ANALISIS SIMULASI PENANGANAN KESALAHAN SPESIFIKASI STRUKTUR GALAT PADA *GENERALIZED LEAST SQUARES* (GLS) MENGGUNAKAN *FEASIBLE GENERALIZED LEAST SQUARES* (FGLS)

Skripsi

Oleh

CHIKA AYU SEFIRA
NPM. 2217031075

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

ABSTRACT

SIMULATION ANALYSIS OF HANDLING SPECIFICATION ERRORS IN THE GENERALIZED LEAST SQUARES (GLS) USING FEASIBLE GENERALIZED LEAST SQUARES (FGLS)

By

Chika Ayu Sefira

Estimating regression parameters using the Ordinary Least Squares (OLS) method becomes less efficient when dealing with autocorrelated errors. The Generalized Least Squares (GLS) method can be a solution, but its application is hindered by the often-unknown error variance in the actual model. As an alternative, the Feasible Generalized Least Squares (FGLS) method is used to estimate the correlation coefficient (ρ) required in GLS. This study aims to evaluate the performance of FGLS in addressing autocorrelated errors and then compare it with the GLS and OLS methods based on the Root Mean Square Error (RMSE) value. The results show that FGLS is more effective in handling cases of autocorrelation. However, when ρ approaches zero, the OLS method actually outperforms the other methods. Thus, it can be concluded that the effectiveness of FGLS in handling autocorrelated errors depends heavily on the accuracy of the ρ estimate.

Keywords: *Feasible Generalized Least Squares*, *Generalized Least Squares*, *Ordinary Least Squares*, Autocorrelation

ABSTRAK

ANALISIS SIMULASI PENANGANAN KESALAHAN SPESIFIKASI STRUKTUR GALAT PADA *GENERALIZED LEAST SQUARES* (GLS) MENGGUNAKAN *FEASIBLE GENERALIZED LEAST SQUARES* (FGLS)

Oleh

Chika Ayu Sefira

Estimasi parameter regresi menggunakan metode *Ordinary Least Squares* (OLS) menjadi kurang efisien ketika dihadapkan pada masalah galat berautokorelasi. Metode *Generalized Least Squares* (GLS) dapat menjadi solusi, namun penerapannya terkendala oleh variansi galat yang sering kali tidak diketahui pada model aktual. Sebagai alternatif, metode *Feasible Generalized Least Squares* (FGLS) digunakan untuk mengestimasi koefisien korelasi (ρ) yang diperlukan dalam GLS. Penelitian ini bertujuan untuk mengevaluasi performa FGLS dalam mengatasi galat berautokorelasi, lalu membandingkannya dengan metode GLS dan OLS berdasarkan nilai *Root Mean Square Error* (RMSE). Hasil penelitian menunjukkan bahwa FGLS memiliki efisiensi yang lebih tinggi dalam menangani kasus autokorelasi. Meski demikian, ketika nilai ρ mendekati nol, metode OLS justru menunjukkan performa yang lebih unggul dibandingkan metode lainnya. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa efektivitas FGLS dalam mengatasi galat berautokorelasi sangat bergantung pada ketepatan estimasi nilai ρ.

Kata-kata kunci: *Feasible Generalized Least Squares*, *Generalized Least Squares*, *Ordinary Least Squares*, Autokorelasi

ANALISIS SIMULASI PENANGANAN KESALAHAN SPESIFIKASI STRUKTUR GALAT PADA *GENERALIZED LEAST SQUARES* (GLS) MENGGUNAKAN *FEASIBLE GENERALIZED LEAST SQUARES* (FGLS)

CHIKA AYU SEFIRA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

Judul Skripsi : **ANALISIS SIMULASI PENANGANAN KESALAHAN SPESIFIKASI STRUKTUR GALAT PADA *GENERALIZED LEAST SQUARES* (GLS) MENGGUNAKAN *FEASIBLE GENERALIZED LEAST SQUARES* (FGLS)**

Nama Mahasiswa : Chika Ayu Sefra

Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031075**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Drs. Mustofa, M.A., Ph.D.	**Dr. Bernadhita H. S. U, S.Si., M.Sc.**
NIP. 195701011984031020	NIP. 199206302023212034

2. Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama
FMIPA Universitas Lampung

Mulyono, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP. 197406112000031002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	:	**Prof. Drs. Mustofa, M.A., Ph.D.**	....
Sekretaris	:	**Dr. Bernadhita H. S. U, S.Si., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Edwin Russel, S.E., M.Sc.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **21 Mei 2026**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Chika Ayu Sefira**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031075**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Analisis Simulasi Penanganan Kesalahan Spesifikasi Struktur Galat Pada *Generalized Least Squares* (GLS) Menggunakan *Feasible Generalized Least Squares* (FGLS)**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 21 Mei 2026
Penulis,

Chika Ayu Sefira
NPM. 2217031075

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Chika Ayu Sefira yang lahir di Gedong Tataan pada tanggal 8 September 2005. Penulis merupakan anak kedua dari pasangan Bapak R. Efendi dan Ibu E. Yurianti. Penulis memiliki kakak laki-laki bernama Ramanda Efendi.

Penulis menempuh pendidikan Taman Kanak-Kanak di TK Sekar Wangi pada tahun 2011, kemudian menempuh pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri 2 Gedong Tataan pada tahun 2011-2017, Sekolah Menengah Pertama di SMP Negeri 1 Pesawaran pada tahun 2017-2020, dan pendidikan Sekolah Menengah Atas mengikuti program akselerasi di SMA Negeri 1 Gadingrejo pada tahun 2020-2022. Pada tahun 2022 penulis melanjutkan ke perguruan tinggi dan terdaftar sebagai Mahasiswi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas lampung melalui jalur SNMPTN.

Pada tahun 2023 penulis aktif di Unit Kegiatan Penerbitan Mahasiswa (UKPM) Teknokra dengan mengawalinya sebagai magang. Pada tahun 2024 penulis diamanahkan menjadi Redaktur Berita Cetak. Kemudian pada tahun 2025 penulis diamanahkan menjadi Pemimpin Redaksi Cetak. Pada Bulan Desember 2024 sampai Januari 2025, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Pusat Statistik (BPS) Kabupaten Pesawaran. Kemudian penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata pada Juli sampai Agustus 2025 di Kelurahan Segala Mider Kecamatan Tanjung Karang Barat Kota Bandar Lampung.

KATA INSPIRASI

”Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.”

(Q.S Al-Insyirah: 5-6)

”Apa yang melewatkanku tidak akan pernah menjadi takdirku, dan apa yang ditakdirkan untukku tidak akan pernah melewatkanku.”

(Umar bin Khattab)

”Perbaiki sholatmu, maka Allah akan perbaiki hidupmu”

”And it’s fine to fake it ’til you make it
’Til you do, ’til it’s true”

(Taylor Swift)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan bahagia, saya persembahkan rasa terima kasih saya kepada:

Ayah, Bunda, dan Abangku Tercinta

Skripsi ini saya persembahkan kepada kedua orang tua dan abang tercinta yang selalu memberikan kasih sayang, bimbingan, serta pengorbanan yang tidak ternilai. Terima kasih atas doa yang tidak pernah putus, kesabaran yang tiada batas, dan dukungan moral maupun material selama proses pendidikan ini. Terima kasih telah menjadi alasan untuk terus melangkah, berjuang, dan tidak menyerah.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih atas bimbingan, dorongan, dan kesabaran yang diberikan sejak awal penyusunan hingga terselesaikannya skripsi ini. Semoga ilmu yang Bapak/Ibu berikan menjadi amal jariyah serta terus memberi manfaat bagi banyak orang.

Sahabat-sahabatku

Terima kasih atas dukungan, canda tawa, kebaikan, serta kebersamaan yang tidak ternilai selama ini. Kehadiran kalian membuat perjalanan ini lebih berwarna dan tak terlupakan

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Analisis Simulasi Penanganan Kesalahan Spesifikasi Struktur Galat Pada *Generalized Least Squares* (GLS) Menggunakan *Feasible Generalized Least Squares* (FGLS)” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Drs. Mustofa, M.A., Ph.D. selaku Pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

2. Ibu Dr. Bernadhita Herindri Samodera Utami, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Bapak Dr. Edwin Russel, S.E., M.Sc. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.

4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

5. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing akademik.

6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Ayah dan Bunda sebagai salah satu penyemangat penulis dalam menyelesaikan penelitian ini. Terima kasih telah sepenuh hati mengusahakan segalanya untuk penulis, mengisi penuh tangki cinta penulis sehingga penulis tidak kehausan kasih sayang dari luar rumah, memastikan penulis mendapatkan fasilitas dan pendidikan yang layak, selalu memberikan semangat, menjadi *support system* pertama, serta menunjukkan definisi 'rumah' yang sebenarnya kepada penulis. Terima kasih atas semua pengorbanan dan perjuangan yang tidak perlu diketahui orang lain. Semoga semua yang sudah dikorbankan dapat kembali berupa kebaikan yang beribu kali lipatnya, karena dibalik kesulitan pasti ada kemudahan.

8. Abang Manda sebagai salah satu pendukung penulis dalam menyelesaikan studi. Terima kasih telah menunjukkan 'arah' itu kepada penulis. Terima kasih banyak atas perjuangan dan pengorbanan yang telah diberikan kepada penulis, semoga semua yang tertunda dapat segera terealisasikan.

9. Adelia, Febi, dan Khaylila yang membersamai penulis bertumbuh sejak duduk di bangku SMP hingga kini, selalu mendengar keluh kesah penulis tanpa pernah menghakimi, dan senantiasa mendukung penulis. Terima kasih telah memberikan cinta yang unik bentuknya kepada penulis.

10. Diva, Reina, dan Aurora Sara sebagai teman yang selalu di samping penulis saat suka maupun duka, senantiasa menerima segala keterbatasan penulis, dan selalu menjadi garda terdepan untuk penulis. Terima kasih karena sudah membuktikan kepada penulis bahwa bentuk pertemanan yang tulus dalam dunia perkuliahan itu memang nyata adanya.

11. Teman-teman Region Smanding, orang-orang hebat yang tak pernah membuat penulis merasa kecil. Menjadi teman bertumbuh sedari SMA hingga saat ini, memberikan lingkungan yang positif dan menjadi pendorong bagi penulis untuk menjadi pribadi yang lebih baik lagi.

12. Teman-teman Jarpim dan Kadiv UKPM Teknokra 2025 yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Terima kasih telah membersamai penulis berproses dari magang hingga demisioner dan tak hentinya untuk terus mendukung penulis.

13. UKPM Teknokra dan orang-orang di dalamnya, yang telah memberikan kesempatan pada penulis untuk berkembang, mencoba pengalaman baru, lingkungan baru, serta ilmu yang luar biasa.

14. Teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika angkatan 2022.

15. Terakhir, untuk diri penulis sendiri. Terima kasih sudah bertahan sejauh ini, melewati banyaknya hambatan, dan belajar pada kesalahan-kesalahan di masa lalu. Terima kasih untuk terus hidup dan meyakini bahwa ketika badai berlalu, selalu ada pelangi yang indah.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 21 Mei 2026
Penulis,

Chika Ayu Sefira
NPM. 2217031075

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis regresi merupakan salah satu metode analisis data dalam statistika yang kerap digunakan untuk mengamati hubungan antara beberapa variabel dan meramal suatu variabel (Kutner et al, 2004). Istilah "regresi" pertama kali diperkenalkan oleh seorang antropolog dan ahli meteorologi terkenal dari Inggris, Sir Francis Galton (1822-1911). Dalam makalahnya yang bertajuk "*Regression toward mediocrity in hereditary stature*", yang dimuat dalam *Journal of the Anthropological Institute*, volume 15, tahun 1885. Galton menjelaskan bahwa dalam hal besarnya, biji keturunan cenderung tidak menyerupai biji induknya, namun lebih mendekati rata-rata, lebih kecil daripada induknya kalau induknya besar, begitupun sebaliknya (Draper & Smith, 1992). Tujuan analisis regresi adalah mengetahui besarnya hubungan antara sebuah variabel bebas dengan beberapa variabel tak bebas (Pasaribu et al, 2015).

Salah satu metode yang digunakan untuk mengestimasi parameter regresi adalah metode *Ordinary Least Squares* (OLS). OLS adalah salah satu metode estimasi parameter pada regresi yang diperoleh dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat. Di dalam estimasi OLS terdapat sifat BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*), dengan syarat asumsi klasik harus terpenuhi. Asumsi klasik tersebut di antaranya asumsi normalitas, asumsi homoskedastisitas, asumsi tidak autokorelasi, dan asumsi tidak multikolinearitas. Pada berbagai kasus, acapkali ditemukan kondisi dimana asumsi-asumsi tersebut tidak terpenuhi. Jika asumsi tidak terpenuhi akan mengakibatkan hasil estimasi parameter pada OLS kurang efisien (Dewayanti & Utami, 2021).

Umumnya penerapan analisis regresi pada data *time series*, kerap terjadi pelanggaran asumsi yaitu galat tidak saling bebas atau autokorelasi (Kusdarwati et al., 2022). Galat yang berautokorelasi menafsirkan bahwa terdapat variabel respon Y yang dipengaruhi oleh satu atau lebih faktor (variabel prediktor) penting yang tidak dimasukkan ke dalam model regresi (Sukestiyarno & Agoestanto, 2017). Oleh karena itu, untuk melihat apakah terjadi korelasi antar observasi ke- t dengan observasi sebelumnya (t - 1), perlu dilakukan uji autokorelasi . Pada dasarnya analisis regresi digunakan untuk melihat pengaruh variabel prediktor terhadap variabel respon, sehingga antar observasi data tidak boleh terjadi korelasi (Cessie & Houwelingen, 1992). Durbin dan Watson mengemukakan bahwa autokorelasi adalah hubungan antar objek pengamatan yang terpisah satu sama lain berdasarkan kurun waktu tertentu (King, 1981). Jika terjadi autokorelasi pada model regresi, mengakibatkan nilai dugaan parameter regresi yang diperoleh melesat dari nilai yang sebenarnya, sehingga dapat terjadi kesalahan dalam memprediksi nilai variabel respon yang diamati (Smadi & Abu Afouna, 2012).

Salah satu metode untuk menangani masalah autokorelasi adalah dengan menggunakan *Generalized Least Squares* (GLS) (Gujarati & Porter, 2009). Metode GLS (*Generalized Least Squares*) memiliki nilai lebih dibandingkan OLS dalam mengestimasi parameter regresi dan menurut Iswati, et al. (2014) bahwa parameter GLS lebih efisien dan stabil dibandingkan parameter OLS. Metode GLS dapat diterapkan jika diasumsikan variansi galat pada model diketahui. Namun dalam praktiknya, variansi galat pada model yang sebenarnya tidak diketahui sehingga metode yang tepat untuk diterapkan adalah metode *Feasible Generalized Least Squares* (FGLS) (Jacob et al., 2014).

Metode FGLS merupakan kekhususan dari metode GLS. Metode FGLS memberikan estimasi nilai koefisien korelasi yang digunakan pada Persamaan generalized yang diberikan oleh metode GLS untuk menghasilkan parameter (taksiran) yang lebih baik dari metode OLS (Payu, 2016). Dari beberapa pendekatan penaksir nilai koefisien korelasi metode FGLS, pada penelitian ini akan dianalisis menggunakan prosedur pendekaan Yule Walker. Metode Yule Walker (YW) adalah metode estimasi model Autoregresi yang menggunakan prinsip ekspektasi untuk mengestimasi parameter model (Nurhidayati, 2021).

Gunawan, *et al* (2024) dalam penelitiannya membandingkan tingkat efesiensi antara metode *Ordinary Least Squares* (OLS) dan *Partial Least Squares* (PLS). Hasil dari penelitian ini menunjukan metode OLS menjadi penduga yang efisien ketika tidak ada korelasi antar variable bebas. Selain itu, An (2021) dalam penelitiannya menggunakan estimator FGLS untuk memperkirakan model yang cepat dan kuat secara komputasi. Simulasi menunjukkan validitas model baru (dan penaksir) sementara empat contoh empiris menunjukkan keserbagunaannya.

Juprianto *et al* (2025) dalam penelitiannya menganalisis dampak dari struktur modal, profitabilitas, dan ukuran perusahaan terhadap nilai perusahaan pada perusahaan sektor industri dasar dan bahan kimia yang terdaftar di Bursa Efek Indonesia selama periode 2016 hingga 2020 dengan menggunakan FGLS pada data panel. Penelitian ini menghasilkan penggunaan FGLS terbukti tepat karena dapat mengatasi masalah heteroskedastisitas dan autokorelasi yang terdeteksi, sehingga menghasilkan estimasi parameter yang lebih akurat dan reliabel. Selain itu, Setyawan *et al* (2019) dalam penelitiannya mengkaji penggunaan metode GLS dalam mengatasi heteroskedastisitas dalam analisis regresi dan mengkaji perbandingan hasil estimasi menggunakan metode OLS dengan metode GLS pada kasus heteroskedastisitas. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode GLS mampu mempertahankan sifat estimator yaitu tak bias dan konsisten serta mampu mengatasi masalah heteroskedastisitas sehingga metode GLS lebih efektif dibandingkan metode OLS.

Penggunaan GLS pada model regresi linear dengan galat berautokorelasi juga terdapat dalam penelitian yang dilakukan Iswati, *et al* (2014). Hasil penelitiannya menunjukkan kriteria penduga parameter semakin kecil seiring bertambahnya ukuran sampel. Sementara itu, ulangan yang tinggi yang dilakukan dalam simulasi ini tidak berepengaruh signifikan terhadap kriteria penduga parameter. Pada pendugaan parameter model untuk semua penduga, penduga GLS lebih efisien dan stabil dibanding dengan penduga OLS kecuali untuk koefisen autokorelasi $-0.5 \leq \rho \leq -0.25$ dan $\rho = 0.5$ pada β_1, dan $\rho = -0.25$ pada β_2.

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan studi simulasi Monte Carlo. Simulasi Monte Carlo merupakan pembangkit angka acak yang kerap digunakan untuk peramalan, estimasi, dan analisis risiko. Sebuah simulasi menghitung berbagai iterasi model dengan berulang kali memilih nilai dari distribusi probabilitas yang telah ditentukan pengguna untuk variabel tidak pasti dan menggunakan nilai tersebut untuk model (Mun, 2006). Melalui simulasi Monte Carlo, akan dievaluasi performa antara metode OLS, GLS dengan misspesifikasi parameter, dan FGLS untuk melihat metode terbaik dalam mengatasi masalah autokorelasi. Perbandingan dilakukan berdasarkan kriteria Bias dan *Root Mean Square Error* (RMSE). RMSE berfungsi untuk mendapatkan besaran tingkat kesalahan dari hasil prediksi, dimana semakin kecil (mendekati 0) nilai RMSE maka semakin akurat nilai prediksinya. Serta bias digunakan untuk mengetahui seberapa dekat hasil estimasi parameter dengan parameter asli (Hamdanah & Fitrianah, 2021).

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana kinerja metode *Feasible Generalized Least Squares* (FGLS) dibandingkan dengan metode *Ordinary Least Squares* (OLS) dan *Generalized Least Squares* (GLS) misspesifikasi dalam menangani model regresi yang mengalami gangguan autokorelasi?
2. Bagaimana pengaruh nilai ρ pada kinerja metode FGLS, GLS, dan OLS?
3. Apakah variasi nilai parameter awal, khususnya nilai slope dan intersep, memberikan pengaruh signifikan terhadap efektivitas kinerja metode FGLS dalam mereduksi kesalahan estimasi?
4. Bagaimana pengaruh peningkatan jumlah replikasi terhadap stabilitas dan konsistensi hasil estimasi parameter pada metode FGLS?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan yang ingin dicapai pada penelitian ini adalah sebagai berikut

1. Menganalisis dan membuktikan keunggulan metode FGLS sebagai estimator alternatif yang lebih efisien dibandingkan OLS ketika terdapat masalah autokorelasi, melalui pendekatan estimasi ρ Yule-Walker.

2. Mengevaluasi tingkat stabilitas proses estimasi parameter β pada metode FGLS seiring dengan bertambahnya jumlah replikasi dalam simulasi.
3. Menguji ketahanan (*robustness*) kinerja metode FGLS terhadap berbagai nilai parameter slope dan intersep guna memastikan bahwa efisiensi metode ini tetap optimal dalam berbagai kondisi skenario parameter.
4. Membandingkan tingkat akurasi dan presisi antara metode OLS, GLS mis-spesifikasi, dan FGLS menggunakan indikator Bias, RMSE, dan *Relative Change*.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Memberikan rekomendasi metode estimasi yang tepat ketika menghadapi data *time series* yang terindikasi memiliki autokorelasi namun nilai parameternya tidak diketahui.
2. Menekankan pentingnya validasi asumsi model sebelum mengambil kesimpulan dari data, guna menghindari bias atau kesalahan estimasi.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Distribusi Probabilitas

Distribusi probabilitas adalah sebuah susunan secara keseluruhan kemungkinan hasil suatu percobaan yang disertai dengan probabilitas masing-masing hasil tersebut (Djarwanto, 1996). Terdapat 2 jenis distribusi probabilitas, di antaranya yaitu distribusi probabilitas diskrit dan distribusi probabilitas kontinu. Distribusi Probabilitas Kontinu merupakan distribusi peluang untuk variabel dengan skala kontinu, di mana didefinisikan ruang sampel terdiri dari titik sampel yang tak berhingga banyaknya dan sama banyaknya dengan banyak titik pada sepotong garis (Ruhiat, 2022).

Misalkan X variabel random kontinu, suatu fungsi f disebut fungsi peluang atau distribusi peluang X jika untuk setiap hasil x yang mungkin memenuhi,

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$

Karena X variabel random kontinu, maka distribusi peluangnya disebut distribusi peluang kontinu (Sudjana, 1996).

2.1.1 Distribusi Normal

Distribusi normal yang kerap disebut distribusi Gauss sesuai dengan nama penemunya. Distribusi normal merupakan distribusi yang krusial dalam statistika dan paling sering digunakan dalam statistika inferensial sebagai model distribusi peluang (Susetyo, 2012).

