segala pelajaran hidup, nasihat, dan doa baik yang pernah diberikan. Semoga semua kebaikan kembali kepada pemiliknya dalam bentuk yang jauh lebih baik.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 29 April 2026

Ejia Khinara

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Pada penelitian eskperimental, hubungan antar variabel repons Y dan variabel yang memiliki pengaruh terhadap Y yaitu variabel X dapat dinyatakan dalam suatu model statistik yang mengandung parameter-parameter yang tidak diketahui dan suatu komponen galat acak. Apabila parameter-parameter tersebut muncul secara linear di dalam model, maka model tersebut dikatakan model linear (Khuri, 2010).

Dalam model linear umum $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ jika matriks $\mathbf{X}$ memiliki *rank* sejumlah kolomnya (*full column rank*) maka estimasi parameternya unik dan tak bias serta dikatakan memiliki sifat estimasi linear tak bias terbaik *Best Linear Unbiased Estimation*/BLUE. Akan tetapi, bila matriks $\mathbf{X}$ tidak memiliki *rank* sejumlah kolomnya (*not full column rank*) maka $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ singular (Daoud *et al*., 2006). Hal ini mengakibatkan estimasi parameter dari sistem persamaan normal memiliki banyak solusi dan menjadi tidak unik dikarenakan matriks tersebut tidak memiliki invers (Rencher & Schaalje, 2008). Menurut Harville (2018) pada model *not full rank* tidak semua parameternya bersifat *estimable* secara individual. Dalam konteks analisis ragam, kondisi ini mengakibatkan hanya paramater tertentu yaitu parameter *estimable* yang dapat diuji (Myers & Milton, 1991).

Model rancangan pada penelitian eskperimental merupakan bentuk khusus dari model linear umum. Matriks $\mathbf{X}$ yang terbentuk hanya terdiri dari angka 0 dan 1 serta memiliki pola tertentu bergantung rancangannya. Matriks $\mathbf{X}$ juga terkadang dijumpai tidak berperingkat penuh karena model sering kali dituliskan dengan jumlah parameter yang lebih banyak daripada yang dapat diestimasi. Keadaan ini menyebabkan estimasi parameter $\boldsymbol{\beta}$ menjadi tidak unik (Usman *et al*., 2016; Rencher & Schaalje, 2008; Graybill, 1976).

Ada beberapa metode yang dapat digunakan agar matriks $\mathbf{X}$ memiliki peringkat penuh yaitu metode mean model, metode model reduksi dan metode reparameterisasi (Usman *et al*., 2016). Pada metode reparameterisasi, cara kerjanya adalah mendefinisikan ulang parameter-parameter model dengan menggabungkan parameter menjadi satu sehingga diperoleh matriks baru yang memiliki peringkat penuh. Dengan demikian, persamaan normal dapat diselsaikan secara unik untuk memperkirakan parameter model baru (Myers & Milton, 1991).

Salah satu rancangan yang digunakan di penelitian eskperimental adalah rancangan tersarang (*nested*). Misalkan terdapat faktor B yang memiliki beberapa level, di mana level-level tersebut serupa tetapi hanya berlaku dalam faktor A tertentu atau dengan kata lain faktor B bersarang di bawah faktor A. Rancangan ini disebut rancangan tersarang (*nested*) dua faktor (Montgomery, 2013). Rancangan tersarang pada umumnya digunakan untuk menganalisis data survei, guna mengungkap variasi pada variabel yang dikumpulkan tanpa perlakuan. Contohnya penelitian mengenai distribusi kelimpahan fitoplankton yang ada di sungai musi (Hidayat dkk., 2018). Kemudian, rancangan tersarang juga digunakan pada bidang pertanian seperti penelitian mengenai pengaruh masa dan suhu simpan pada benih kedelai yang dilakukan oleh Perdana dkk., 2023, pada bidang teknologi pangan seperti penelitian mengenai pemanfaatan sumber nitrogen organik dalam pembuatan *nata de coco* yang dilakukan oleh Santosa dkk., 2021 dan bidang lainnya.

Pada rancangan tersarang (*nested*) harus ada setidaknya minimal dua faktor yang mempengaruhi (Nugroho, 2008). Struktur hierarkis yang terbentuk pada rancangan ini, di mana faktor yang satu tersarang di dalam faktor lainnya menyebabkan ketergantungan linear antar kolom pada matriks desain $\mathbf{X}$. Ketergantungan linear ini mengindikasikan bahwa tidak semua kolom dari matriks desain bersifat bebas linear. Secara matematis kondisi tersebut mengakibatkan matriks desain tidak berperingkat penuh (*not full column rank*) sehingga model rancangan tersarang termasuk model yang tidak berperingkat penuh. Ketidakberperingkatan penuh ini menyebabkan matriks $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ singular dan persamaan normal tidak dapat digunakan untuk mengestimasi parameter model secara unik juga hanya parameter tertentu yang dapat diuji (Khuri, 2010). Oleh karena itu, diperlukan suatu metode yang dapat mengubah model menjadi berperingkat penuh agar parameter dapat diestimasi dengan tepat.

