

**SIMULASI NUMERIK BIFURKASI HOPF PADA MODEL PLANKTON  
TIGA PEUBAH DENGAN VARIASI PARAMETER LAJU  
PERTUMBUHAN MAKSIMUM FITOPLANKTON**

**Skripsi**

**Oleh**

**NUR RAHMA AZZAHRA  
NPM. 2217031069**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMPUNG  
BANDAR LAMPUNG**

**2026**

## ABSTRACT

### NUMERICAL SIMULATION OF HOPF BIFURCATION IN A THREE-VARIABLE PLANKTON MODEL WITH VARIATION OF PHYTOPLANKTON MAXIMUM GROWTH RATE PARAMETERS

By

**Nur Rahma Azzahra**

Marine ecosystems are complex biological systems involving dynamic interactions between biotic and abiotic components, particularly phytoplankton and zooplankton, and environmental factors such as dissolved oxygen. Trophic interactions in aquatic systems can be mathematically modeled using a system of nonlinear differential equations to analyze population stability and dynamics. One important phenomenon in nonlinear dynamic systems is the Hopf bifurcation, which occurs when parameter changes cause periodic oscillations or limit cycles around an equilibrium point. This study aims to numerically analyze Hopf bifurcation in a three-dimensional plankton model involving oxygen, phytoplankton, and zooplankton, with Phytoplankton Maximum Growth Rate Parameters as the main controlling parameter representing the maximum phytoplankton growth rate. The analysis was conducted through Jacobian matrix evaluation, eigenvalue calculations, and numerical simulations using the Runge–Kutta method to identify changes in system stability due to parameter variations. The results are expected to provide a deeper understanding of the stability limits of marine ecosystems and the potential for oscillatory dynamics due to changes in biological factors, thus contributing to the development of mathematical ecological modeling.

**Keywords:** Plankton Model with Three Variables, Hopf Bifurcation, Nonlinear Dynamical System, Stability, Numerical Simulation, Phytoplankton Maximum Growth Rate Parameters

## ABSTRAK

### SIMULASI NUMERIK BIFURKASI HOPF PADA MODEL PLANKTON TIGA PEUBAH DENGAN VARIASI PARAMETER LAJU PERTUMBUHAN MAKSIMUM FITOPLANKTON

Oleh

**Nur Rahma Azzahra**

Ekosistem laut merupakan sistem biologis kompleks yang melibatkan interaksi dinamis antara komponen biotik dan abiotik, khususnya antara fitoplankton, zooplankton, dan faktor lingkungan seperti oksigen terlarut. Interaksi trofik dalam sistem perairan dapat dimodelkan secara matematis menggunakan sistem persamaan diferensial nonlinier untuk menganalisis kestabilan dan dinamika populasi. Salah satu fenomena penting dalam sistem dinamis nonlinier adalah bifurkasi Hopf, yang terjadi ketika perubahan parameter menyebabkan munculnya osilasi periodik atau limit *cycle* di sekitar titik kesetimbangan. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis bifurkasi Hopf secara numerik pada model plankton tiga dimensi yang melibatkan oksigen, fitoplankton, dan zooplankton, dengan parameter laju pertumbuhan maksimum fitoplankton sebagai parameter pengendali utama yang merepresentasikan laju pertumbuhan maksimum fitoplankton. Analisis dilakukan melalui evaluasi matriks Jacobian, perhitungan nilai eigen, serta simulasi numerik menggunakan metode Runge–Kutta untuk mengidentifikasi perubahan kestabilan sistem akibat variasi parameter. Hasil penelitian diharapkan dapat memberikan pemahaman yang lebih mendalam mengenai batas kestabilan ekosistem laut serta potensi terjadinya dinamika osilatori akibat perubahan faktor biologis, sehingga berkontribusi dalam pengembangan pemodelan ekologi matematis.

**Kata-kata kunci:** Model Plankton Tiga Peubah, Bifurkasi Hopf, Sistem Dinamis Nonlinier, Kestabilan, Simulasi Numerik, Parameter Laju Pertumbuhan Maksimum Fitoplankton

**SIMULASI NUMERIK BIFURKASI HOPF PADA MODEL PLANKTON  
TIGA PEUBAH DENGAN VARIASI PARAMETER LAJU  
PERTUMBUHAN MAKSIMUM FITOPLANKTON**

**NUR RAHMA AZZAHRA**

**Skripsi**

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar  
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMPUNG  
BANDAR LAMPUNG**

**2026**

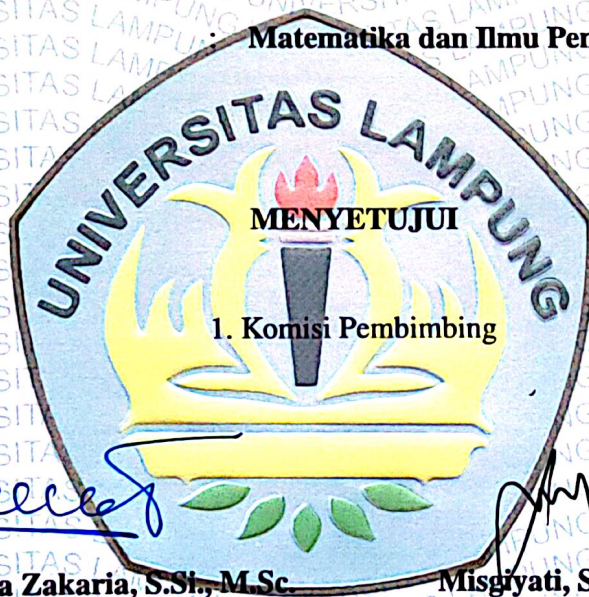
**Judul Skripsi : SIMULASI NUMERIK BIFURKASI HOPF PADA MODEL PLANKTON TIGA PEUBAH DENGAN VARIASI PARAMETER LAJU PERTUMBUHAN MAKSIMUM FITOPLANKTON**

**Nama Mahasiswa : Nur Rahma Azzahra**

**Nomor Pokok Mahasiswa : 2217031069**

**Program Studi : Matematika**

**Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



**Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.**

**NIP. 196902131994021001**

**Misgiyati, S.Pd., M.Si.**

**NIP. 198509282023212032**

**2. Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama  
FMIPA Universitas Lampung**

**Mulyono, S.Si., M.Si., Ph.D.**

**NIP. 197406112000031002**

**MENGESAHKAN**

**1. Tim Penguji**

**Ketua** : **Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.** .....

**Sekretaris** : **Misgiyati, S.Pd., M.Si.** .....

**Penguji  
Bukan Pembimbing** : **Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** .....

**2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

**Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.**

**NIP. 197110012005011002**

**Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 13 Mei 2026**



## PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Nur Rahma Azzahra**  
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031069**  
Jurusan : **Matematika**  
Judul Skripsi : **Simulasi Numerik Bifurkasi Hopf pada Model Plankton Tiga Peubah dengan Variasi Parameter Laju Pertumbuhan Maksimum Fitoplankton**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 13 Mei 2026

Penulis.