Jika variabel acak kontinu X mempunyai fungsi densitas pada $X = x$ dengan persamaan

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

dengan nilai x mempunyai batas $-\infty < x < \infty$, μ mempunyai batas $-\infty < x < \infty$, dan $\sigma^2 > 0$, maka dikatakan bahwa variabel acak X berdistribusi normal (Sudjana, 1996).

Sifat-sifat penting distribusi normal :

1. Grafiknya selalu berada di atas gambar datar x.
2. Bentuknya simetris terhadap $x = \mu$.
3. Mempunyai satu modus, pada $x = \mu$ sebesar $\frac{0{,}3989}{\sigma}$.
4. Grafiknya berasimtotik dengan sumbu datar x, mulai dari $x = \mu + 3\sigma$ ke kanan dan $x = \mu - 3\sigma$ ke kiri.
5. Luas daerah grafik selalu sama dengan satu unit persegi.

Untuk setiap μ dan σ, sifat-sifat distribusi normal selalu dipenuhi, yang membedakan hanya bentuk kurvanya saja, Jika σ semakin besar, maka kurva semakin rendah, begitu juga sebaliknya (Sudjana, 1996).

2.1.2 Distribusi Normal Baku

Bilamana peluang X dinyatakan dalam bentuk satuan skor baku (z), maka fungsi densitas diganti oleh skor baku menjadi;

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

dengan

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

dan nilai x mempunyai batas $-\infty < x < \infty$, μ mempunyai batas $-\infty < x < \infty$, $\sigma^2 > 0$.

Distribusi normal baku memiliki beberapa karakteristik yaitu:

1. Unimodal, yaitu distribusi normal hanya memiliki satu modus.
2. Simetris, yaitu distribusi normal jika dibelah menjadi dua bagian secara rata, setengah bagian pertama identik (sama dan sebangun) dengan setengah bagian yang lainnya.
3. Identik, yaitu ukuran gejala pusat (rata-rata, median, dan modus) pada distribusi normal besarnya sama antara rata-rata = median = modus, jika ditransformasi ke skor baku (z) = 0.
4. Asimtotik, yaitu data yang berada pada distribusi berasal dari skor terkecil hingga skor terbesar berasal dari data kontinu, maka tidak ada data yang memiliki peluang sama dengan nol. Dengan demikian kurva normal tidak pernah menyentuh absis atau garis mendatar.

Distribusi kurva normal yang standar (baku) memiliki rata-rata = 0 dan simpangan baku = 1 (Susetyo, 2012).

2.1.3 Distribusi *Student*

Distribusi *student* atau distribusi t, memiliki variabel acak kontinu sama seperti distribusi normal baku. Sampel acak diambil dari suatu populasi terhingga berukuran N yang berdistribusi normal mempunyai rata-rata (μ) dan simpangan baku (σ), untuk ukuran sampel acak n yang cukup besar rata-rata-rata $(\bar{X})$ akan mempunyai $\bar{X} = \mu$ dan simpangan baku $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$ untuk ukuran populasi tidak terhingga, sedangkan simpangan baku untuk populasi terhingga adalah

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}.$$

Perbedaan dalam perhitungan simpangan baku rata-rata untuk populasi yang terhingga dan tak terhingga terletak pada faktor koreksi yaitu $\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$.

Jumlah populasi (N) yang relatif besar dibandingkan dengan ukuran sampel (n) faktor koreksi akan mendekati 1, sehingga nilai variansi rata-rata populasi $\left(\sigma^2_{\bar{X}}\right)$ akan mendekati variansi dibagi sampel $\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Dengan demikian untuk populasi yang besar atau tak terhingga nilai normal baku (z) adalah

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Simpangan baku populasi pada umumnya jarang diketahui sehingga kesulitan untuk menggunakan rumus tersebut. Untuk mengatasinya diganti dengan menggunakan simpangan baku sampel (s) sebagai pengganti simpangan baku populasi (σ) yang berdistribusi normal, sehingga menghasilkan suatu distribusi sampel acak berasal dari populasi berdistribusi normal dengan formulasi sebagai berikut;

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}.$$

Jika rata-rata $(\bar{X})$ dan variansi s^2 diambil dari suatu populasi yang berdistribusi normal secara acak berukuran n mempunyai sebaran t dengan derajat kebebasan $(\mathrm{dk}) \ = n - 1$.

Distribusi t atau distribusi *student*, berfungsi sebagai pengganti distribusi normal baku dengan simpangan baku populasi yang tidak diketahui. Bentuk distribusi ini simetris sama dengan bentuk distribusi normal baku yang memiliki rata-rata $= 0$. Nilai t bertanda negatif jika berada di bawah nol atau di bawah rata-rata dan sebaliknya positif jika berada di atas nol atau rata-rata. Distribusi t memiliki peranan yang sangat krusial dalam statistika inferensial. Oleh karena itu distribusi t lebih dibuat dalam bentuk tabel untuk memudahkan pemakai dalam mencari harga t. Tabel distribusi t terdiri dari nilai-nilai t dengan derajat kebebasan $(\mathrm{dk} = \nu = n - 1)$ pada luas p dan nilai peluang α pada bagian yang lainnya yang dibatasi dengan t (Susetyo, 2012).

2.1.4 Distribusi Bimodal

Distribusi bimodal merupakan jenis distribusi data yang terjadi ketita terdapat dua puncak atau modus yang terpisah pada grafik distribusi. Hal ini menandakan terdapat dua kelompok atau kluster yang berbeda dalam data, di mana setiap puncak mewakili kelompok dengan karakteristik atau nilai rata-rata yang berbeda. Fenomena ini kerap terjadi dalam bermacam kondisi, di mana data terdiri dari dua subpopulasi yang secara statistik dapat dibedakan satu sama lain. Salah satu contoh klasik dari distribusi bimodal adalah data tinggi badan yang mencakup pria dan wanita dalam suatu populasi (Handayani *et al*, 2025).

Untuk mendeteksi distribusi bimodal, peneliti acapkali menggunakan histogram atau grafik kepadatan. Dengan menyajikan data menggunakan histogram, dua puncak yang terpisah akan menjadi jelas, menunjukkan dua kelompok utama dalam dataset. Jika distribusi bimodal terdeteksi, langkah selanjutnya adalah melakukan analisis lebih lanjut untuk memahami karakteristik dan perbedaan antara kedua kelompok tersebut. Dengan melibatkan pengelompokan data, perhitungan statistik deskriptif untuk setiap kelompok, dan analisis perbedaan antara kelompok. Selain itu, dalam analisis regresi atau metode statistik lainnya, distribusi bimodal dapat berpengaruh pada hasil dan interpretasi (Handayani *et al*, 2025).

Fungsi densitas distribusi bimodal dapat dinyatakan:

$$f(x) = w \cdot f_1(x) + (1 - w) \cdot f_2(x)$$

Jika kita menggunakan distribusi Normal, maka persamaannya menjadi:

$$f(x) = w \left(\frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \right) + (1 - w) \left(\frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2} \right)$$

dengan nilai x mempunyai batas $-\infty < x < \infty$, w mempunyai batas $0 < w < 1$, $f(x) \geq 0$ (Handayani *et al*, 2025).

2.2 Konsep Dasar Matriks

Menurut Usman dan Warsono (2009) :
Definisi 2.1
Matriks. Suatu rs matriks A adalah susunan angka-angka atau elemen dalam bentuk empat persegi dengan banyaknya baris r dan banyaknya kolom s. Suatu $r1$ vektor Y adalah suatu matriks dengan r baris dan satu kolom.
Suatu matriks A mempunyai unsur yang dilambangkan a_ij, dengan j menyatakan banyak kolom sedangkan i menyatakan banyak baris. Suatu matriks A dapat juga dinotasikan dengan :

$$A = [a_{ij}]$$

dan $i = 1, 2, ..., r$ dan $j = 1, 2, ..., s$

Contoh 2.1

Susunan berikut adalah matriks.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \pi & e \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}.$$

Pada contoh 2.1, ukuran matriks matriks bermacam besarnya. Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horisontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut. Matriks A mempunyai 3 baris dan 2 kolom sehingga ukurannya adalah 3 kali 2 (yang dituliskan 3×2). Angka pertama selalu menunjukkan banyaknya baris dan angka kedua menunjukkan banyaknya kolom. Jadi, matriks selebihnya dalam Contoh 2.1 berturut-turut mempunyai ukuran 1×4, 3×3, 2×1, dan 1×1. (Anton, 1995)

Definisi 2.2

Transpos Matriks. Jika suatu matriks A adalah berukuran $r \times s$, maka transpos A yang dilambangkan dengan A', adalah suatu matriks berukuran $s \times r$ dengan pembentukan melalui penukaran baris dengan kolom.

Contoh 2.2

Berikut adalah salah satu contoh matriks dan transposnya.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

(Anton, 1995)

Definisi 2.3

Penjumlahan Matriks. Penjumlahan dua matriks A dan B yang berukuran sama $r \times s$ dilambangkan dengan $A + B = C$ dengan C adalah matriks $r \times s$ dengan unsur-unsur

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

dan $i = 1, 2, ..., r$ dan $j = 1, 2, ..., s$

Contoh 2.3
Tinjaulah matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

sedangkan $A + C$ dan $B + C$ tidak didefinisikan karena memiliki ukuran matriks yang berbeda (Anton, 1995).

Definisi 2.4
Perkalian Matriks.Misalkan a_{ij} melambangkan unsur ke-ij dari matriks A berukuran $r \times s$. Demikian juga b_{jk} melambangkan unsur ke-jk dari matriks B berukuran $s \times t$, dengan $i = 1, 2, \dots, r$ dan $k = 1, 2, \dots, t$.
Perkalian matriks A dan B dilambangkan $AB = C$ dengan C adalah matriks berukuran $r \times t$ yang unsur-unsur ke-ik dinotasikan dengan

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} b_{jk}.$$

Contoh 2.4
Jika A adalah matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$2A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (-1)A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika B adalah sebarang matriks, maka $-B$ akan menyatakan hasil kali $(-1)B$. Jika A dan B adalah dua matriks yang ukurannya sama, maka $A - B$ didefinisikan sebagai jumlah $A + (-B) = A + (-1)B$ (Anton, 1995).

Definisi 2.5

Matriks Identitas. Matriks yang unsur-unsurnya 1 pada diagonal utamanya dan nol selainnya dinamakan matriks identitas dan dilambangkan dengan I_n.

Contoh 2.5

Berikut adalah salah satu contoh matriks identitas

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Anton, 1995).

Definisi 2.6

Invers Matriks, Matriks *singular* dan *nonsingular*. Matriks A dikatakan mempunyai invers, dilambangkan dengan A^{-1}, jika

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Jika suatu matriks mempunyai invers, maka dikatakan matriks tersebut *nonsingular*. Sebaliknya, jika tidak mempunyai invers, maka dikatakan matriks tersebut *singular*.

Contoh 2.6

Matriks

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

adalah invers dari

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

karena

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

dan

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

(Anton, 1995).

Teorema 2.1
Jika suatu matriks mempunyai invers, maka inversnya unik.
Bukti
Misalkan invers dari suatu matriks *nonsingular* A adalah B dan C, yaitu $AB = BA = I$ dan $AC = CA = I$, akan ditunjukkan bahwa $B = C$

$$B = BI = BAC = (BA)C = IC = C$$

■ Terbukti.