Penelitian mengenai penanganan matriks tidak berperingkat penuh pada rancangan tersarang (*nested*) telah dilakukan oleh Usman *et al.*, 2016 menggunakan metode reduksi, sedangkan penelitian menggunakan metode reparameterisasi telah dilakukan oleh Saleem & Jaber, 2022 pada rancangan acak lengkap faktorial. Belum banyak penelitian mengenai penerapan metode reparameterisasi pada rancangan tersarang (*nested*). Oleh karena itu, peneliti tertarik untuk mengkaji penanganan matriks tidak berperingkat penuh pada rancangan tersarang (*nested*) dua faktor menggunakan metode reparameterisasi. Metode reparameterisasi dipilih karena metode ini dapat mengubah struktur matriks **X** yang tidak berperingkat penuh menjadi matriks baru yang berperingkat penuh tanpa menghilangkan informasi statistik asli dari model awal sehingga pada model hasil reparameterisasi estimator parameter dari persamaan normal yang dihasilkan bersifat unik dan tak bias, sama seperti model aslinya (Graybill, 1976).

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Membuat model rancangan tersarang (*nested*) dua faktor menjadi model yang berperingkat penuh menggunakan metode reparameterisasi.
2. Mengevaluasi sifat ketakbiasan dari estimator parameter hasil reparameterisasi secara teoritis menggunakan teorema *Gauss-Markov* dan secara empiris melalui simulasi dengan *software* SAS.

1.3 Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Sebagai pengetahuan dan wawasan mengenai penerapan metode reparameterisasi pada rancangan tersarang (*nested*) dua faktor.
2. Dapat digunakan sebagai referensi bagi penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Matriks

Menurut Usman & Warsono (2009) sebuah matriks dinotasikan dengan huruf besar dan dicetak tebal contohnya **L**,**X**,**U**,..., dan lainnya. Matriks dapat diartikan sebagai susunan angka-angka dalam bentuk empat persegi panjang yang anggota-anggotanya merupakan skalar. Misalkan matriks **X**, ukuran dari matriks tersebut adalah $n \times p$ di mana n menyatakan banyaknya baris dan p menyatakan banyaknya kolom. Kemudian, suatu matriks **X** mempunyai unsur yang dinotasikan x_{ij} dengan i menyatakan banyaknya baris dan j menyatakan banyaknya kolom. Unsur suatu matriks **X** juga dapat dilambangkan dengan:

$$\mathbf{X} = [x_{ij}] \tag{2.1}$$

Beberapa konsep mengenai matriks adalah sebagai berikut:

1. Matriks identitas, matriks satuan, dan matriks nol
   Suatu matriks yang anggota-anggotanya bernilai 1 pada diagonal utama dan 0 selainnya disebut matriks identitas berukuran $n \times n$ yang dinotasikan dengan $\mathbf{I}_n$. Matriks satuan adalah matriks yang seluruh elemennya bernilai 1. Untuk matriks satuan berukuran $n \times n$ dinotasikan dengan $\mathbf{J}_n$. Sementara itu, matriks yang seluruh elemennya bernilai 0 disebut matriks nol berukuran $m \times n$ yang dinotasikan dengan $\mathbf{0}_{m\times n}$.

2. *Rank* matriks
   Sebelum membahas definisi *rank* matriks, terlebih dahulu akan dibahas konsep *linearly dependent* dan *linearly independent*.

Definisi 2.1

Misalkan $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ adalah himpunan k vektor kolom. Jika terdapat bilangan *real* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ yang tidak semuanya nol sehingga

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k = 0 \tag{2.2}$$

maka vektor-vektor $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ dikatakan bergantung linear (*linearly dependent*). Jika tidak, maka dikatakan bebas linear (*linearly independent*) (Myers & Milton, 1991).

Misalkan **A** adalah matriks berukuran $m \times n$. *Rank* kolom dari **A** adalah jumlah maksimum kolom yang bebas linear dan *rank* baris dari **A** adalah jumlah maksimum baris yang bebas linear. *Rank* dari **A** dilambangkan dengan r(**A**). Jelas bahwa:

$$r(\mathbf{A}) \leq \min(m, n) \tag{2.3}$$

Jika $r(\mathbf{A}) = m$, maka **A** dikatakan memiliki *full row rank*, sedangkan jika $r(\mathbf{A}) = n$, maka **A** dikatakan memiliki *full column rank*. Selanjutnya, jika $r(\mathbf{A}) = 0$, maka **A** adalah matriks nol, dan sebaliknya (Magnus & Neudecker, 2007).

Teorema 2.1

(i) Jika matriks **A** dan **B** *conformable* untuk perkalian, maka $r(\mathbf{AB}) \leq r(\mathbf{A})$ dan $r(\mathbf{AB}) \leq r(\mathbf{B})$.

(ii) Untuk setiap matriks A, berlaku $r(\mathbf{A}'\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}\mathbf{A}') = r(\mathbf{A}') = r(\mathbf{A})$.

3. Transpos matriks

   Matriks **A** berukuran $m \times n$ maka transpos dari matriks tersebut dinotasikan dengan $\mathbf{A}'$ yang memiliki ukuran $n \times m$. Matriks $\mathbf{A}'$ dibentuk melalui pertukaran baris dengan kolom.