Nur Rahma Azzahra

## **RIWAYAT HIDUP**

Penulis bernama Nur Rahma Azzahra, lahir di desa Sinarrejo Kecamatan Kalirejo Kabupaten Lampung Tengah, pada tanggal 15 Agustus 2003. Penulis merupakan anak ke-4 atau anak bungsu dari pasangan Bapak Suherman dan Ibu Ida Rosita. Dimana penulis merupakan anak perempuan satu-satunya dalam keluarga.

Pendidikan formal penulis dimulai dari TK - SMA. Pada tahun 2022, penulis diterima di Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung melalui jalur seleksi SNMPTN, dan menjalani pendidikan sarjana dari tahun 2022 hingga 2026. Pada semester 2 atau tepatnya bulan maret akhir penulis berhasil mendapatkan beasiswa yaitu Bright Scholarship dari YBM BRILiaN.

Selama menempuh pendidikan di perguruan tinggi, penulis aktif dalam berbagai kegiatan organisasi. Pada tahun 2023, penulis tergabung dalam Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) sebagai anggota Bidang Keilmuan, Staff Ahli Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) FMIPA Unila Dinas Pemberdayaan Wanita dan anggota Bidang Akademik Riset ROIS FMIPA Unila. Lalu diperiode selanjutnya yaitu 2024 menjadi Pimpinan HIMATIKA sebagai Sekretaris Bidang Keilmuan periode 2024. Setelah itu pada tahun 2025 menjadi Dewan Pembina Organisasi (DPO) HIMATIKA Periode 2025. Selain organisasi, penulis juga mengikuti program magang di PT Taspen (Persero) KC Bandar Lampung pada 23 Desember 2024 sampai 31 Januari 2025. Selain itu penulis aktif dalam kegiatan kemasyarakatan yang tergabung dalam RISMA serta guru TPA Masjid Al Iman Perumahan Bumi Puspa Kencana.

Penulis memiliki minat dan bakat yang kuat di bidang desain dan multimedia, dengan kemampuan editing yang baik serta kreativitas yang terus dikembangkan. Penulis juga aktif terlibat dalam berbagai kegiatan dan event sebagai bagian dari tim media, sehingga memiliki pengalaman dalam mengelola konten visual, mendokumentasikan kegiatan, serta menghasilkan karya yang menarik dan informatif.

## **KATA INSPIRASI**

*"But they plan, and Allah plans. And Allah is the best of planners."*

**(QS Al-Anfal: 30).**

"Jika bukan karena Allah yang mampukan, aku mungkin sudah lama menyerah".

**(Q.S Al-Insyirah: 05-06).**

"Sebab Tuhan telah berjanji, setelah sempit ada kemudahan."

**(Raim Laode-Bersenja Gurau).**

"Semua jatuh bangunmu hal yang biasa, angan dan pertanyaan waktu yang menjawabnya, berikan tenggat waktu bersedihlah secukupnya, rayakan perasaanmu sebagai manusia".

**(Baskara Putra-Hindia).**

"Tugas akhir ini bukan tentang kesempurnaan, melainkan tentang keberanian untuk menyelesaikan apa yang telah dimulai".

**(Penulis).**

## **PERSEMBAHAN**

Dengan mengucapkan Alhamdulillah dan bersyukur kepada Allah SWT atas karunia dan petunjuk-Nya, sehingga tugas akhir ini dapat diselesaikan dengan baik dan sesuai waktunya. Dengan penuh rasa syukur dan kebahagiaan, saya ucapkan terimakasih kepada:

### **Bapak dan Ibuku Tercinta**

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Aku menghargai semua pelajaran berharga yang telah diajarkan kepadaku mengenai arti sejati dari perjalanan kehidupan, agar suatu saat bisa menjadi individu yang berguna bagi banyak orang.

### **Kakak-kakakku Tercinta**

Terima kasih kepada kakak-kakakku tercinta atas segala dukungan, perhatian, dan motivasi yang selalu diberikan selama ini. Insyaallah semua itu menjadi bekal bagiku untuk terus berkembang dan kelak bisa menjadi pribadi yang bermanfaat bagi banyak orang.

### **Dosen Pembimbing dan Pembahas**

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

### **Sahabat-sahabatku**

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

### **Almamater Tercinta**

Universitas Lampung

## SANWACANA

Alhamdulillah penulis panjatkan rasa syukur kepada Allah SWT atas segala berkah dan anugerah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Simulasi Numerik Bifurkasi Hopf pada Model Plankton Tiga Peubah dengan Variasi Parameter Laju Pertumbuhan Maksimum Fitoplankton" dengan baik, lancar, dan sesuai dengan tenggat waktu yang telah ditetapkan. Semoga shalawat dan salam senantiasa diberikan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Misgiyati, S.Pd., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Ibu Dr. Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing akademik.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Bapak dan Ibu yang senantiasa tidak lelah mendoakan penulis, selalu memberikan kasih sayang, motivasi, serta mengajarkan arti kesabaran dan rasa syukur dalam

setiap langkah kehidupan. Tanpa doa dan ridho dari Bapak dan Ibu, penulis tidak akan mampu berada di titik ini.

8. Mas Hunaifi, Mas Ibnu, dan Mas Aziz yang selalu memberikan dukungan, motivasi, serta menjadi panutan dalam menjalani kehidupan. Terima kasih atas setiap nasihat dan semangat yang diberikan, sehingga penulis dapat terus belajar, berkembang, dan bersyukur hingga sampai pada tahap ini.
9. Terimakasih sebesar-besarnya kepada YBM BRILiaN atas dukungan melalui program Bright Scholarship, yang tidak hanya memberikan bantuan finansial, tetapi juga menghadirkan ruang belajar, bertumbuh, dan berkembang bagi penulis. Terima kasih atas kesempatan, pembinaan, serta nilai-nilai kebermanfaatan yang senantiasa ditanamkan, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi ini dengan penuh semangat dan tanggung jawab.
10. Teman-teman Bright Scholarship 8 Unila, sahabat seperjuangan satu asrama dan satu beasiswa, yang telah menjadi bagian tak terpisahkan dari perjalanan ini. Terima kasih atas dukungan, doa, tawa, diskusi panjang, kebersamaan yang menguatkan di setiap proses, serta menjadi ruang pulang di tengah lelahnya proses, menjadi penguat saat semangat menurun, dan menjadi saksi tumbuhnya mimpi-mimpi besar kita bersama. Kalian bukan hanya teman belajar, tetapi juga keluarga yang membersamai langkah penulis dalam jatuh bangun perjuangan menyelesaikan studi ini.
11. Keluarga Besar Bright Scholarship Region 5 Bandar Lampung yang senantiasa memberikan doa, dukungan, serta semangat yang tiada henti. Terima kasih atas kebersamaan, motivasi, dan inspirasi yang telah diberikan selama ini akan menjadi bagian berharga dalam perjalanan hidup ini.
12. Pimpinan dan Anggota Bidang Keilmuan HIMATIKA Periode 2024, terimakasih banyak karena sudah saling membantu, memberi semangat dan cerita perjuangannya selama di HIMATIKA.
13. Sanditha, Ara, Della, Coky, Munadiya, dan Khusni terimakasih telah menjadi sahabat selama menempuh perkuliahan ini, menjadi teman yang selalu supportif dan membantu banyak hal.
14. Teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika angkatan 2022, khususnya kelas A Matematika Terapan, terima kasih atas kebersamaan, dukungan, dan pengalaman berharga yang telah kita lalui bersama sejak semester 3 hingga semester 6. Semoga kebersamaan ini menjadi kenangan indah dan dapat terus terjalin di masa yang akan datang.