Teorema 2.2
Jika A dan B adalah *nonsingular* matriks, dan AB mempunyai invers, maka inversnya adalah $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Bukti
Diketahui bahwa

$$(AB)(AB)^{-1} = I,$$

tetapi juga

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

Dengan menggunakan Teorema 2.1 maka terbukti.

Definisi 2.7

Vektor n-komponen. Misalkan n adalah bilangan bulat positif dan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah sembarang unsur dari suatu medan $(field)F$. Maka vektor a berordo $n-tuple$ didefinisikan

$$\mathrm{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Definisi 2.8

Ruang vektor. Jika S_n adalah himpunan bagisan dari ruang vektor V_n. Jika himpunan S_n sendiri merupakan ruang vektor, yaitu bersifat tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar, maka S_n dinamakan ruang bagian dari V_n.

Definisi 2.9

Linear dependen dan peringkat (*rank*) suatu matriks. Jika A adalah $n \times s$ matriks $(s \leq n)$ dengan $a_1, a_2, \ldots, a_s$ menyatakan s dari $n \times 1$ vektor kolom dari A. Maka dikatakan s vektor $a_1, a_2, \ldots, a_s$ adalah linear dependen jika terdapat s elemen $k_1, k_2, \ldots, k_s$ tidak semua nol, sedemikian rupa sehingga

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_sa_s = 0.$$

Sebaliknya dikatakan bebas linear. Jika terdapat tepat $r \leq s$ himpunan vektor $a_1, a_2, \ldots, a_s$ yang bebas linear, sementara sisanya dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari r vektor yang bebas linear, maka dikatakan peringkat matriks A adalah r, atau dilambangkan rank$(A) = r$.

Definisi 2.10

Matriks Positif Definit. Suatu $n \times n$ matriks A dikatakan positif definit jika dan hanya jika syarat-syarat berikut terpenuhi:

$$A = A'$$

$y'Ay > 0$ untuk setiap vektor y dalam E_n.

Teorema 2.4

Jika A adalah $n \times n$ matriks positif definit, maka

$$\mathrm{rank}(A) = n$$

$a_{ij} > 0$ untuk semua $i = 1, 2, \ldots, n$.
$P'AP$ adalah positif definit untuk sembarang $n \times n$ matriks P yang nonsingular. (Usman & Warsono, 2009).

2.3 Model Linear Umum

Menurut Usman dan Warsono (2009) model linear umum dapat dinotasikan sebagai berikut

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{2.1}$$

dengan:

$Y_{n\times 1}$	: vektor peubah acak yang teramati.
$X_{n\times p}$	: matriks $n \times p$ dengan unsur-unsurnya diketahui, $n > p$.
$\beta_{p\times 1}$	: vektor parameter yang tidak diketahui.
$\varepsilon_{n\times 1}$	: vektor peubah acak tidak teramati, $E(\varepsilon) = 0$ dan $\mathrm{cov}(\varepsilon) = \Sigma$.

Kasus 1. Galat ε berdistribusi normal dengan nilai tengah nol dan kovarians matriks $\sigma^2 I$, dengan $\sigma^2 > 0$ dan tidak diketahui. Secara simbolik dilambangkan $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$.

Kasus 2. Distribusi ε tidak diketahui, tetapi mempunyai nilai tengah nol kovarians matriks $\sigma^2 I$, dengan $\sigma^2 > 0$ dan tidak diketahui. Diasumsikan ruang parameter untuk kasus-kasus di atas adalah Ω, dengan

$$\Omega = (\beta, \sigma^2), \beta \quad \text{dalam} \quad \varepsilon_p, \sigma^2 > 0. \tag{2.2}$$

Untuk kasus pertama, yang sering disebut teori normal, seringkali digeneralisasikan dengan $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 V)$, dengan $\sigma^2 > 0$ dan tidak diketahui serta matriks V matriks yang diketahui nilainya. Untuk kasus kedua seringkali asumsi-asumsi yang kaku disyaratkan seperti misalnya Y_i adalah independen dan berdistribusi identik dengan fungsi distribusi yang kontinu (Usman & Warsono, 2009).

2.4 *Ordinary Lesat Squares* (OLS)

Sifat-sifat estimator *Ordinary Least Square* (OLS) yang harus dipenuhi di antaranya linear, tak bias, memiliki varian yang minimum, yang biasa disebut sebagai BLUE (*Best, Linear, Unbias,Estimator*). Ketidakbiasan adalah salah satu sifat dari pengambilan sampel yang dilakukan secara berulang kali. Jika diperoleh sampel yang dilakukan secara berulang dan memperkirakan estimator OLS pada setiap sampel, maka mean pada sampel akan mendekati nilai dari populasi yang semestinya dari estimator, dengan menambahkan jumlah pada suatu sampel. Kolinearitas tidak akan merusak sifat varian minimum, tetapi ini tidak berarti jika varian estimator *Ordinary Least Square* (OLS) akan menjadi kecil di dalam suatu sampel tertentu.

Penduga OLS pada model regresi linear memiliki beberapa asumsi yang wajib untuk dipenuhi yang diantaranya yaitu :

1. $E(u_i) = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n$

   Pada asumsi ini menyatakan jika nilai harapan dari u_i adalah nol.

2. $$\begin{aligned} \text{cov}(u_i, u_j) &= E[u_i - E(u_i)][u_j - E(u_j)], \qquad i \neq j \\ &= E(u_i u_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Pada asumsi ini menyatakan jika faktor galat u_i dan u_j tidak memiliki korelasi, yang berarti asumsi ini dikenal dengan asumsi mengenai tidak terdapatnya korelasi berurutan atau yang biasa disebut dengan tidak adanya autokorelasi.

3. $$\begin{aligned} \text{var}(u_i|x_i) &= E[u_i - E(u_i)]^2 \\ &= E(u_i^2) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

   Pada asumsi ke-3 ini menyatakan jika varian dari u_i pada tiap X_i (yaitu varian bersyarat untuk u_i) merupakan angka konstan positif yang sama dengan σ^2, maksudnya dari asumsi ini dikenal dengan homoskedastisitas.

4. $\text{cov}(u_i, x_i) = E[u_i - E(u_i)][x_i - E(x_i)] = 0$

Pada asumsi ke-4 ini menyatakan jika faktor galat u_i dan variabel yang menjelaskan X_i tidak memiliki korelasi.

5. cov(x_i, x_j)

   Pada asumsi ke-5 ini menyatakan jika tidak adanya multikolinearitas di antara regressor, yang berarti di antara dua atau lebih variabel penjelas X tidak memiliki korelasi.

6. Regressor X bersifat tidak stokastik (Gunawan *et al*, 2024).

Jika asumsi tidak dipenuhi, maka akan menghasilkan kesimpulan yang tidak valid sehingga penduga OLS tidak bisa digunakan lagi dalam melakukan pendugaan parameter. Oleh karena itu diperlukan metode pendugaan lain untuk memperoleh hasil yang valid yaitu penduga GLS.

2.5 *Generalized Least Squares* (GLS)

Pendugaan parameter koefisien dengan *Generalized Least Squares* (GLS) dalam masalah autokorelasi memiliki sebaran komponen galat dalam model tidak bebas lagi dan juga tidak identik. Dalam kasus ini, penduga OLS bersifat tak bias dan tidak konsisten (Juanda, 2009). Secara khusus, diasumsikan bahwa ε adalah vektor acak dengan mean 0 dan varians $\sigma^2 I$ atau bahwa ε terdistribusi normal dengan sifat-sifat ini. Artinya, diasumsikan bahwa $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ tidak berkorelasi dengan varians umum. Dalam banyak situasi, salah satu atau kedua asumsi ini tidak realistis. Di sini, dipertimbangkan teknik untuk mengestimasi β ketika hanya diasumsikan bahwa varians ε adalah sebuah matriks V positif definit $n \times 1$. Untuk memulai, diasumsikan bahwa ε mengikuti distribusi normal multivariat. Fungsi kepadatan gabungan untuk $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ diberikan oleh :

$$f(\varepsilon; \beta, V) = \frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}|V|^{\frac{1}{2}}} exp(-\frac{1}{2})\varepsilon' V^{-1}\varepsilon. \tag{2.3}$$

Untuk mencari penduga maximum likelihood β harus dicari vektor β^* yang memaksimalkan fungsi. Karena V adalah positif definit maka V^{-1}. Oleh karena itu, menurut definisi $\varepsilon' V^{-1}\varepsilon$ adalah positif, dan oleh karena itu untuk memaksimalkan f harus meminimalkan $\varepsilon' V^{-1}\varepsilon$. Sebuah vektor β^* memuat vektor yang ditemukan

$$\varepsilon' V^{-1} \varepsilon = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*)' V^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*). \tag{2.4}$$

Sedemikian rupa sehingga minimum. Istilah ini mirip dengan jumlah kuadrat residual yang diminimalkan dalam kuadrat terkecil biasa. Oleh karena itu, notasikan dengan SS_{Res}. Untuk meminimalkan jumlah kuadrat residual, turunkan dengan $\boldsymbol{\beta}^*$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial SS_{Res}}{\partial \boldsymbol{\beta}^*} &= \frac{\partial (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*)' V^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \boldsymbol{\beta}^*} \\ &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}^*} [\mathbf{y}' V^{-1} \mathbf{y} - 2\boldsymbol{\beta}^{*'} \mathbf{X}' V^{-1} \mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}^{*'} \mathbf{X}' V^{-1} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sehingga dapat ditunjukkan bahwa turunannya adalah

$$\frac{\partial SS_{Res}}{\partial \boldsymbol{\beta}^*} = -2\mathbf{X}' V^{-1} \mathbf{y} + 2\mathbf{X}' V^{-1} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*. \tag{2.6}$$

Dengan menetapkan turunan ini sama dengan nol, persamaan ”normal” umum ini diperoleh

$$\mathbf{X}' V^{-1} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^* = \mathbf{X}' V^{-1} \mathbf{y}. \tag{2.7}$$

Solusi persamaan ini adalah

$$\mathbf{b}^* = (\mathbf{X}' V^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' V^{-1} \mathbf{y}. \tag{2.8}$$