4. Perkalian matriks

   Misalkan matriks **A** berukuran $m \times n$ yang unsurnya a_{ij} dan matriks **B** berukuran $n \times p$ yang unsurnya b_{jk} dengan $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, p$. Perkalian matriks **A** dan **B** dinotasikan dengan $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ dengan **C** adalah matriks berukuran $m \times p$ yang unsur ke-ik nya adalah:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \tag{2.4}$$

5. Invers matriks
   Matriks $\mathbf{A}$ mempunyai invers yang dinotasikan dengan $\mathbf{A}^{-1}$, jika $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Suatu matriks yang memiliki invers disebut matriks nonsingular sedangkan matriks yang tidak mempunyai invers disebut matriks singular.

2.2 Model Linear Umum

Teori model linear berperan penting dalam pengembangan beberapa bidang statistik seperti analisis regresi, analisis varians, desain eksperimental, analisis multivariat, dan lain-lain (Khuri, 2010).

Definisi 2.2
Misalkan model:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.5}$$

di mana $\mathbf{y}$ adalah vektor peubah acak yang teramati berukuran $n \times 1$, $\mathbf{X}$ adalah matriks berukuran $n \times p$ dengan $n > p$ yang mana unsur-unsurnya merupakan bilangan tertentu yang diketahui, $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor parameter berukuran $p \times 1$ yang nilainya tidak diketahui, $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah vektor peubah acak yang tidak teramati dengan $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ dan $\mathrm{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Sigma}$. Maka model (2.5) dinamakan model linear umum.

Model (2.5) memiliki pengertian khusus tergantung pada distribusi dari $\boldsymbol{\varepsilon}$, struktur kovarians matriks $\boldsymbol{\Sigma}$, dan peringkat struktur dari matriks $\mathbf{X}$. Jika peringkat atau *rank* dari matriks $\mathbf{X}$ sama dengan jumlah kolomnya dinamakan berperingkat penuh dan apabila peringkat matriksnya tidak penuh maka modelnya dinamakan model tidak penuh (*non full rank model*) (Usman *et al*., 2016).

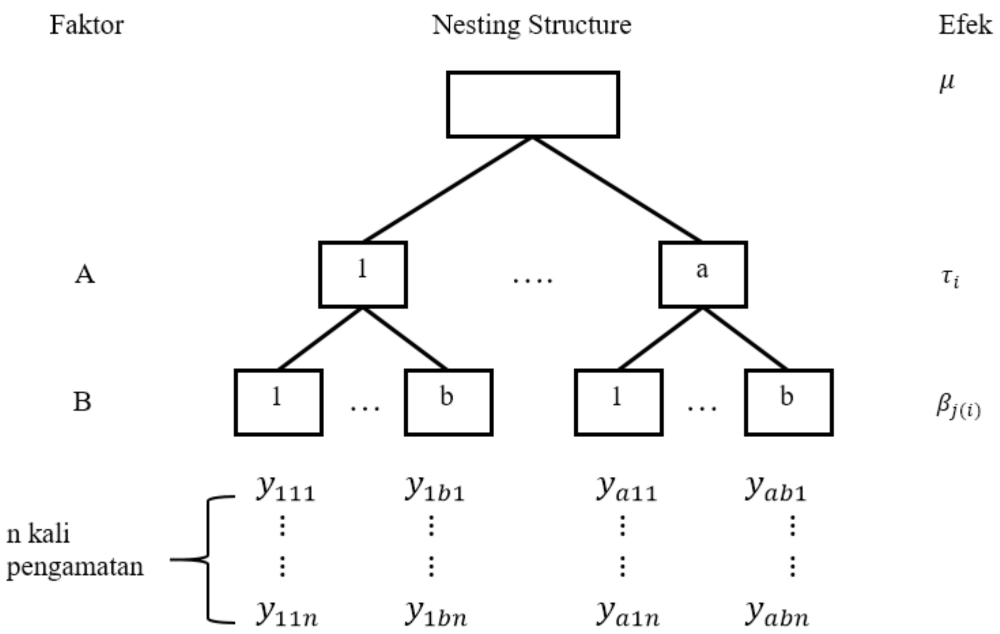
2.3 Rancangan *Nested* Dua Faktor

Rancangan tersarang atau yang bisa disebut *nested design* adalah suatu rancangan yang memiliki sifat dimana suatu faktor tersarang pada faktor lainnya. Rancangan ini memiliki karakteristik yaitu tidak terjadi interaksi antara dua faktor atau lebih (Hidayat dkk., 2018).

Model dari rancangan tersarang dua faktor adalah sebagai berikut (Montgomery, 2013):

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{(ij)k} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \\ k = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{2.6}$$

Di mana y_{ijk} adalah nilai pengamatan dari faktor A ke-i, faktor B ke-j, dan ulangan ke-k, μ adalah nilai tengah keseluruhan, τ_i adalah efek faktor A ke-i, $\beta_{j(i)}$ adalah efek faktor B ke-j pada faktor A ke-i, dan $\varepsilon_{(ij)k}$ adalah galat dari faktor A ke-i, faktor B ke-j, dan ulangan ke-k dengan asumsi $\varepsilon_{(ij)k} \sim$ NIID$(0, \sigma^2 I)$. Struktur model (6) dapat divisualisasikan pada gambar berikut:



Gambar 1. Struktur Rancangan *Nested* Dua Faktor.

Gambar 1 adalah struktur rancangan *nested* 2 faktor dengan faktor utama adalah faktor A sebanyak a level, faktor B yang tersarang pada A sebanyak b level dengan pengulangan sebanyak n kali pengamatan.