15. *Last but not least*, anak bungsu dan anak perempuan satu-satunya dalam keluarga, Nur Rahma Azzahra. Ya, diri saya sendiri. Apresiasi sebesar-besarnya yang telah berjuang untuk menyelesaikan apa yang telah dimulai. Sulit bisa bertahan sampai dititik ini, terimakasih untuk tetap hidup dan merayakan dirimu sendiri, walaupun sering kali putus asa atas apa yang sedang diusahakan. Tetaplah jadi manusia yang mau berusaha dan tidak lelah untuk mencoba. Penulis berdoa agar langkah kecilmu selalu diperkuat, dikelilingi orang-orang baik dan hebat, serta mimpimu dan doa yang selalu dipanjatkan satu persatu terjawab. *God thank you for being me independent women, i know there are more great ones but i'm proud of this achievement.*

Semoga skripsi ini dapat berguna bagi kita semua. Penulis memahami bahwa skripsi ini masih memiliki banyak kekurangan, sehingga penulis berharap mendapat masukan dan saran yang positif untuk memperbaiki skripsi ini ke depannya.

Bandar Lampung, 13 Mei 2026

Nur Rahma Azzahra

## DAFTAR ISI

<b>DAFTAR ISI</b> . . . . .	<b>xiv</b>
<b>DAFTAR TABEL</b> . . . . .	<b>xvi</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> . . . . .	<b>xvii</b>
<b>I PENDAHULUAN</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang Masalah . . . . .	1
1.2 Tujuan Penelitian . . . . .	2
1.3 Manfaat Penelitian . . . . .	3
<b>II TINJAUAN PUSTAKA</b> . . . . .	<b>4</b>
2.1 Model Matematika Ekologi Plankton-Oksigen Tiga Peubah . . . . .	4
2.2 Sistem Persamaan Diferensial Biasa . . . . .	6
2.3 Titik Keseimbangan . . . . .	7
2.4 Analisis Kestabilan . . . . .	7
2.5 Analisis Bifurkasi . . . . .	8
2.5.1 Bifurkasi Hopf . . . . .	9
2.6 <i>Integrator</i> Skema Simulasi Ekologi Plankton–Oksigen . . . . .	11
2.6.1 <i>Integrator</i> Runge-Kutta Klasik . . . . .	11
2.6.2 <i>Integrator</i> Runge-Kutta-Fehlberg . . . . .	11
2.7 <i>Numerical Analysis Software</i> Python . . . . .	12
<b>III METODE PENELITIAN</b> . . . . .	<b>13</b>
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian . . . . .	13
3.2 Langkah-Langkah Penelitian . . . . .	13
<b>IV HASIL DAN PEMBAHASAN</b> . . . . .	<b>16</b>
4.1 Parameter Penelitian . . . . .	16
4.2 Titik Tetap dan Analisis Linear . . . . .	17
4.2.1 Titik Tetap Sistem Oksigen–Plankton . . . . .	17
4.2.2 Matriks Jacobian . . . . .	20
4.2.3 Analisis <i>Eigenvalue</i> dan Interpretasi Kestabilan . . . . .	23
4.3 Variasi Parameter $B$ dan Indikasi Bifurkasi Hopf . . . . .	25
4.3.1 Diagram $B$ vs $\text{Re}(\lambda_{\max})$ . . . . .	26
4.3.2 Identifikasi Nilai Kritis $B_c$ . . . . .	27
4.4 Dinamika Sistem di Sekitar $B_c$ . . . . .	27

4.4.1	Phase Portrait untuk $B < B_c$ . . . . .	28
4.4.2	Phase Portrait untuk $B > B_c$ . . . . .	29
4.4.3	Indikasi Munculnya Limit <i>Cycle</i> . . . . .	30
4.4.4	Diagram Bifurkasi Numerik . . . . .	31
4.5	Interpretasi Terjadinya Bifurkasi Hopf . . . . .	32
<b>V</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN</b> . . . . .	<b>34</b>
5.1	Kesimpulan . . . . .	34
5.2	Saran . . . . .	35
	<b>DAFTAR PUSTAKA</b> . . . . .	<b>36</b>

## DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
2.1 Parameter model plankton tiga peubah (Sumber: Mondal dkk., 2022) . . .	5
4.1 Nilai parameter model plankton tiga peubah (Sumber: Mondal dkk., 2022)	16
4.2 Parameter yang divariasikan . . . . .	17

## DAFTAR GAMBAR

2.1	Bifurkasi Hopf dan limit <i>cycle</i> ketika parameter melewati nilai kritis.	10
3.1	Diagram Alir Penelitian. . . . .	15
4.1	Diagram $B$ vs $\text{Re}(\lambda_{\max})$ . . . . .	26
4.2	Phase Portrait untuk $B < B_c$ . . . . .	28
4.3	Phase Portrait untuk $B > B_c$ . . . . .	29
4.4	<i>Phase Potrait</i> Tiga Peubah Limit <i>Cycle</i> . . . . .	30
4.5	Diagram Bifurkasi . . . . .	31

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Ekosistem laut merupakan sistem biologis yang kompleks karena melibatkan interaksi antara komponen biotik dan abiotik (Mason, 1981). Dinamika ekosistem laut dijelaskan melalui interaksi antara organisme seperti fitoplankton dan zooplankton dalam rantai makanan (Mann & Lazier, 2006). Penurunan kadar oksigen terlarut dapat memengaruhi stabilitas ekosistem dan kualitas perairan (Diaz & Rosenberg, 2008). Fitoplankton berperan sebagai produsen utama dalam sistem perairan, sedangkan zooplankton bertindak sebagai konsumen primer yang mengontrol populasi fitoplankton (Kumar dkk., 2020).

Pemodelan dinamika populasi dalam ekosistem dapat dilakukan menggunakan sistem persamaan diferensial nonlinier (Murray, 2002). Analisis sistem dinamis nonlinier memungkinkan pengkajian kestabilan dan perubahan perilaku solusi di sekitar titik kesetimbangan (Hirsch dkk., 2013). Model plankton tiga variabel telah digunakan untuk menggambarkan interaksi trofik secara kuantitatif dalam sistem perairan (Yussof dkk., 2020).