Penduga $\mathbf{b}^*$ dinamakan penduga *Generalized Least Squares* (GLS). Penduga ini mirip dengan solusi OLS $\mathbf{b}$ dan tereduksi menjadi $\mathbf{b}$ ketika $V = \sigma^2 \mathbf{I}$. Matriks yang muncul dalam solusi umum memberikan jenis pembobotan yang memperhitungkan struktur varians-kovarians khusus dari ε. Aturan untuk varians dan nilai harapan dapat diaplikasikan untuk menunjukkan bahwa

$$E[\mathbf{b}^*] = \boldsymbol{\beta}$$

dan

$$\text{var } \mathbf{b}^* = (\mathbf{X}'V^{-1}\mathbf{X})^{-1}.$$

Secara khusus, dapat ditunjukkan bahwa $\mathbf{b}^*$ adalah penduga linear tak bias untuk $\boldsymbol{\beta}$. Untuk itu, perhatikan bahwa karena V dan V^{-1} adalah positif definit, sehingga dapat dituliskan sebagai

$$V^{-1} = \mathbf{R}'\mathbf{R} \text{ dan } V = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{R}')^{-1}$$

dimana $\mathbf{R}$ adalah matriks non singular. Model aslinya adalah

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{2.9}$$

Model ini dapat ditulis ulang dengan mengalikan dengan $\mathbf{R}$ untuk mendapatkan model yang direstrukturisasi

$$\mathbf{R}\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.10}$$

atau

$$\mathbf{v} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^* \tag{2.11}$$

dimana $\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{y}$, $\mathbf{Z} = \mathbf{R}\mathbf{X}$, dan $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}$. Vektor $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ mempertahankan status vektor galat acak dan $E[\boldsymbol{\varepsilon}^*] = 0$. Perhatikan struktur varians-kovarians $\boldsymbol{\varepsilon}^*$

$$\begin{aligned} \text{var } \boldsymbol{\varepsilon}^* &= \text{var } \mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \mathbf{R}V\mathbf{R}' \\ &= \mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{R}')^{-1}\mathbf{R}' \\ &= \mathbf{I}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Sebagai hasilnya, model terestrukturisasi memungkinkan untuk dilakukan estimasi $\boldsymbol{\beta}$ dalam konteks dimana galat tidak berkorelasi. Aplikasikan Teorema Gauss-Markov. Penduga

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{v} \tag{2.13}$$

adalah penduga BLUE untuk $\boldsymbol{\beta}$. Namun

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{b}} &= (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{v}\\ &= [(\mathbf{RX})'\mathbf{RX}]^{-1}(\mathbf{RX})'\mathbf{Ry}\\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{R}'\mathbf{RX})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{R}'\mathbf{Ry}\\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}\\ &= \mathbf{b}^*.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Dengan demikian, penduga GLS adalah penduga BLUE sebagaimana diklaim.

Dipertimbangkan model di mana variabel-variabel y saling berkorelasi atau memiliki varians yang berbeda-beda, sehingga $cov(\mathbf{y}) \neq \sigma^2\mathbf{I}$. Dalam regresi linear sederhana, nilai x_i yang lebih besar dapat menyebabkan nilai $var(y_i)$ yang lebih besar. Dalam regresi sederhana ataupun berganda, jika $y_1, y_2, \ldots, y_n$ terjadi secara berurutan dalam waktu, variabel-variabel tersebut biasanya berkorelasi. Untuk kasus-kasus seperti ini, di mana asumsi $cov(\mathbf{y}) = \sigma^2\mathbf{I}$ tidak lagi sesuai, digunakan model:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},\ E(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta},\ cov(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{V}, \tag{2.15}$$

dengan $\mathbf{X}$ berperingkat penuh (*full rank*) dan $\mathbf{V}$ adalah matriks positif definit yang diketahui. Penggunaan $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{V}$ memungkinkan pendugaan σ^2 dalam beberapa konteks yang sesuai. Matriks $\mathbf{V}$ berukuran $n \times n$ memiliki n elemen diagonal dan $\binom{n}{2}$ elemen di atas (atau di bawah) diagonal. Jika $\mathbf{V}$ tidak diketahui, maka jumlah parameter $\binom{n}{2} + n$ tersebut tidak dapat diestimasi hanya dari sampel sebanyak n observasi. Dalam beberapa aplikasi, struktur yang lebih sederhana untuk $\mathbf{V}$ diasumsikan agar dapat dilakukan estimasi (Rencher & Bruce, 2008).

2.6 Autokorelasi

Autokorelasi didefinisikan sebagai korelasi antara anggota serangkaian observasi yang diurutkan menurut waktu atau ruang (*data cross section*). Masalah autokorelasi muncul ketika salah satu asumsi klasik tidak terpenuhi, yaitu

$$Cov(u_i, u_j) \neq 0 \text{ dan } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Metode yang biasa digunakan untuk kasus autokorelasi adalah dengan mengasumsikan galat u_t mengikuti proses autoregresif. Autoregresif orde satu (*First Order Autoregressive*) adalah pola autoregresif yang paling umum digunakan untuk masalah pelanggaran asumsi ini (Ramanathan, 1993). Autoregresif orde satu yang dinotasikan dengan AR(1), ditulis sebagai berikut:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t;\ t = 1, 2, \ldots, T;\ \varepsilon_t \sim (0, \sigma_\varepsilon^2) \text{ dan } |\rho| < 1$$

ε_t diasumsikan mempunyai nilai tengah nol, varian konstan dan kovarian nol. Bentuk umum dari AR(1) adalah:

$$u_t = \sum_{r=0}^{\infty} \rho^r \varepsilon_{t-r} \tag{2.16}$$

dengan nilai tengah u_t adalah $E(u_t) = 0$, varian u_t adalah $Var(u_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} = \sigma_u^2$, dan kovarian u_t yaitu $E(u_t u_{t-s}) = \rho^s \sigma_u^2$; untuk $s \neq 0$ (Iswati, Syahni, & Maiyastri, 2014). Bentuk matriks varian-kovarian dari $\mathbf{u}$ adalah

$$Var(\mathbf{u}) = E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \ldots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \ldots & \rho^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \ldots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{V} \tag{2.17}$$

dan invers dari matriks definit positif $\mathbf{V}$ adalah

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

2.6.1 Mengoreksi Autokorelasi

Jika diketahui adanya autokorelasi, hal tersebut perlu diperbaiki karena estimator OLS menjadi tidak efisien. Metode perbaikan ini tergantung pada apakah koefisien korelasi (ρ) diketahui atau tidak.

Metode *Generalized Least Squares* (GLS) digunakan sebagai solusi ketika asumsi non-autokorelasi pada OLS terlanggar, yang mengakibatkan varians menjadi tidak minimum. Tujuan utamanya adalah mentransformasi model asli agar memenuhi asumsi klasik. Model dasar yang digunakan adalah $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$, di mana gangguan u_t mengikuti pola AR(1) yaitu $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$ dengan $-1 < \rho < 1$. Dalam metode ini, efisiensi estimator dikembalikan dengan cara menghilangkan korelasi antar gangguan sehingga diperoleh error baru (ε_t) yang bersifat *white noise*.

a. **Estimasi ρ diketahui**
   Apabila nilai koefisien autokorelasi (ρ) diketahui secara pasti, digunakan teknik *Quasi-Differencing*. Prosedur ini dilakukan dengan mengalikan persamaan satu periode sebelumnya ($t-1$) dengan ρ sehingga menjadi $\rho Y_{t-1} = \rho\beta_1 + \rho\beta_2 X_{t-1} + \rho u_{t-1}$. Persamaan tersebut kemudian dikurangkan dari model pada periode t, yang menghasilkan persamaan *Generalized Difference* sebagai berikut:

$$(Y_t - \rho Y_{t-1}) = \beta_1(1-\rho) + \beta_2(X_t - \rho X_{t-1}) + \varepsilon_t. \tag{2.19}$$

   Estimasi OLS yang dijalankan pada variabel yang telah ditransformasi ini akan menghasilkan estimator yang bersifat *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE).

b. **Estimasi ρ tidak diketahui**
   Dalam praktik empiris, ρ biasanya tidak diketahui dan harus diestimasi

menggunakan nilai sisaan (*residual*) dari regresi OLS awal ($\hat{u}_t$). Salah satu cara yang paling sederhana adalah menggunakan pendekatan statistik Durbin-Watson (d) dengan rumus:

$$\hat{\rho} \approx 1 - \frac{d}{2}. \tag{2.20}$$

Selain itu, ρ dapat diestimasi dengan melakukan regresi linear tanpa konstanta pada nilai sisaan: $\hat{u}_t = \rho\hat{u}_{t-1} + v_t$. Setelah nilai $\hat{\rho}$ diperoleh, transformasi data dilakukan serupa dengan metode GLS murni, namun hasilnya disebut sebagai *Feasible GLS* (FGLS) atau *Estimated GLS* (EGLS).

c. **Metode Iteratif Cochrane-Orcutt dan Hildreth-Lu**
Untuk meningkatkan akurasi estimasi ρ, dapat digunakan prosedur iteratif seperti Cochrane-Orcutt. Metode ini bekerja secara berulang: dimulai dari estimasi OLS, mendapatkan $\hat{\rho}$, melakukan transformasi data, hingga memperoleh nilai $\hat{\rho}$ yang konvergen atau stabil. Langkah regresinya mengikuti pola:

$$Y_t^* = \beta_1^* + \beta_2 X_t^* + \varepsilon_t. \tag{2.21}$$

Sementara itu, Metode Hildreth-Lu menggunakan pendekatan *grid search* dengan mencoba berbagai nilai ρ (misal: $0.1, 0.2, \ldots, 0.9$) dan memilih nilai yang menghasilkan nilai *Residual Sum of Squares* (RSS) terkecil melalui rumus:

$$RSS = \sum[(Y_t - \rho Y_{t-1}) - \beta_1^* - \beta_2(X_t - \rho X_{t-1})]^2. \tag{2.22}$$

d. **Transformasi Prais-Winsten untuk Sampel Kecil**
Salah satu kelemahan transformasi GLS adalah hilangnya observasi pertama karena tidak adanya data periode t-0. Pada sampel besar hal ini tidak menjadi masalah, namun pada sampel kecil dapat memengaruhi hasil. Transformasi Prais-Winsten digunakan untuk mempertahankan observasi pertama dengan rumus khusus:

$$Y_1^* = Y_1\sqrt{1-\rho^2} \quad \text{dan} \quad X_1^* = X_1\sqrt{1-\rho^2}. \tag{2.23}$$

Dengan menyertakan observasi pertama yang telah ditransformasi ini, efisiensi estimator pada sampel terbatas dapat ditingkatkan dibandingkan hanya menggunakan metode selisih pertama (*first difference*) (Gujarati & Porter, 2009).

2.7 *Feasible Generalized Least Squares* (FGLS)

Metode *Feasible Generalized Least Squares* (FGLS) merupakan pengembangan dari *Generalized Least Squares* (GLS) yang digunakan ketika matriks varians-kovarians gangguan tidak diketahui. Dalam kasus data runtun waktu yang memiliki gangguan autokorelasi, FGLS bertujuan untuk mentransformasi data agar memenuhi asumsi klasik Gauss-Markov sehingga estimator kembali bersifat *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE).

Dalam model regresi linear dengan galat yang saling berkorelasi, metode *Generalized Least Squares* (GLS) merupakan estimator yang ideal. Namun, Greene (2003) menyatakan bahwa GLS menjadi tidak layak (*not feasible*) jika matriks varians V mengandung parameter yang tidak diketahui dan harus diestimasi. Untuk mengatasi hal ini, struktur tertentu harus diterapkan pada model agar proses estimasi dapat dilanjutkan.

Masalah ini diselesaikan dengan melibatkan sekumpulan kecil parameter θ sedemikian rupa sehingga $V = V(\theta)$. Dalam kasus deret waktu (*time series*), struktur yang umum digunakan melibatkan parameter autokorelasi ρ, di mana ρ berperan sebagai wujud nyata dari parameter θ tersebut.