2.4 Metode Reparameterisasi

Metode reparameterisasi merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menangani model yang memiliki matriks **X** berperingkat tidak penuh. Suatu vektor parameter baru $\boldsymbol{\alpha}$ didefiniskan sebagai reparameterisasi dari parameter lama $\boldsymbol{\beta}$ jika dan hanya jika tiap $\boldsymbol{\alpha}_i$ *estimable* untuk $i = 1, 2, \ldots, M$. Dengan kata lain, $\boldsymbol{\alpha}$ merupakan himpunan basis dari fungsi *estimable* $\boldsymbol{\beta}$ (Graybill, 1976).

Menurut Rencher & Schaalje (2008) pada reparameterisasi model yang tidak berperingkat penuh yaitu:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.7}$$

Di mana $\mathbf{X}$ berukuran $n \times p$ dengan *rank* $k < p \leq n$, diubah menjadi model yang berperingkat penuh yaitu:

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.8}$$

Di mana $\mathbf{U}$ berukuran $n \times k$ dengan *rank* k dan $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{L}'\boldsymbol{\beta}$ adalah sekumpulan fungsi l*inear independent* yang dapat diestimasi dari $\boldsymbol{\beta}$. Karena $\mathbf{U}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ maka dapat ditulis:

$$\mathbf{U}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{U}\mathbf{L}'\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \tag{2.9}$$

Di mana $\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{L}'$ dan $\mathbf{L}'$ adalah matriks berukuran $k \times p$ dengan *rank* $k < p$ maka $\mathbf{L}'\mathbf{L}$ merupakan matriks nonsingular berdasarkan Teorema 2.1 (ii). Setelah itu, kalikan $\mathbf{U}\mathbf{L}' = \mathbf{X}$ dengan $\mathbf{L}$ untuk memperoleh $\mathbf{U}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{L}'\mathbf{L} &= \mathbf{X}\mathbf{L} \\ \mathbf{U} &= \mathbf{X}\mathbf{L}(\mathbf{L}'\mathbf{L})^{-1} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Matriks $\mathbf{U}$ tidak dapat memiliki *rank* lebih besar dari k, karena $\mathbf{U}$ memiliki k kolom jadi $\operatorname{rank}(\mathbf{U}) = k$ dan model (2.8) memiliki peringkat atau *rank* penuh.

2.5 *Kronecker Product*

Kronecker product digunakan untuk menyederhanakan bentuk matriks.

Definisi 2.3
Jika $\mathbf{A}$ matriks berukuran $r \times s$ dengan a_{ij} adalah unsur ke-ij dengan $i = 1, 2, \ldots, r$ dan $j = 1, 2, \ldots, s$; $\mathbf{B}$ adalah matriks berukuran $t \times v$ maka *kronecker product* dilambangkan dengan $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ adalah matriks berukuran $rt \times sv$ dengan mengalikan setiap unsur a_{ij} dengan keseluruhan matriks $\mathbf{B}$ yaitu:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1s}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2s}B \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1}B & a_{r2}B & \cdots & a_{rs}B \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

(Usman *et al.*, 2016).

2.6 Metode *Least Square*

Metode *Least Square* atau yang bisa disebut metode kuadrat terkecil merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk pendugaan parameter. Pada persamaan (2.5) modelnya dapat diubah menjadi:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \tag{2.12}$$

Selanjutnya, menggunakan metode *Least Square* parameter yang akan diduga adalah $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat residual.

$$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \tag{2.13}$$

Pada metode *Least Square* vektor $\boldsymbol{\varepsilon}$ dari *random error* memiliki mean 0 dan varians $\sigma^2\mathbf{I}$ serta tidak mengasumsikan distribusi apapun (Myers & Milton, 1991).

Teorema 2.2
Misal model $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ di mana $\mathbf{X}$ adalah matriks *full rank* berukuran $n \times (k+1)$, $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor dari parameter yang tidak diketahui berukuran $(k+1) \times 1$, serta $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah *random vector* berukuran $n \times 1$ dengan mean 0 dan varians $\sigma^2\mathbf{I}$. Penduga

Least Square untuk $\boldsymbol{\beta}$ dinotasikan $\mathbf{b}$ adalah (Myers & Milton, 1991):

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \tag{2.14}$$

Teorema 2.3
Misal model $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ di mana $\mathbf{X}$ adalah matriks *full rank* berukuran $n \times (k+1)$, $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor dari parameter yang tidak diketahui berukuran $(k+1) \times 1$, serta $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah *random vector* berukuran $n \times 1$ dengan mean 0 dan varians $\sigma^2\mathbf{I}$. Penduga *Least Square* $\mathbf{b}$ adalah penduga BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*) bagi $\boldsymbol{\beta}$ (Myers & Milton, 1991).

2.7 Eselon Baris Matriks X

Pada model tidak penuh, matriks **X** dapat direduksi ke dalam bentuk eselon baris (bagian atas) untuk menentukan parameter yang *estimable* pada $\boldsymbol{\beta}$. Proses reduksi ini melibatkan serangkaian operasi baris seperti mengurangkan satu baris dengan baris lain, atau mengurangkan kelipatan dari suatu baris terhadap baris lain, atau mengalikan baris dengan konstanta, atau mengalikan baris dengan suatu konstanta, atau bisa juga dengan menukar dua baris. Tujuannya adalah menerapkan operasi baris ini hingga diperoleh submatriks bagian atas berukuran $k \times p$ (k adalah *rank* matriks **X**) yang berada dalam bentuk eselon baris dan baris sisanya nol.