Perubahan kualitatif perilaku sistem akibat variasi parameter dikenal sebagai bifurkasi (Wiggins, 2003). Dalam analisis sistem dinamis, kestabilan lokal ditentukan melalui nilai eigen matriks Jacobian (Hirsch dkk., 2013). Salah satu jenis bifurkasi penting adalah bifurkasi Hopf, yang terjadi ketika sepasang nilai eigen kompleks konjugat melintasi sumbu imajiner sehingga memunculkan orbit periodik atau *limit cycle* (Hirsch dkk., 2013). Identifikasi perubahan struktur dinamika akibat variasi parameter dapat dilakukan melalui pendekatan teori bifurkasi modern (Kuznetsov, 2023).

Model plankton tiga variabel yang dikembangkan oleh Mondal dkk. (Mondal dkk., 2022) memasukkan interaksi biologis melalui respons fungsional nonlinier serta

pengaruh parameter fisiologis terhadap dinamika sistem. Dalam model tersebut, laju pertumbuhan maksimum fitoplankton merepresentasikan parameter  $B$  (Mondal dkk., 2022). Peningkatan laju pertumbuhan fitoplankton dapat memperkuat interaksi predator–mangsa dan memicu dinamika osilatori dalam sistem.

Evaluasi matriks Jacobian dan perhitungan nilai eigen menjadi langkah utama dalam identifikasi bifurkasi (Hirsch dkk., 2013). Analisis numerik diperlukan untuk mendeteksi perubahan kestabilan akibat variasi parameter (Roesch & Stumpf, 2019). Simulasi sistem menggunakan metode Runge–Kutta membantu menentukan nilai kritis parameter secara komputasional (Mandal dkk., 2024).

Dengan menggabungkan metode numerik, analisis kestabilan, dan teori bifurkasi, penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi yang signifikan dalam bidang pemodelan ekologi matematis. Hasil yang diperoleh dapat membantu memahami batas-batas stabilitas ekosistem laut, memprediksi potensi terjadinya fluktuasi populasi, dan memberikan wawasan tentang bagaimana faktor biologis tertentu dapat memengaruhi keseimbangan ekologi secara keseluruhan.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini difokuskan pada analisis numerik bifurkasi Hopf pada model plankton tiga peubah dengan variasi parameter  $B$  sebagai parameter pengendali utama. Parameter  $B$  yang merepresentasikan laju pertumbuhan maksimum fitoplankton memiliki peran penting dalam menentukan keseimbangan interaksi antara oksigen, fitoplankton, dan zooplankton dalam ekosistem. Oleh karena itu, variasi nilai parameter ini berpotensi menyebabkan perubahan struktur kestabilan sistem.

## 1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menganalisis kestabilan titik tetap model plankton tiga peubah.
2. Mengidentifikasi perubahan kestabilan sistem akibat variasi parameter laju pertumbuhan maksimum fitoplankton atau parameter  $B$ .
3. Menentukan nilai kritis parameter  $B_c$  yang memicu terjadinya bifurkasi Hopf.
4. Menganalisis dinamika sistem sebelum dan sesudah nilai kritis melalui simulasi numerik dan bidang fase.

5. Mengidentifikasi munculnya limit *cycle* sebagai indikasi terjadinya bifurkasi Hopf.

### **1.3 Manfaat Penelitian**

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Memberikan kontribusi dalam pengembangan analisis dinamika sistem nonlinier, khususnya pada kajian bifurkasi Hopf.
2. Memberikan pemahaman mengenai dinamika osilasi populasi plankton akibat perubahan parameter tertentu.
3. Membantu memahami kondisi kritis yang dapat menyebabkan perubahan dinamika populasi secara periodik.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Model Matematika Ekologi Plankton-Oksigen Tiga Peubah

Model oksigen-fitoplankton-zooplankton (plankton tiga peubah) adalah model ekologis nonlinier yang menunjukkan bagaimana produksi oksigen, pertumbuhan fitoplankton, dan aktivitas predasi zooplankton yang berinteraksi satu sama lain. Model plankton tiga peubah yang dikembangkan oleh Mondal dkk. (2022) disajikan dalam bentuk:

$$\begin{cases} \frac{dc}{dt} = \frac{Ac_0p}{c+c_0} - \frac{\delta cp}{c+c_2} - \frac{\nu cz}{c+c_3} - mc \\ \frac{dp}{dt} = \left( \frac{Bc}{c+c_1} - \gamma p \right) p - \frac{ap^2z}{ahp^2+p+g} - \sigma p \\ \frac{dz}{dt} = \left( \frac{\eta c^2}{c^2+c_4^2} \right) \frac{ap^2z}{ahp^2+p+g} - \mu z \end{cases} \quad (2.1.1).$$

Dengan kondisi awal:

$$c(0) > 0, \quad p(0) > 0, \quad z(0) > 0$$

Sistem tersebut menggambarkan dinamika oksigen (c), fitoplankton (p), dan zooplankton (z) berdasarkan parameter fisiologis seperti pertumbuhan, predasi, respirasi, serta mortalitas. Struktur nonlinearnya memungkinkan munculnya fenomena kompleks seperti osilasi, perubahan kestabilan, dan bifurkasi. Oleh karena itu analisis numerik dan analisis kualitatif diperlukan untuk memahami fenomena-fenomena dari model tersebut (Mondal dkk., 2022).

Berikut disajikan tabel keterangan parameter yang digunakan dalam formulasi persamaan 2.1.1:

Tabel 2.1 Parameter model plankton tiga peubah (Sumber: Mondal dkk., 2022)

Parameter	Keterangan
$A$	Tingkat produksi oksigen fitoplankton yang dipengaruhi oleh komponen lingkungan.
$c_i$	Konstanta setengah jenuh seperti produksi oksigen, respirasi organisme, dan pertumbuhan fitoplankton.
$\delta$	Laju maksimal respirasi fitoplankton per individu.
$\nu$	Laju maksimal respirasi zooplankton per individu.
$m$	Laju penurunan oksigen yang disebabkan oleh reaksi biokimia yang terjadi di ekosistem laut.
$B$	Laju pertumbuhan maksimum fitoplankton.
$\gamma$	Tingkat kematian fitoplankton yang disebabkan oleh persaingan antar individu.
$\alpha$	Tingkat pencarian mangsa zooplankton.
$h$	Waktu yang dibutuhkan untuk menangani zooplankton.
$g$	Saturasi tambahan pada kemampuan predasi zooplankton.
$\sigma$	Laju kematian fitoplankton yang terjadi secara alami.
$n$	Efisiensi zooplankton mengubah hasil konsumsi menjadi pertumbuhan.
$\mu$	Laju kematian zooplankton yang terjadi secara alami.