Salah satu pendekatan untuk mengestimasi parameter autokorelasi (ρ) dalam prosedur FGLS adalah menggunakan Persamaan Yule-Walker. Berdasarkan Brockwell & Davis (1991), metode Yule-Walker digunakan untuk mengestimasi parameter proses autoregresif dengan memanfaatkan hubungan antara fungsi autokovarians dan parameter model. Untuk proses AR(1), persamaan Yule-Walker dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{\rho}_{YW} = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2}. \tag{2.24}$$

Perbedaan utama metode ini dengan estimator OLS sisaan terletak pada penyebutnya, di mana Yule-Walker menggunakan seluruh jumlahan kuadrat sisaan $\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2$. Hal ini memberikan keunggulan teoretis berupa jaminan bahwa nilai $|\hat{\rho}| < 1$, sehingga model yang diestimasi akan selalu bersifat stasioner. Nilai $\hat{\rho}$ inilah yang kemudian digunakan untuk membangun matriks varians estimasi $\mathbf{V} = \widehat{\mathbf{V}}(\hat{\rho})$.

Setelah $\widehat{\mathbf{V}}$ terbentuk, estimator FGLS dihitung dengan rumus:

$$\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}} = (\mathbf{X}'\widehat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\widehat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{y}. \tag{2.25}$$

Agar $\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}$ (FGLS) setara secara asimtotik dengan $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ (GLS asli), dua kondisi limit probabilitas (*plim*) berikut harus terpenuhi:

1. $plim \left[\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}'\widehat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X} \right) - \left(\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} \right) \right] = 0$
2. $plim \left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{X}'\widehat{\mathbf{V}}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} \right) \right] = 0$ (Greene, 2003).

2.8 Evaluasi dan Perbandingan Kinerja

Pada permasalahan regresi, estimasi parameter regresi dan kesalahan standar (*standard error*) yang dihasilkan oleh model mengarahkan para peneliti untuk melakukan evaluasi terhadap model. Salah satu metode yang untuk melakukan penilaian kebaikan model regresi adalah *Root Mean Square Error* (RMSE). RMSE adalah aturan penilaian kuadrat yang mengukur besarnya rata-rata kesalahan (*error*) dari model. RMSE merupakan akar kuadrat dari rata-rata perbedaan kuadrat antara data hasil prediksi dan observasi aktual . Rumusan RMSE didefinisikan sebagai berikut:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n}} \tag{2.26}$$

(Alvin *et al*, 2020).

2.8.1 *Relative Change*

Relative Change adalah ukuran selisih antara dua besaran yang sejenis. Indikator ini digunakan untuk menyatakan perubahan absolut dalam bentuk persentase terhadap titik awal (Kaushik *et al*, 2025). *Relative Change* RMSE metode baru dalam memperbaiki metode sebelumnya dapat dihitung menggunakan rumus berikut:

$$\textit{Relative Change} = \frac{\text{RMSE}_{lama} - \text{RMSE}_{baru}}{\text{RMSE}_{lama}} \times 100\%. \tag{2.27}$$

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester genap tahun ajaran 2025/2026 yang bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Data Simulasi

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data simulasi melalui *software* SAS 9.4. Data yang dibangkitkan merupakan model regresi linear $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t$ dengan ukuran sampel $n = 100$, di mana seluruh proses ini diulang sebanyak 100, 500, dan 1000 kali replikasi. Dengan ketentuan kasus sebagai berikut :

- Kasus 1 : Variabel x_t berdistribusi normal $N(0,1)$ dengan komponen galat ε_t memiliki struktur autokorelasi $AR(1)$. Intersep $\beta_0 = 0,0001$ dan *slope* $\beta_1 = 0,0005$ dengan parameter autokorelasi yaitu $\rho_{true} = 0,8$ dan $\rho_{false} = 0,3$.
- Kasus 2 : Variabel x_t berdistribusi normal $N(0,1)$ dengan komponen galat ε_t memiliki struktur autokorelasi $AR(1)$. Intersep $\beta_0 = 1.000.000$ dan *slope* $\beta_1 = 500.000$ dengan parameter autokorelasi yaitu $\rho_{true} = 0,8$ dan $\rho_{false} = 0,3$.
- Kasus 3 : Variabel x_t berdistribusi normal $N(0,1)$ dengan komponen galat ε_t memiliki struktur autokorelasi $AR(1)$. Intersep $\beta_0 = 5$ dan *slope* $\beta_1 = 2$ dengan parameter autokorelasi yaitu $\rho_{true} = 0,999$ dan $\rho_{false} = 0,3$.
- Kasus 4 : Variabel x_t berdistribusi normal $N(0,1)$ dengan komponen galat ε_t memiliki struktur autokorelasi $AR(1)$. Intersep $\beta_0 = 5$ dan *slope* $\beta_1 = 2$ dengan parameter autokorelasi yaitu $\rho_{true} = 0,001$ dan $\rho_{false} = 0,3$.

- Kasus 5: Variabel x_t berdistribusi normal $N(0,1)$ dengan komponen galat ε_t memiliki struktur autokorelasi $AR(1)$. Intersep $\beta_0 = 5$ dan *slope* $\beta_1 = 2$ dengan parameter autokorelasi yaitu $\rho_{true} = 0,999$ dan $\rho_{false} = -0,001$.
- Kasus 6: Variabel x_t berdistribusi *t-student* $t(2)$ dengan komponen galat ε_t memiliki struktur autokorelasi $AR(1)$. Intersep $\beta_0 = 5$ dan *slope* $\beta_1 = 2$ dengan parameter autokorelasi yaitu $\rho_{true} = 0,8$ dan $\rho_{false} = 0,3$.
- Kasus 7: Variabel x_t berdistribusi bimodal $0,5N(-3,1) + 0,5N(3,1)$ dengan komponen galat ε_t memiliki struktur autokorelasi $AR(1)$. Intersep $\beta_0 = 5$ dan *slope* $\beta_1 = 2$ dengan parameter autokorelasi yaitu $\rho_{true} = 0,8$ dan $\rho_{false} = 0,3$.
- Kasus 8: Variabel x_t berdistribusi normal $N(0,1)$ dengan komponen galat ε_t memiliki struktur autokorelasi $AR(4)$. Intersep $\beta_0 = 5$ dan *slope* $\beta_1 = 2$ dengan parameter autokorelasi yaitu $\rho_{1(true)} = 0,4$, $\rho_{2(true)} = 0,2$, $\rho_{3(true)} = 0,1$, $\rho_{4(true)} = 0,1$ dan $\rho_{false} = 0,3$.

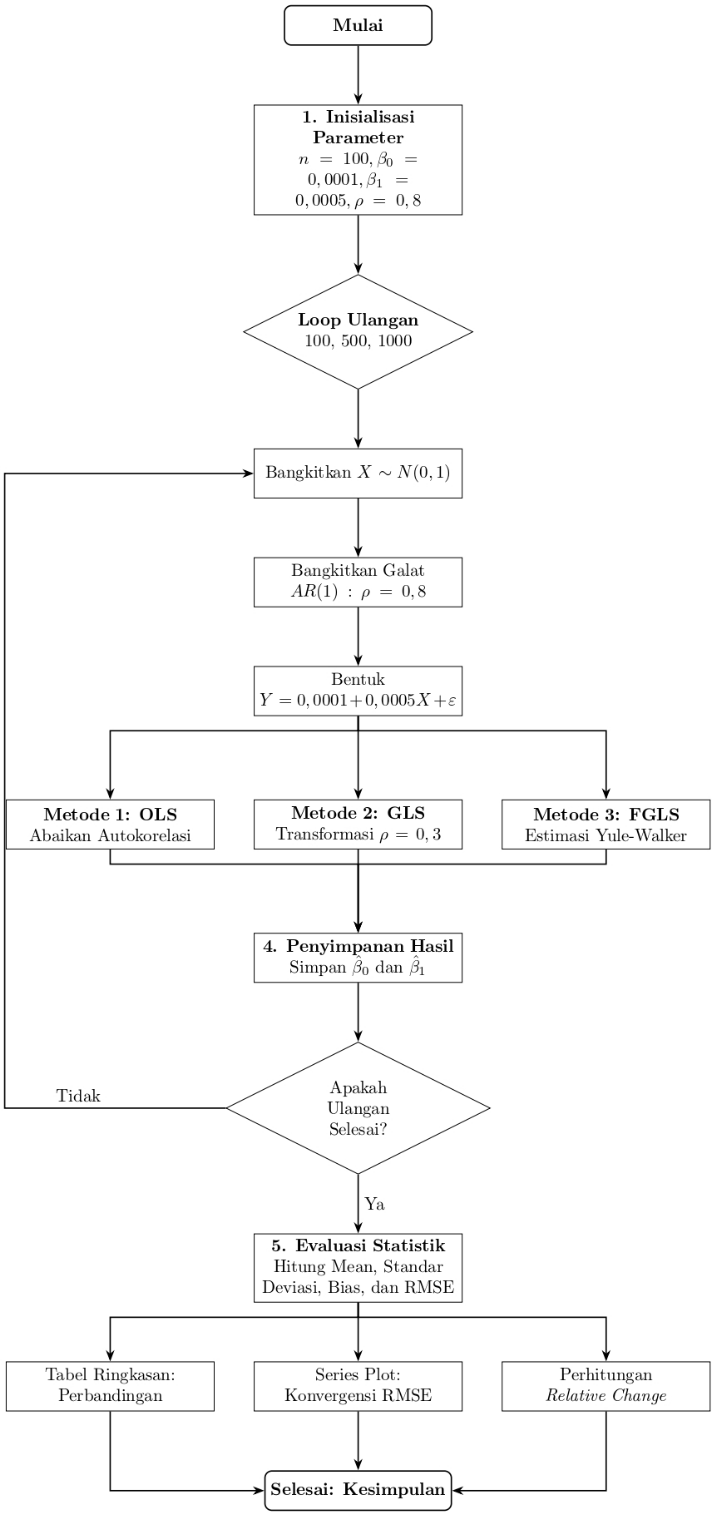
3.3 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