Setiap operasi baris yang dilakukan setara dengan mengalikan matriks **X** dengan matriks berperingkat penuh berukuran $n \times n$. Contohnya, baris kedua matriks **X** diganti dengan selisih antara baris kedua dan pertama setara dengan perkalian matriks **X** oleh matriks **A**, di mana:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Dengan melakukan r kali operasi yang sesuai, bentuk eselon baris dari **X** dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{A}_r\mathbf{A}_{r-1}\cdots\mathbf{A}_1\mathbf{X} = \mathbf{X}^* \tag{2.16}$$

di mana tiap $\mathbf{A}_j$ adalah matriks berperingkat penuh berukuran $n \times n$ dan $\mathbf{X}^*$ berada dalam eselon baris, atau dapat dituliskan menjadi $\mathbf{AX} = \mathbf{X}^*$. Karena $\mathbf{X}^*$ berada dalam eselon baris, maka bagian bawah submatriks $(n-k) \times p$ adalah matriks nol, oleh karena itu bagian yang menarik berada pada baris pertama k dari $\mathbf{X}^*$ dan baris pertama k dari $\mathbf{A}$.

Definisikan $\mathbf{X}_k^*$ adalah baris pertama k dari $\mathbf{X}^*$ dan dapat ditulis menjadi:

$$\mathbf{X}_k^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1^{*\prime} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_k^{*\prime} \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

di mana $\mathbf{x}_i^*$ dengan $i = 1, 2, \ldots, k$ adalah vektor berukuran $p \times 1$. Lalu didefinisikan juga $\mathbf{A}_k$ baris pertama k dari $\mathbf{A}$ yaitu:

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1' \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_k' \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Di mana $\mathbf{a}_i$ dengan $i = 1, 2, \ldots, k$ adalah vektor berukuran $p \times 1$. Berdasarkan Teorema 2.4, tiap $\mathbf{x}_i^{*\prime}\boldsymbol{\beta}$ adalah fungsi *estimable* karena $\mathbf{a}_i'\mathbf{X} = \mathbf{x}_i^{*\prime}$ untuk $i = 1, 2, \ldots, k$ (Elswick *et al.*, 2012).

2.8 Fungsi *Estimable*

Pada model tidak penuh (*non full rank model*), vektor parameter $\boldsymbol{\beta}$ tidak dapat diestimasi secara unik. Oleh karena itu, pada model tidak penuh yang diestimasi adalah fungsi linear dari parameter $\boldsymbol{\beta}$ yaitu $\mathbf{l}'\boldsymbol{\beta}$ (Myers & Milton, 1991). Suatu fungsi linear dari $\mathbf{l}'\boldsymbol{\beta}$ dikatakan *estimable* jika terdapat kombinasi linear dari pengamatan yang nilai harapannya sama dengan $\mathbf{l}'\boldsymbol{\beta}$, yaitu $\mathbf{l}'\boldsymbol{\beta}$ *estimable* jika terdapat vektor $\mathbf{a}$ sehingga $E(\mathbf{a}'\mathbf{y}) = \mathbf{l}'\boldsymbol{\beta}$.

Teorema 2.4

Pada model $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, di mana $E(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ dan $\mathbf{X}$ adalah matriks berukuran $n \times p$ dengan *rank* $k < p \leq n$, fungsi linear $\mathbf{l}'\boldsymbol{\beta}$ *estimable* jika dan hanya jika kondisi berikut terpenuhi:

$\mathbf{l}'$ adalah kombinasi linear dari baris-baris $\mathbf{X}$, yaitu terdapat suatu vektor $\mathbf{a}$ sehingga

$$\mathbf{a}'\mathbf{X} = \mathbf{l}' \tag{2.19}$$

Bukti

Jika terdapat vektor $\mathbf{a}$ sehingga $\mathbf{l}' = \mathbf{a}'\mathbf{X}$ maka, menggunakan vektor $\mathbf{a}$ diperoleh $E(\mathbf{a}'\mathbf{y}) = \mathbf{a}'E(\mathbf{y}) = \mathbf{a}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{l}'\boldsymbol{\beta}$. Sebaliknya, jika $\mathbf{l}'\boldsymbol{\beta}$ *estimable*, maka terdapat vektor $\mathbf{a}$ sehingga $E(\mathbf{a}'\mathbf{y}) = \mathbf{l}'\boldsymbol{\beta}$. Dengan demikian $\mathbf{a}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{l}'\boldsymbol{\beta}$ yang berarti bahwa $\mathbf{a}'\mathbf{X} = \mathbf{l}'$ (Rencher & Schaalje, 2008).

Teorema 2.5

Pada model tidak berperingkat penuh (*non full rank*) $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, banyaknya fungsi *linear independent* yang dapat diestimasi dari $\boldsymbol{\beta}$ adalah sebanyak *rank* dari matriks $\mathbf{X}$.

Bukti

Pertama akan ditunjukkan bahwa paling sedikit K buah vektor berukuran $p \times 1$, yaitu $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_K$, sedemikian sehingga $\mathbf{l}'_k\boldsymbol{\beta}$ adalah fungsi *estimable* untuk setiap $k = 1, 2, \ldots, K$. Kemudian akan ditunjukkan bahwa jika $\mathbf{l}'_m\boldsymbol{\beta}$ fungsi *estimable linear independent* untuk $m = 1, 2, \ldots, M$, maka M tidak boleh lebih besar dari K.