Variabel yang digunakan dalam persamaan 2.1.1 dideskripsikan sebagai berikut ini:

#### 1) Oksigen

Semua organisme membutuhkan oksigen terlarut untuk melakukan respirasi dan mikroorganisme menggunakan limbah untuk memecah bahan organik menjadi senyawa-senyawa yang lebih sederhana (Mason, 1981). Pada perairan yang tercemar oleh bahan organik, kandungan oksigen terlarutnya akan sangat menurun bahkan dalam situasi pencemaran yang sangat parah (Mason, 1981). Oksigen terlarut merupakan tolok ukur penting kualitas air, kesegaran limbah, dan keadaan aerobik suatu perairan (Mahida, 1993).

#### 2) Fitoplanton

Fitoplankton merupakan organisme mikroskopis autotrof yang mampu melakukan fotosintesis dan berperan sebagai produsen primer dalam ekosistem perairan (Naselli-Flores & Padisák, 2022). Pertumbuhan dan distribusi fitoplankton dipengaruhi oleh intensitas cahaya, ketersediaan nutrisi, suhu, serta kondisi fisik-kimia perairan lainnya. Dinamika fitoplankton sering menjadi

fokus utama dalam pemodelan ekologi karena variabilitas pertumbuhannya memengaruhi interaksi dengan zooplankton dan kestabilan sistem perairan secara keseluruhan.

### 3) Zooplankton

Zooplankton adalah organisme heterotrof yang memperoleh energi dengan memakan fitoplankton atau plankton lainnya (Kumar dkk., 2020). Sebagai konsumen primer, zooplankton memiliki peran strategis dalam menyalurkan energi dari produsen primer ke tingkat trofik yang lebih tinggi. Perubahan komposisi dan kelimpahan zooplankton dapat menjadi indikator gangguan lingkungan seperti eutrofikasi, pemanasan global, serta tekanan antropogenik lainnya (Rahman dkk., 2023). Oleh karena itu, pemahaman tentang zooplankton sangat penting dalam analisis model matematis ekosistem, terutama yang berkaitan dengan stabilitas dan bifurkasi sistem plankton tiga peubah.

## 2.2 Sistem Persamaan Diferensial Biasa

Sistem persamaan diferensial biasa (PDB) merupakan kerangka dasar dalam pemodelan dinamika populasi plankton yang berubah terhadap waktu (Curtu dkk., 2014), termasuk model CPZ yang melibatkan oksigen (C), fitoplankton (P), dan zooplankton (Z). Secara umum, bentuk matematis sistem PDB dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.2.1).$$

Dengan vektor keadaan:

$$\mathbf{x} = (C, P, Z)^T \quad (2.2.2).$$

Merepresentasikan tiga komponen utama pada ekosistem plankton. Parameter-parameter dalam model seperti laju pertumbuhan, efisiensi konsumsi, saturasi nutrien, serta tingkat mortalitas dihimpun dalam himpunan parameter  $\boldsymbol{\theta}$  (Mondal dkk., 2022). Dengan menyatakan ruang keadaan  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , model CPZ memberikan fondasi bagi analisis numerik untuk mendeteksi bifurkasi Hopf dan perubahan struktur kestabilan lainnya.

### 2.3 Titik Keseimbangan

Kondisi di mana laju perubahan seluruh variabel sistem bernilai nol disebut titik keseimbangan (Schröder, 1999). Hal tersebut terjadi ketika:

$$f(x^*) = 0 \quad (2.3.1).$$

Titik ini menunjukkan kondisi variabel atau populasi sistem dalam jangka panjang. Analisis titik keseimbangan adalah alat penting untuk analisis bifurkasi dan kestabilan karena menentukan karakteristik perilaku sistem (Hirsch dkk., 2013).

Dalam suatu sistem dinamika nonlinier yang dituliskan sebagai:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \quad (2.3.2).$$

Suatu titik  $\mathbf{x}^* = (c^*, p^*, z^*)$  disebut sebagai titik keseimbangan atau *steady state* apabila memenuhi:

$$F(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\theta}) = 0 \quad (2.3.3).$$

Hal ini menyatakan bahwa pada titik tersebut tidak terdapat perubahan nilai variabel terhadap waktu sehingga sistem berada dalam keadaan tetap. Dalam konteks model plankton tiga peubah, titik keseimbangan merepresentasikan kondisi ekologis ketika interaksi antar komponen populasi berada dalam keadaan stasioner (Mondal dkk., 2022).

### 2.4 Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan digunakan untuk menentukan bagaimana perilaku sistem ketika mengalami gangguan kecil di sekitar titik keseimbangan. Dalam sistem dinamika nonlinier, penentuan kestabilan suatu titik keseimbangan sangat penting untuk memahami apakah solusi sistem akan kembali menuju titik tersebut atau justru menjauh dari titik itu seiring waktu (Hirsch dkk., 2013).

Untuk menganalisis kestabilan lokal di sekitar titik tersebut, sistem nonlinier dapat dilinearisasi menggunakan perluasan deret Taylor orde pertama (Perrusquía, 2022).

Linearisasi ini menghasilkan matriks Jacobian:

$$\mathbf{J}(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=x^*} \quad (2.4.1).$$

Kestabilan titik keseimbangan tersebut ditentukan melalui analisis nilai eigen dari matriks Jacobian. Kriteria kestabilan diberikan sebagai berikut:

1. Jika seluruh nilai eigen memiliki bagian real negatif, maka titik keseimbangan bersifat asimtotik stabil.
2. Jika terdapat nilai eigen dengan bagian real positif, maka titik keseimbangan tersebut tidak stabil.
3. Jika bagian real dari suatu nilai eigen melewati nol akibat perubahan parameter, maka terjadi perubahan kestabilan yang menandakan adanya kemungkinan bifurkasi (Mondal dkk.,2022).

Dengan demikian, analisis kestabilan melalui pendekatan nilai eigen merupakan metode utama dalam mengidentifikasi perubahan perilaku sistem, termasuk munculnya osilasi, hilangnya titik keseimbangan, ataupun perubahan kestabilan antar titik keseimbangan. Teknik ini sangat relevan ketika mempelajari dinamika ekologi seperti model oksigen–plankton tiga peubah.

## 2.5 Analisis Bifurkasi

Bifurkasi merupakan perubahan kualitatif pada struktur dinamika suatu sistem ketika parameter tertentu divariasikan (Wiggins, 2003). Perubahan kualitatif tersebut dapat berupa perubahan jumlah titik keseimbangan, perubahan kestabilan, atau munculnya solusi periodik baru (Kuznetsov, 2023). Dalam sistem dinamis nonlinier, bifurkasi terjadi ketika nilai parameter melewati suatu nilai kritis sehingga sifat solusi berubah secara mendasar (Strogatz, 2015).