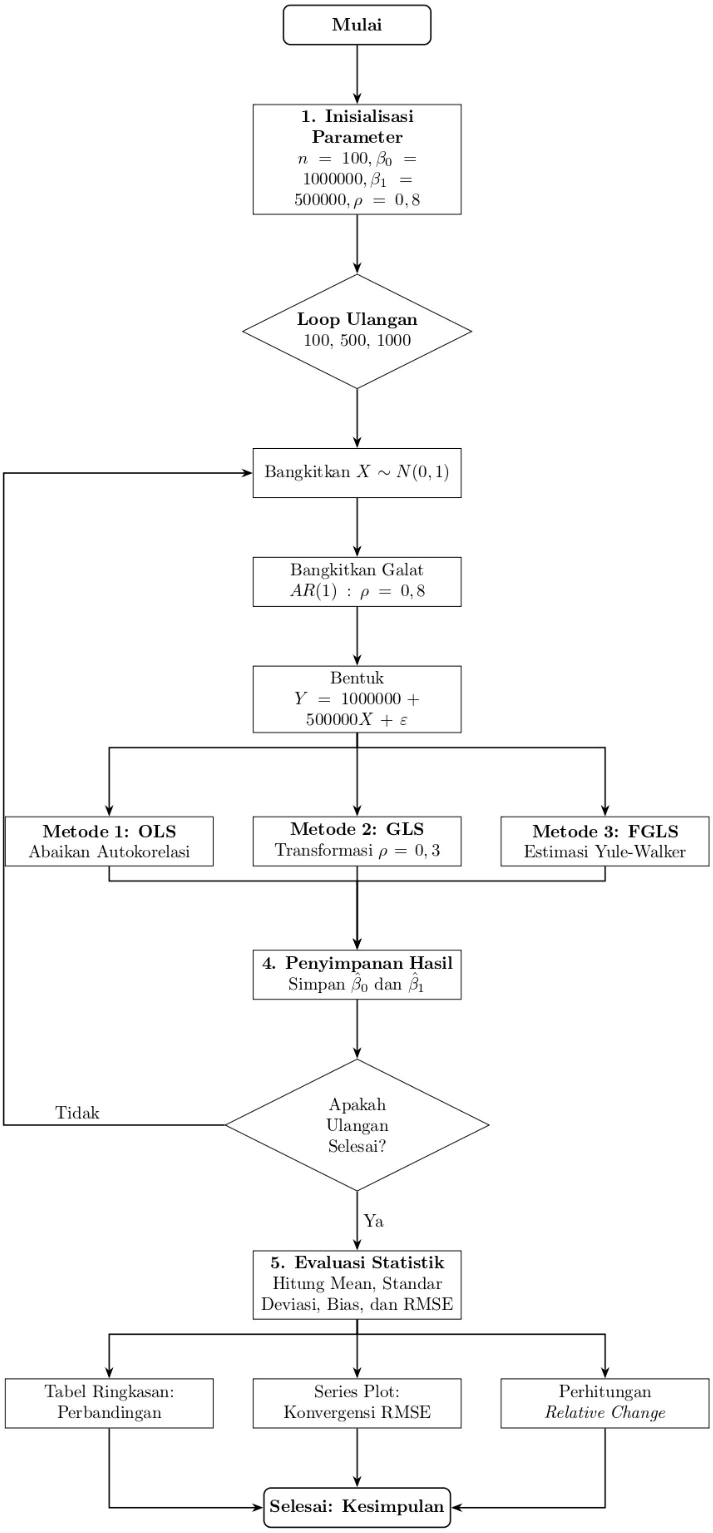
1. Penentuan Parameter Awal (Inisialisasi)
   - Menetapkan jumlah replikasi.
   - Menentukan ukuran sampel setiap data deret waktu.
   - Menetapkan nilai parameter asli (target) dan parameter autokorelasi.
   - Menentukan parameter autokorelasi asli ρ_{true} sebagai sumber masalah dalam data.
2. Pembangkitan Data
   - Membangkitkan variabel independen x_t menggunakan distribusi yang sudah ditentukan.
   - Membangkitkan galat (*error*) yang terinfeksi autokorelasi menggunakan yang sudah ditentukan.
   - Membentuk variabel dependen (y_t) melalui persamaan $\beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t$.

3. Estimasi Tahap 1: *Ordinary Least Squares* (OLS)
   - Melakukan estimasi parameter menggunakan metode OLS standar.
   - Skenario ini diasumsikan sebagai kontrol yang mengabaikan adanya struktur autokorelasi pada galat.
4. Estimasi Tahap 2: GLS dengan Kesalahan Spesifikasi (*Misspecification*)
   - Melakukan transformasi data menggunakan rumus Cochrane-Orcutt dan Prais-Winsten.
   - Memasukkan nilai parameter ρ secara manual.
   - Melakukan regresi pada data yang telah ditransformasi untuk mendapatkan nilai estimasi $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$.
5. Estimasi Tahap 3: *Feasible Generalized Least Squares* (FGLS)
   - Mengestimasi nilai ρsecara otomatis dari sisaan (residual) menggunakan metode Yule-Walker.
   - Melakukan transformasi data berdasarkan nilai $\hat{\rho}$ hasil estimasi tersebut.
   - Mendapatkan nilai estimasi $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$ yang telah dikoreksi secara empiris.
6. Pengulangan (*Looping Replications*)
   - Mengulangi langkah ke-2 hingga langkah ke-5 sebanyak tiga kali dengan skenario ulangan yang sudah ditentukan.
   - Menyimpan seluruh hasil estimasi $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$ dari ketiga metode ke dalam satu dataset gabungan untuk dianalisis.
7. Evaluasi dan Perbandingan Kinerja
   - Menghitung nilai mean untuk mengecek ketidakbiasan (*unbiasedness*).
   - Menghitung nilai bias untuk mengevaluasi ketakbiasan (*unbiasedness*).
   - Menghitung RMSE (*Root Mean Square Error*) dan *Relative Change* sebagai indikator utama efisiensi dan akurasi model dalam menghadapi kesalahan spesifikasi.
8. Visualisasi Data
   - Membuat grafik garis untuk melihat pengaruh penambahan jumlah ulangan terhadap kestabilan nilai RMSE.