Misalkan baris ke-i dari matriks $\mathbf{X}$ dinotasikan $\mathbf{l}'_i$ karena $E(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ maka $E(y_i) = \mathbf{l}'_i\boldsymbol{\beta}$. Namun, karena matriks $\mathbf{X}$ memiliki *rank* K maka matriks $\mathbf{X}$ memiliki K baris yang bebas linear, atau dapat dikatakan ada K buah $\mathbf{l}'_i\boldsymbol{\beta}$ yang merupakan fungsi *estimable linear independent*. Dengan demikian, terdapat paling sedikit K fungsi *estimable linear independent* yaitu K baris dari $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa tidak mungkin terdapat lebih dari K fungsi e*stimable linear independen*.

Misalkan $\mathbf{l}'_1\boldsymbol{\beta}, \mathbf{l}'_2\boldsymbol{\beta}, \ldots, \mathbf{l}'_M\boldsymbol{\beta}$ adalah sembarang himpunan yang terdiri dari M fungsi *estimable* dengan $M \geq K$. Berdasarkan Teorema 2.4 harus ada suatu vektor konstanta misalnya $\mathbf{a}_m$ sedemikian hingga $\mathbf{X}'\mathbf{a}_m = \mathbf{l}_m$ untuk setiap fungsi $\mathbf{l}'_m\boldsymbol{\beta}$ dengan $m = 1, 2, \ldots, M$. Kemudian, M persamaan ini dapat dituliskan menjadi persamaan matriks yaitu:

$$\mathbf{X}'[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_M] = [\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_M] \tag{2.20}$$

atau

$$\mathbf{X}'\mathbf{A} = \mathbf{L} \tag{2.21}$$

Dengan demikian, *rank* dari matriks **L** harus lebih kecil atau sama dengan *rank* dari $\mathbf{X}'$ yaitu K. Akan tetapi, *rank* dari **L** adalah banyaknya vektor bebas linear dalam himpunan $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_M$. Oleh karena itu, M harus lebih kecil atau sama dengan K (Graybill, 1976).

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data respon simulasi yang dihasilkan dari persamaan model baru hasil reparameterisasi, yaitu model (2.8) dengan ε berdistribusi $N(0, \sigma^2 I)$. Terdapat dua skenario varians galat yang digunakan dalam penelitian ini, yaitu $\sigma_1^2 = 1$ dan $\sigma_2^2 = 9$. Untuk masing-masing skenario, data respon dibangkitkan sebanyak 1000 replikasi melalui *software* SAS.

3.3 Metode Penelitian

Penelitian ini mengkaji mengenai penerapan metode reparameterisasi untuk mengatasi matriks yang tidak *full rank* pada rancangan tersarang (*nested*) 2 faktor. Kajian dalam penelitian ini dilakukan secara dua tahap yaitu kajian teoritis dan kajian empiris. Pada kajian teoritis dilakukan proses mengubah model awal yang sulit diestimasi menjadi model baru yang *full rank* dan dapat diestimasi. Fokus utamanya adalah pembentukan matriks baru melalui fungsi *estimable* serta pembuktian sifat statistik dari penduga yang dihasilkan. Adapun langkah-langkah yang dilakukan pada kajian teoritis secara terperinci adalah sebagai berikut:

a) Transformasi model rancangan tersarang (*nested*) 2 faktor pada persamaan (2.6) ke dalam bentuk model linear umum.
b) Membangun matriks desain $\mathbf{X}$ dan memeriksa *rank* matriks.
c) Jika matriks tidak *full rank* maka dilakukan reparameterisasi dengan tahapan sebagai berikut:
    1. Membangun matriks eselon lalu mengambil baris tak nol dari matriks tersebut dan menamainya sebagai matriks $\mathbf{L}'$.
    2. Mencari kumpulan fungsi *estimable linear independent* $\boldsymbol{\alpha}$ dari matriks $\mathbf{L}'$.
    3. Membangun matriks $\mathbf{X}$ baru atau matriks $\mathbf{U}$ yang *full rank* dengan rumus pada persamaan (2.10) dan memeriksa *rank* matriks.
d) Melakukan pendugaan parameter untuk model baru yang telah *full rank* menggunakan metode *Least Square*.
e) Memeriksa karakteristik penduga BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*) untuk model baru yang telah *full rank* menggunakan teorema *Gauss-Markov*.