Secara umum, sistem dinamis bergantung pada parameter  $B$  dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = f(x, B) \quad (2.5.1).$$

dengan  $x \in \mathbb{R}^n$  dan  $B \in \mathbb{R}$  (Hirsch dkk., 2013). Nilai parameter  $B = B_c$  disebut

sebagai nilai kritis apabila pada titik tersebut terjadi perubahan struktur kestabilan sistem (Kuznetsov, 2023).

Dalam analisis kestabilan lokal, perubahan bifurkasi biasanya terdeteksi melalui perubahan tanda bagian real dari nilai eigen matriks Jacobian (Wiggins, 2003). Jika bagian real suatu nilai eigen melintasi nol akibat variasi parameter, maka sistem mengalami perubahan kestabilan yang mengindikasikan kemungkinan terjadinya bifurkasi (Roesch & Stumpf, 2019).

### 2.5.1 Bifurkasi Hopf

Bifurkasi Hopf merupakan salah satu jenis bifurkasi lokal yang terjadi ketika sepasang nilai eigen kompleks konjugat dari matriks Jacobian melintasi sumbu imajiner pada bidang kompleks (Wiggins, 2003). Fenomena ini menyebabkan perubahan kestabilan titik keseimbangan dan diikuti oleh kemunculan solusi periodik berupa limit *cycle* (Kuznetsov, 2023).

Misalkan sistem dinamis nonlinier dinyatakan sebagai:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, B),$$

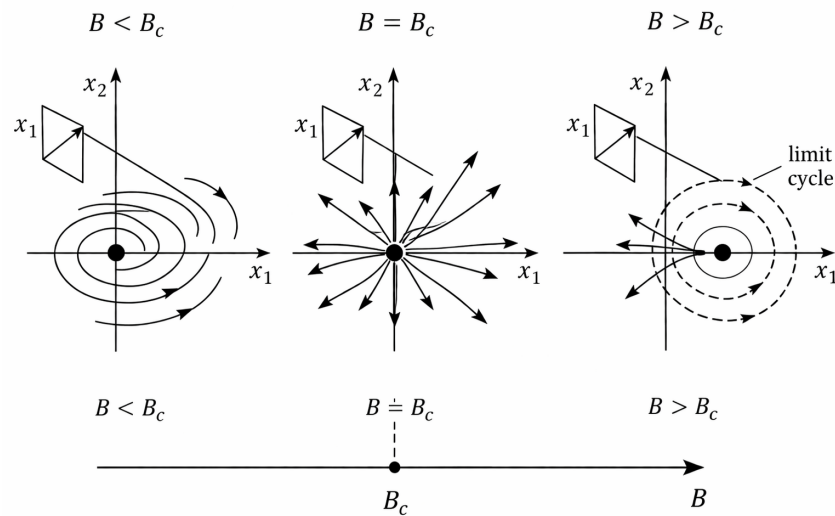
dengan  $x \in \mathbb{R}^n$  dan  $B$  merupakan parameter bifurkasi (Hirsch dkk., 2013). Titik  $x^*$  menyatakan titik keseimbangan yang memenuhi  $f(x^*, B) = 0$ . Titik keseimbangan  $x^*$  mengalami bifurkasi Hopf pada  $B = B_c$  apabila terpenuhi kondisi berikut (Wiggins, 2003):

1. Terdapat sepasang nilai eigen kompleks konjugat

$$\lambda_{1,2}(B) = \alpha(B) \pm i\omega(B),$$

2. Pada  $B = B_c$ , berlaku  $\alpha(B_c) = 0$ ,
3. Bagian imajiner tidak nol, yaitu  $\omega(B_c) \neq 0$ .

Kondisi tersebut menunjukkan bahwa pasangan nilai eigen melintasi sumbu imajiner ketika parameter melewati nilai kritis (Wiggins, 2003). Perubahan tanda bagian real dari negatif menjadi positif menyebabkan titik keseimbangan berubah dari fokus stabil menjadi fokus tidak stabil (Strogatz, 2015).



Gambar 2.1 Bifurkasi Hopf dan limit *cycle* ketika parameter melewati nilai kritis.

Secara geometris, untuk  $B < B_c$  lintasan sistem berbentuk spiral menuju titik keseimbangan (*spiral-in*), sedangkan untuk  $B > B_c$  lintasan berbentuk spiral menjauhi titik keseimbangan (*spiral-out*) (Wiggins, 2003). Pada saat melewati nilai kritis tersebut, muncul orbit tertutup yang disebut limit *cycle* (Kuznetsov, 2023).

Limit *cycle* merupakan solusi periodik terisolasi yang menarik atau menolak lintasan di sekitarnya (Hirsch dkk., 2013). Jika limit *cycle* yang muncul bersifat stabil dan terbentuk setelah titik tetap kehilangan kestabilannya, maka bifurkasi tersebut disebut bifurkasi Hopf superkritis (Kuznetsov, 2023). Sebaliknya, jika limit *cycle* yang muncul bersifat tidak stabil dan terjadi sebelum titik tetap kehilangan kestabilannya, maka bifurkasi tersebut disebut bifurkasi Hopf subkritis (Wiggins, 2003).

## 2.6 Integrator Skema Simulasi Ekologi Plankton–Oksigen

### 2.6.1 Integrator Runge-Kutta Klasik

Metode Runge-Kutta orde 4 digunakan untuk menyelesaikan sistem PDB nonlinier dengan stabilitas tinggi. Prosedur iteratifnya dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(y_n), \\
 k_2 &= f\left(y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\
 k_3 &= f\left(y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\
 k_4 &= f(y_n + hk_3), \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
 \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

Besaran  $h$  merupakan langkah waktu (*step size*). Metode ini efektif untuk sistem nonlinier karena memiliki kesalahan orde  $O(h^4)$  (Mandal dkk., 2024).

### 2.6.2 Integrator Runge-Kutta-Fehlberg

Metode Runge–Kutta–Fehlberg atau RK4(5) adalah metode integrasi numerik adaptif yang banyak digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial biasa. Fehlberg mengembangkan metode ini sebagai pasangan orde ganda (*embedded pair*) Runge–Kutta orde 4 dan orde 5, yang memungkinkan perhitungan solusi dan estimasi galat lokal dilakukan secara simultan (Fehlberg, 1969). Dengan keberadaan dua solusi berbeda orde tersebut, RK(4)5 dapat secara otomatis menyesuaikan ukuran langkah (*step size*) untuk menjaga akurasi dan efisiensi komputasi.

Sistem PDB memiliki bentuk umum:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{2.6.2}$$

Metode Runge–Kutta–Fehlberg menggunakan enam tahapan komputasi (*stage*) dengan bentuk:

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$

$$k_2 = f(t_n + a_2h, y_n + h c_{21}k_1),$$

$$k_3 = f(t_n + a_3h, y_n + h(c_{31}k_1 + c_{32}k_2)),$$

$$k_4 = f(t_n + a_4h, y_n + h(c_{41}k_1 + c_{42}k_2 + c_{43}k_3)),$$

$$k_5 = f(t_n + a_5h, y_n + h(c_{51}k_1 + c_{52}k_2 + c_{53}k_3 + c_{54}k_4)),$$

$$k_6 = f(t_n + a_6h, y_n + h(c_{61}k_1 + c_{62}k_2 + c_{63}k_3 + c_{64}k_4 + c_{65}k_5))$$

Dalam penelitian ini, Runge–Kutta–Fehlberg digunakan untuk menyelesaikan sistem PDB nonlinier model plankton tiga peubah. Karena model tersebut memiliki dinamika kompleks dan dapat mengalami perubahan struktur solusi akibat variasi parameter, metode adaptif seperti Runge–Kutta–Fehlberg sangat penting untuk menjaga stabilitas perhitungan dan mendeteksi fenomena bifurkasi secara akurat. Oleh sebab itu, Runge–Kutta–Fehlberg bukan hanya metode integrasi numerik, tetapi juga alat fundamental yang mendukung kelancaran analisis bifurkasi dalam model ekologi nonlinier ini.

## 2.7 Numerical Analysis Software Python

Python adalah salah satu bahasa pemrograman dan *software* yang paling banyak digunakan dalam penelitian ilmiah seperti analisis numerik, simulasi sistem dinamis, dan pemodelan matematika (Linge & Langtangen, 2018). Karena sifatnya yang fleksibel, *open-source*, dan didukung oleh komunitas pengguna yang luas. Python sangat cocok untuk penelitian akademik yang membutuhkan komputasi numerik intensif.

Python menyediakan berbagai pustaka yang dapat dimanfaatkan dalam analisis numerik untuk mempelajari kestabilan, menyelesaikan sistem persamaan diferensial, dan mensimulasikan dinamika nonlinier. *SciPy* menyediakan *solver* ODE seperti *solve\_ivp* yang mengimplementasikan metode Runge-Kutta orde tinggi untuk penyelesaian numerik sistem diferensial (Haiman dkk., 2020). Sedangkan pustaka seperti *SciPy*, yang mendukung analisis simbolik seperti penurunan Jacobian, perhitungan nilai eigen, dan pencarian titik tetap, analisis bifurkasi dapat dilakukan secara lebih mendalam. Dengan demikian, python cocok digunakan dalam pemodelan plankton tiga peubah ini.

## BAB III

### METODE PENELITIAN

#### 3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 di Laboratorium Komputer Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

#### 3.2 Langkah-Langkah Penelitian

1. Melakukan studi literatur mengenai model ekologi plankton–oksigen tiga peubah, teori kestabilan sistem dinamis nonlinier, serta teori bifurkasi Hopf.
2. Mengidentifikasi model matematika plankton tiga peubah Mondal dkk. (2022).
3. Menentukan nilai parameter dasar berdasarkan literatur serta menetapkan rentang variasi untuk parameter  $B$  sebagai parameter bifurkasi.
4. Menentukan titik tetap sistem dengan menyelesaikan sistem:

$$c^* = 0, \quad p^* = 0, \quad z^* = 0$$

secara numerik menggunakan metode komputasi (*fsolve* pada Python).

5. Menghitung matriks Jacobian pada titik tetap koeksistensi dan menentukan nilai eigen secara numerik menggunakan *NumPy*.
6. Menganalisis kestabilan titik tetap berdasarkan tanda bagian real nilai eigen.
7. Memvariasikan parameter  $B$  dan menghitung nilai maksimum bagian real eigenvalue, yaitu  $\text{Re}(\lambda_{\max})$ , untuk setiap nilai  $B$  dalam rentang yang ditentukan.

8. Mengidentifikasi nilai kritis  $B_c$  ketika:

$$\operatorname{Re}(\lambda_{\max}) = 0 \quad (3.1.2).$$

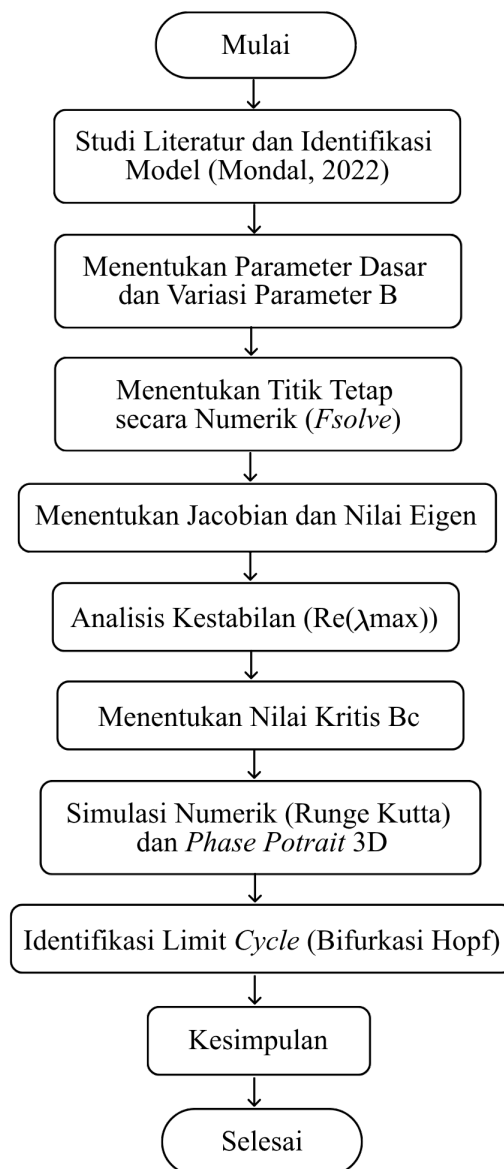
sebagai indikasi terjadinya bifurkasi Hopf.

9. Memverifikasi keberadaan pasangan eigen kompleks konjugat di sekitar  $B_c$  dengan bentuk:

$$\lambda_{1,2}(B) = \alpha(B) \pm i\omega(B) \quad (3.1.3).$$

dengan syarat  $\alpha(B_c) = 0$  dan  $\omega(B_c) \neq 0$ .

10. Melakukan simulasi numerik sistem menggunakan metode Runge–Kutta untuk dua kondisi, yaitu  $B < B_c$  dan  $B > B_c$ .
11. Menganalisis potret fase tiga peubah untuk mengamati perubahan yang terjadi.
12. Menginterpretasikan hasil analisis secara matematis dan ekologis.



Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian.