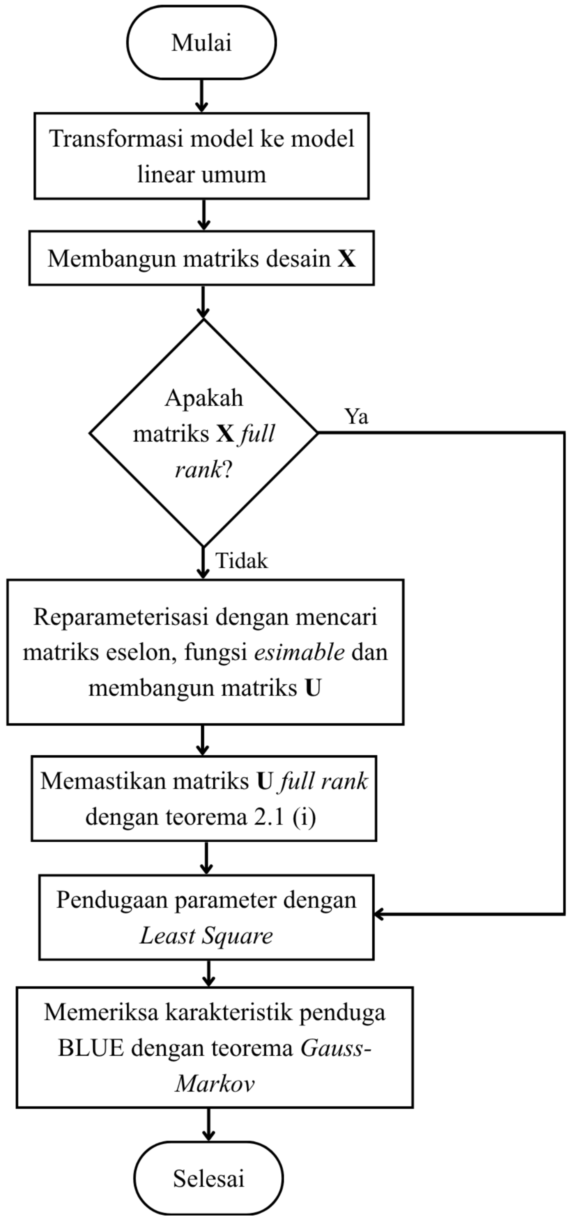
Selanjutnya, kajian empiris dilakukan untuk memvalidasi hasil dari kajian teoritis melalui simulasi. Dengan menggunakan *software* SAS, simulasi dirancang untuk mengamati perilaku penduga dalam beberapa skenario ukuran sampel dan varians galat. Adapun langkah-langkah yang dilakukan pada kajian empiris secara terperinci adalah sebagai berikut:

a) Menentukan struktur rancangan tersarang (*nested*) 2 faktor yaitu, $a = 3$, $b = 4$ dan ulangan $n = 2$, $n = 10$ serta $n = 30$.
b) Membangun matriks $\mathbf{X}$ untuk masing-masing struktur dan memeriksa *rank* matriks.
c) Mencari matriks eselon dari matriks $\mathbf{X}$, lalu mengambil baris tak nol dari matriks tersebut dan menamainya sebagai matriks $\mathbf{L}'$.
d) Membangun matriks $\mathbf{X}$ baru atau matriks $\mathbf{U}$ yang *full rank* dengan rumus pada persamaan (2.6) dan memeriksa *rank* matriks.
e) Menentukan nilai dari parameter $\boldsymbol{\beta}$ yaitu:
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta} = [&\mu, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \beta_{1(1)}, \beta_{2(1)}, \beta_{3(1)}, \beta_{4(1)}, \beta_{1(2)}, \beta_{2(2)}, \beta_{3(2)}, \beta_{4(2)}, \beta_{1(3)}, \beta_{2(3)},\\ &\beta_{3(3)}, \beta_{4(3)}]'\\ = [&3, 3, 2, 1, 2.4, 2.2, 2.0, 1.8, 1.6, 1.4, 1.2, 1.0, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2]'\end{aligned}$$
f) Mencari nilai $\boldsymbol{\alpha}$ sebenarnya menggunakan rumus $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{L}'\boldsymbol{\beta}$.
g) Menetapkan banyaknya ulangan yaitu sebanyak $1000\times$.
h) Menetapkan 2 skenario varians galat yaitu $\sigma_1^2 = 1$ dan $\sigma_2^2 = 9$.

i) Membangkitkan data respon berdasarkan model (2.8) dengan $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 I)$.
j) Menduga parameter $\boldsymbol{\alpha}$ menggunakan metode *Least Square* untuk setiap ulangan.
k) Menghitung rata-rata nilai dugaan yang diperoleh dari $1000\times$ ulangan.
l) Memvisualisasikan hasil simulasi.