## BAB V

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis kestabilan, variasi parameter, serta simulasi numerik pada model plankton tiga peubah, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Titik tetap koeksistensi  $(c^*, p^*, z^*)$  memiliki kestabilan yang dipengaruhi oleh parameter  $B$ . Perubahan nilai  $B$  menyebabkan perubahan tanda bagian real nilai eigen sehingga memengaruhi kestabilan sistem.
2. Untuk  $1,60 \leq B \leq 1,75$ , sistem bersifat stabil karena  $\text{Re}(\lambda_{\max}) < 0$ . Sedangkan untuk  $B \geq 1,80$ , sistem menjadi tidak stabil karena  $\text{Re}(\lambda_{\max}) > 0$ .
3. Nilai kritis bifurkasi Hopf diperoleh sebesar:

$$B_c \approx 1,78,$$

yaitu ketika  $\text{Re}(\lambda_{\max})$  mendekati nol dan terjadi perubahan kestabilan sistem.

4. Untuk  $B < B_c$ , sistem bersifat fokus stabil dengan trajektori spiral menuju titik tetap. Sebaliknya, untuk  $B > B_c$ , sistem menjadi fokus tidak stabil dan trajektori menjauhi titik tetap. Pada  $B > B_c$ , muncul *limit cycle* stabil yang menunjukkan terjadinya bifurkasi Hopf superkritis, yaitu perubahan dari keadaan setimbang stabil menuju osilasi periodik stabil.
5. Diagram bifurkasi numerik menunjukkan tiga fase dinamika, yaitu stabil untuk  $B < 1,79$ , osilasi periodik untuk  $1,79 < B < 4,35$ , dan kepunahan fitoplankton untuk  $B > 4,35$ .

## 5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, beberapa saran yang dapat dipertimbangkan untuk pengembangan penelitian selanjutnya, yaitu:

1. Penelitian ini menggunakan model plankton tiga peubah dengan parameter tetap. Untuk penelitian selanjutnya, disarankan untuk mengembangkan model dengan menambahkan faktor lain seperti nutrien, suhu, atau pengaruh lingkungan eksternal sehingga model menjadi lebih realistis dalam menggambarkan dinamika ekosistem perairan.
2. Pada penelitian ini, analisis difokuskan pada variasi parameter  $B$  sebagai parameter bifurkasi. Penelitian selanjutnya dapat mengkaji pengaruh parameter lain, seperti laju predasi atau mortalitas, untuk melihat kemungkinan munculnya jenis bifurkasi lain atau dinamika yang lebih kompleks.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abbasi, M., Din, Q., Albalawi, O., Niaz, R., Alomair, M., & Alomair, A. (2024). Analysis of the stability and chaotic dynamics of an ecological model. *Complexity*, 2024.
- Calbet, A., & Landry, M. (2004). Phytoplankton growth, microzooplankton grazing, and carbon cycling in marine systems. *Limnology and Oceanography*, 49.
- Curtu, R., Mantilla, R., Fonley, M., Cunha, L., Small, S., Jay, L., & Krajewski, W. (2014). An integral-balance nonlinear model to simulate changes in soil moisture, groundwater and surface runoff dynamics at the hillslope scale. *Advances in Water Resources*, 71, 125–139.
- Diaz, R. J., & Rosenberg, R. (2008). Spreading dead zones and consequences for marine ecosystems. *Science*, 321(5891), 926–929.
- Fehlberg, E. (1969). *Low-order classical Runge–Kutta formulas with stepsize control*. NASA Technical Report R-315.
- Haiman, Z., Zielinski, D., Koike, Y., Yurkovich, J., & Palsson, B. (2020). MASSpy: Building, simulating, and visualizing dynamic biological models in Python using mass action kinetics. *PLoS Computational Biology*, 17.
- Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2013). *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic Press.
- Holling, C. S. (1959). Some characteristics of simple types of predation and parasitism. *The Canadian Entomologist*, 91(7), 385–398.
- Khan, A., & Javaid, M. (2021). Discrete-time phytoplankton–zooplankton model with bifurcations and chaos. *Advances in Difference Equations*, 2021, 1–30.
- Kumar, J., Reddy, S., & Suguna, T. (2020). Role of plankton in aquaculture. *International Journal of Current Microbiology and Applied Sciences*, 9, 2848–2851.

- Kumar, D. (2024). Bifurcations of phase portraits and chaotic behaviors of the (2+1)-dimensional double-chain DNA system with beta derivative: A qualitative approach. *Heliyon*, *10*, e34421.
- Kuznetsov, Y. (2023). *Elements of applied bifurcation theory*. Applied Mathematical Sciences.
- Linge, S., & Langtangen, H. (2018). *Programming for computations – Python: A gentle introduction to numerical simulations with Python*.
- Mahida, U. N. (1993). *Pencemaran air dan pemanfaatan limbah industri*. PT RajaGrafindo Persada.
- Mandal, P., Kar, T. K., & Samanta, S. (2024). Numerical methods for nonlinear dynamical systems with applications. *Journal of Applied Mathematics*, 2024.
- Mann, K. H., & Lazier, J. R. N. (2006). *Dynamics of marine ecosystems* (3rd ed.). Blackwell Publishing.
- Mason, C. F. (1981). *Decomposition studies in biology* (No. 75). The Edward Arnold Ltd.
- Murray, J. D. (2002). *Mathematical biology I: An introduction* (3rd ed.). Springer.
- Mondal, S., Samanta, G., & De la Sen, M. (2022). Dynamics of oxygen-plankton model with variable zooplankton search rate in deterministic and fluctuating environments. *Mathematics*, *10*(10), 1641.
- Naselli-Flores, L., & Padisák, J. (2022). Ecosystem services provided by marine and freshwater phytoplankton. *Hydrobiologia*, *850*, 2691–2706.
- Ochunkwo, O., Obinwanne, E., & Olaniyi, M. (2023). Stability and Hopf bifurcation analysis of periodic solutions of a Duffing equation. *Scholars Journal of Physics, Mathematics and Statistics*.
- Perrusquía, A. (2022). Robust state/output feedback linearization of direct drive robot manipulators: A controllability and observability analysis. *European Journal of Control*, *64*, 100612.
- Rahman, M., Setiawan, D., & Yusuf, M. (2023). Zooplankton community dynamics as indicators of aquatic ecosystem health. *Aquatic Ecology Research*, *45*(2), 155–170.
- Roesch, E., & Stumpf, M. (2019). Parameter inference in dynamical systems with co-dimension 1 bifurcations. *Royal Society Open Science*, *6*.

- Schröder, B. (1999). Ordinary differential equations. In *Applied numerical methods using Matlab®*.
- Shuai, Z., Peng, Y., Liu, X., Li, Z., Guerrero, J., & Shen, Z. (2019). Parameter stability region analysis of islanded microgrid based on bifurcation theory. *IEEE Transactions on Smart Grid*, *10*, 6580–6591.
- Strogatz, S. H. (2015). *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering* (2nd ed.). Westview Press.
- Wiggins, S. (2003). *Introduction to applied nonlinear dynamic systems and chaos*. Springer-Verlag.
- Yussof, F., Maan, N., & Reba, N. (2020). Mathematical analysis of plankton population dynamics. *Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences*, *16*, 109–114.