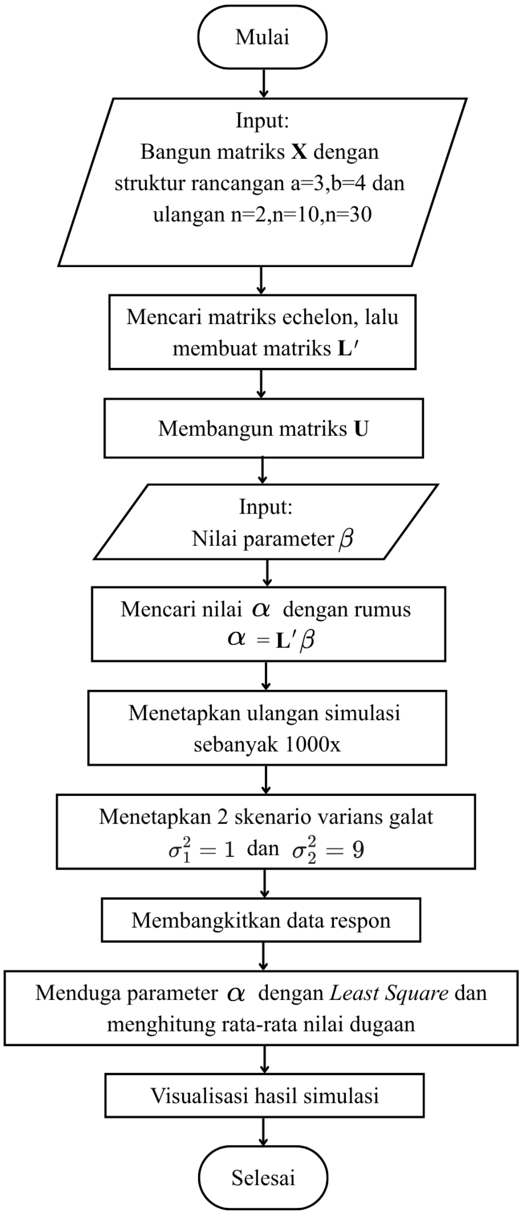
3.4 *Flowchart* Tahapan Penelitian

Flowchart atau diagram alir merupakan bagian dari aliran yang menunjukkan tindakan atau prosedur yang terjadi dalam suatu sistem. Tujuan dari *flowchart* ini adalah untuk menjelaskan bagaimana suatu sistem berpindah dari komponen yang satu ke komponen lainnya (Asmara dkk., 2024). Pada penelitian ini, *flowchart* disusun untuk menggambarkan tahapan-tahapan metode reparameterisasi untuk rancangan tersarang (*nested*) 2 faktor. *Flowchart* ditampilkan menjadi 2 gambar yang mewakili tahapan penelitian secara teoritis dan empiris. Adapun *flowchart* tahapan penelitian secara teoritis ditampilkan pada gambar berikut:



Gambar 2. *Flowchart* Teoritis.

Selanjutnya, untuk *flowchart* tahapan penelitian secara empiris dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 3. *Flowchart* Empiris.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, maka kesimpulan yang didapat pada penelitian ini adalah:

1. Metode reparameterisasi dapat digunakan untuk mentransformasi model rancangan tersarang (*nested*) dua faktor yang semula tidak berperingkat penuh menjadi model berperingkat penuh.
2. Berdasarkan kajian teoritis menggunakan *Gauss-Markov* dan secara empiris melalui simulasi dengan *software* SAS, menunjukkan bahwa parameter hasil reparameterisasi memiliki sifat tak bias dan memiliki varians minimum.

DAFTAR PUSTAKA

Asmara, K. W., Pranoto, Y. A., & Vendiansyah, N. 2024. Perancangan Website Prediksi Ketersediaan Stok Sparepart Motor Menggunakan Metode Trend Moment Pada Toko Jaya Motor. *Jurnal Mahasiswa Teknik Informatika*. **8**(2): 1279-1286.

Daoud, J. I., Usman, M., Elfaki, F. A., Othman, R., & Sidiq, A. 2006. Tansformation Of A Constrained Model Into Unconstrained Model In Two Way Treatment Structure With Interaction. *Quantitative Methods*. **2**(2): 29-36.

Elswick, R. K., Gennings, C., Chinchilli, V. M., & Dawson, K. S. 2012. A Simple Approach for Finding Estimable Functions in Linear Models. *The American Statistican*. **45**(1). 51-53.

Graybill, F. A. 1976. *Theory and Application of the Linear Model*. Duxbury Press, North Scituate.

Harville, D. A. 2018. *Linear Models and the Relevant Distributions and Matriks Algebra*. CRC Press, Boca Raton.

Hidayat, S., Saputri, W., & Astriani, M. 2018. *Metode Penelitian Biologi*. Universitas Muhammadiyah Palembang, Palembang.

Khuri, A. I. 2010. *Linear Model Methodology*. CRC Press, Boca Raton.

Magnus, J. R., & Neudecker, H. 2007. *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. John Wiley & Sons, Chichester.

Montgomery, D. C. 2013. *Design and Analysis of Experiments*. John Wiley & Sons, Inc, Arizona.

Myers, R. H., & Milton, J. S. 1991. *A First Course in the Theory of Linear Statistical Models*. PWS-KENT Publishing Company, Boston.

Nugroho, S. 2008. *Dasar-Dasar Rancangan Percobaan*. UNIB Press, Bengkulu.

Perdana, M. A., Moeljani, I. R., & Soedjarwo, D. P. 2023. Pengaruh Masa Simpan dan Suhu Simpan Terhadap Viabilitas dan Vigor Benih Coating Kedelai. *Jurnal Agrium*. **20**(1): 1-7.

Rencher, A. C., & Schaalje, G. B. 2008. *Linear Models in Statistic*. John Wiley & Sons, New Jersey.

Saleem, W. W., & Jaber, A. G. 2022. Reparameterization and the Conditional Inverse of a Balanced Factorial Experiment With Three Factors. *Ijnaa*. **13**(1): 3733-3747.

Santosa, B., Rozana, & Astutik. 2021. Pemanfaatan Sumber Nitrogen Organik Pembuatan Nata De Coco. *Teknologi Pangan*. **12**(1): 52-60.

Usman, M., & Warsono. 2009. *Teori Model Linear dan Aplikasinya*. Sinar Baru Algensindo, Bandung.

Usman, M., Malik, I., Warsono, & Elfaki, F. A. 2016. Analysis and Ratio of Linear Function of Parameter in Fixed Effect Three Level Nested Design. *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*. **11**(11): 7121-7129.