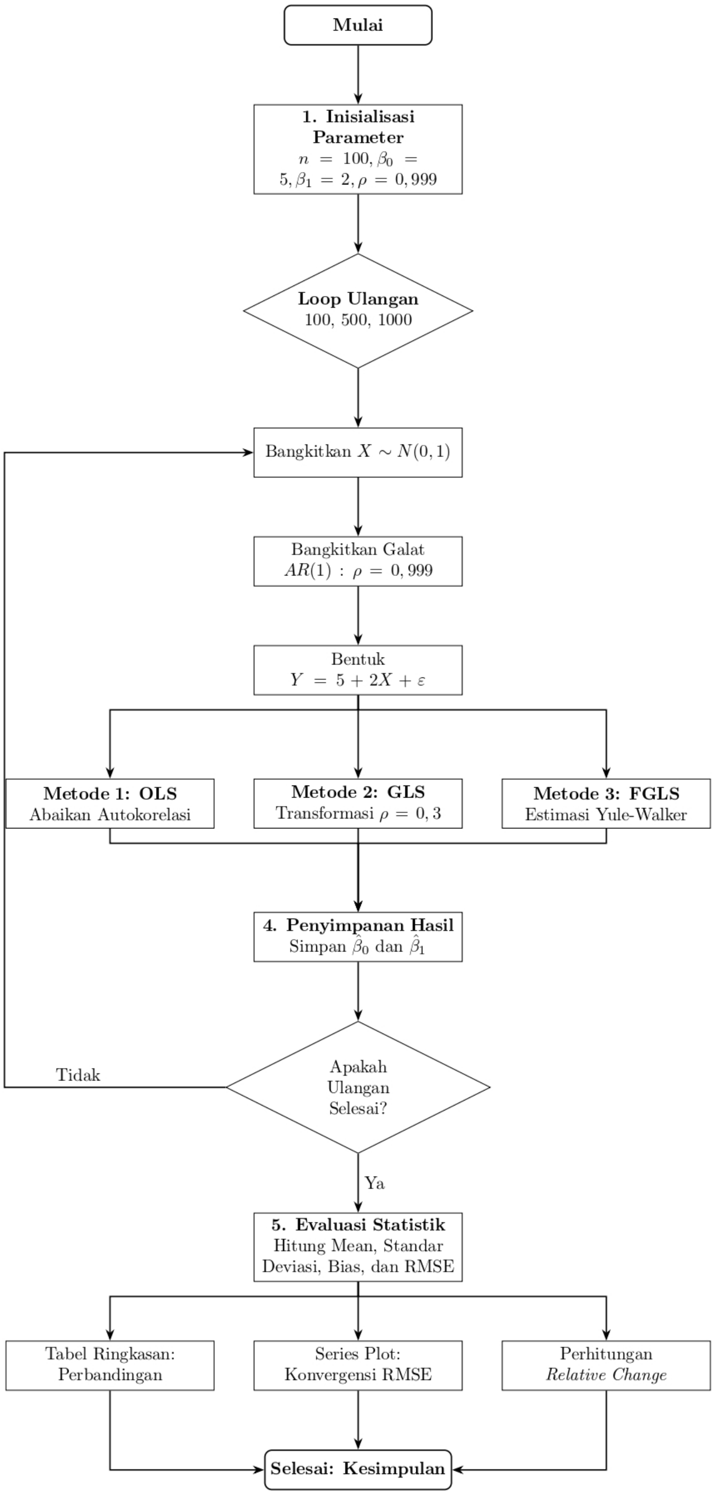
3.4 *Flowchart* Penelitian Kasus 1



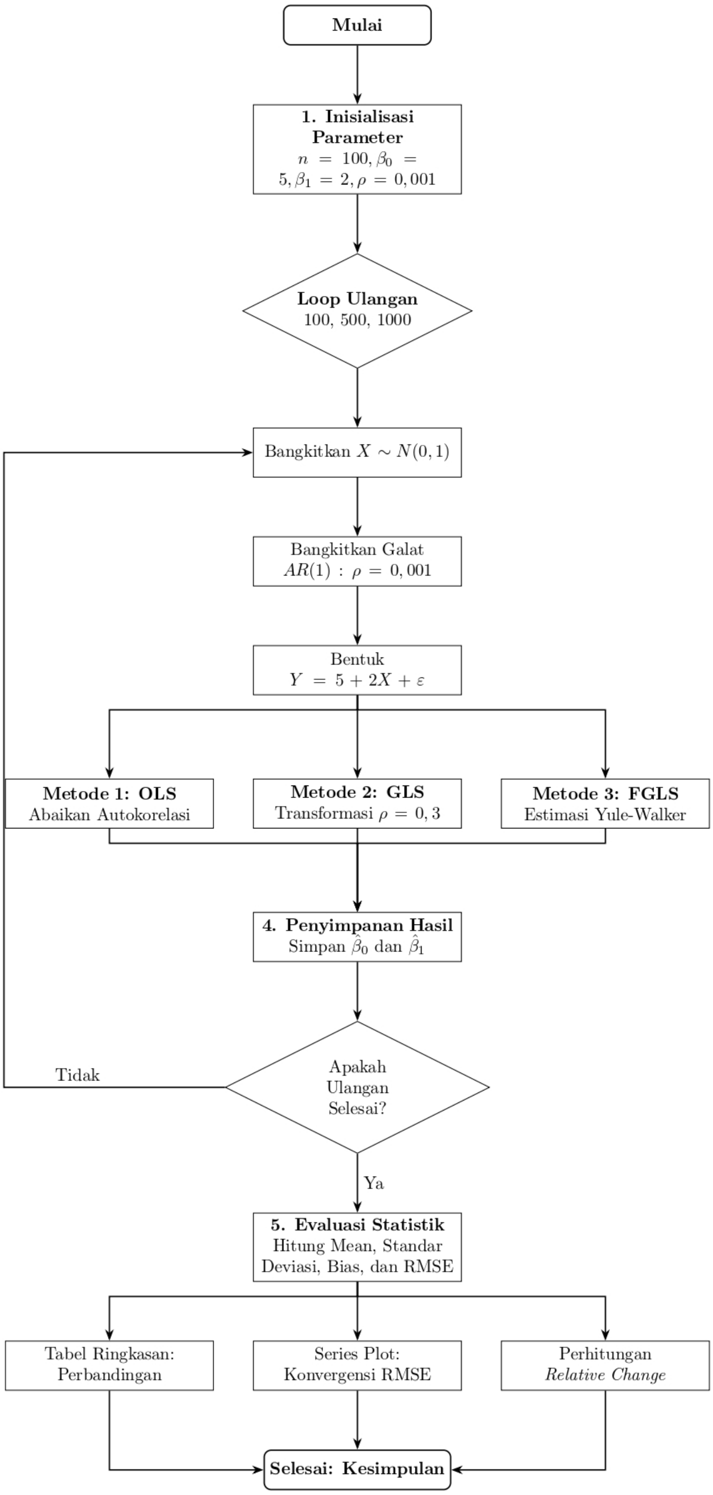
3.5 *Flowchart* Penelitian Kasus 2



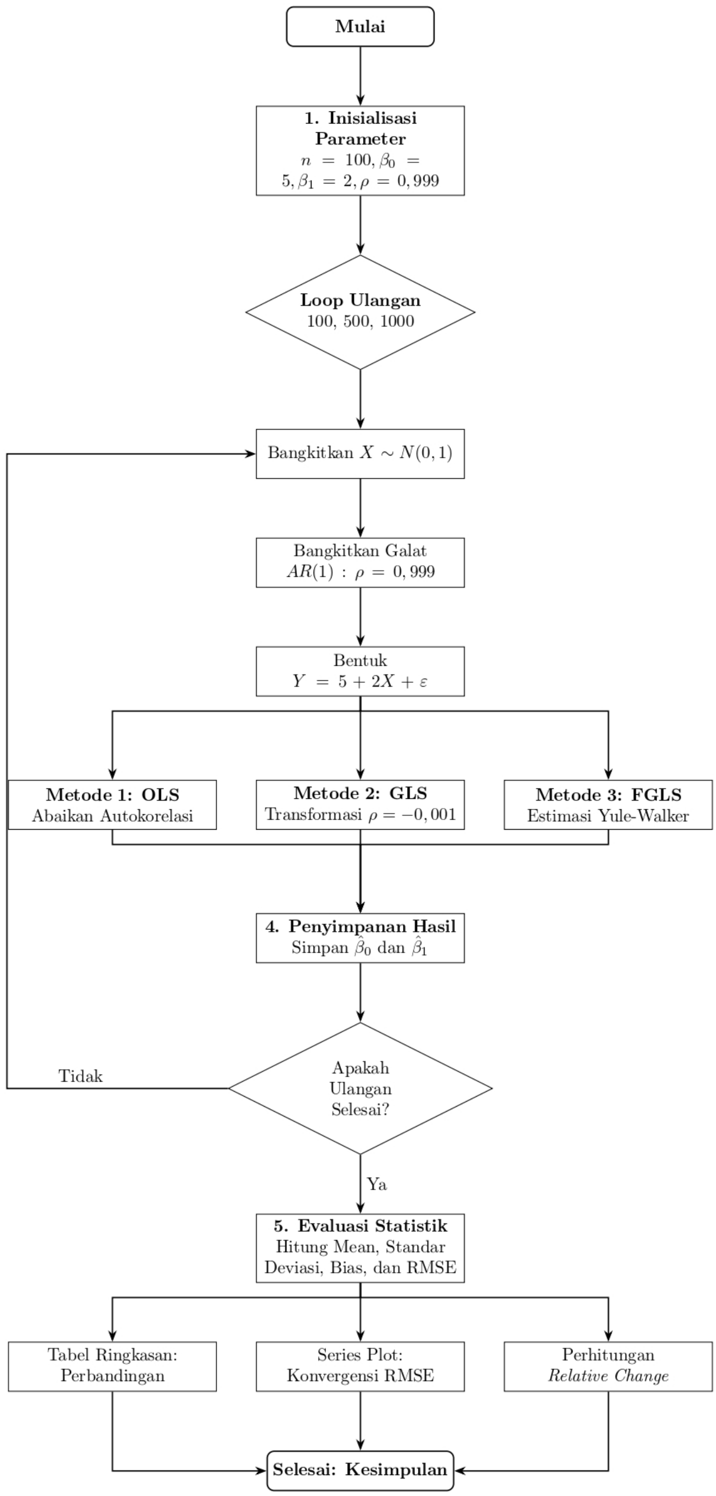
3.6 *Flowchart* Penelitian Kasus 3



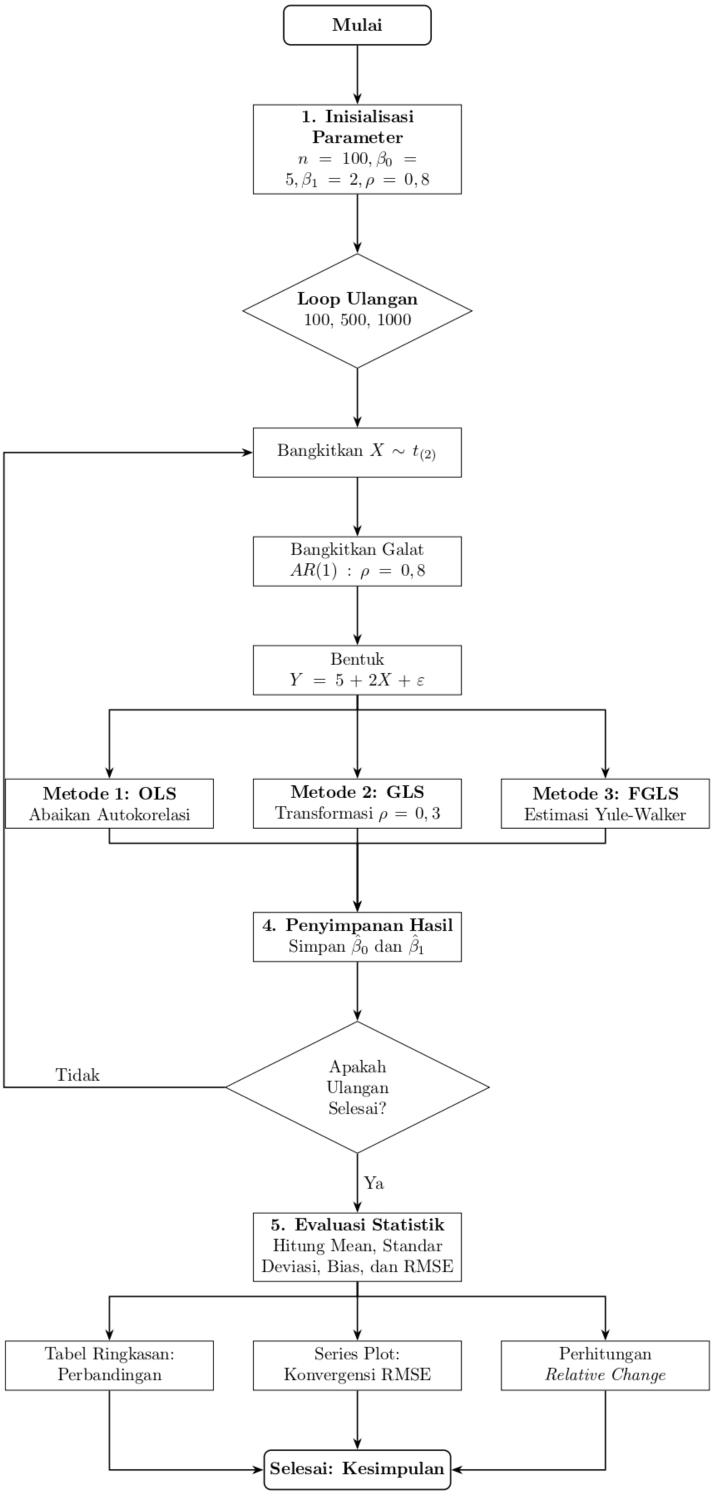
3.7 *Flowchart* Penelitian Kasus 4



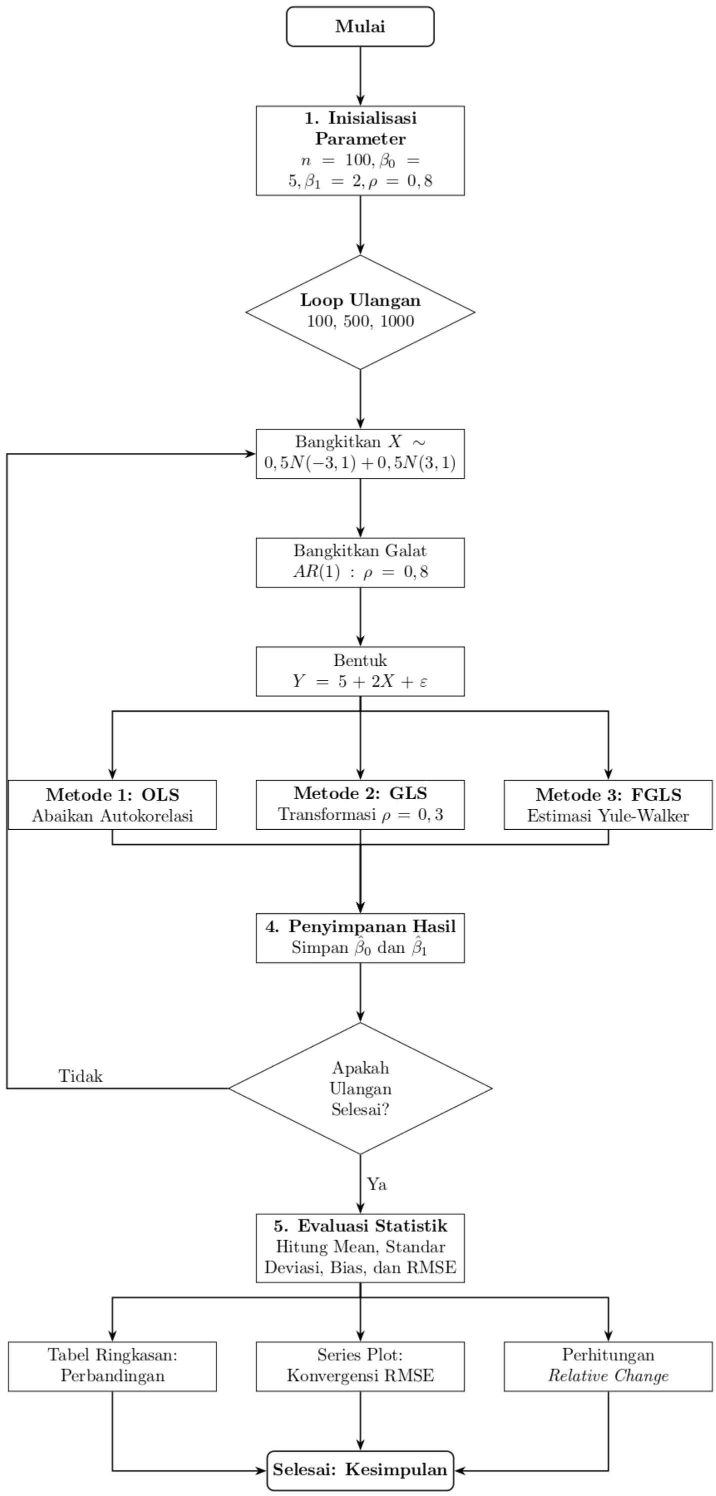
3.8 *Flowchart* Penelitian Kasus 5



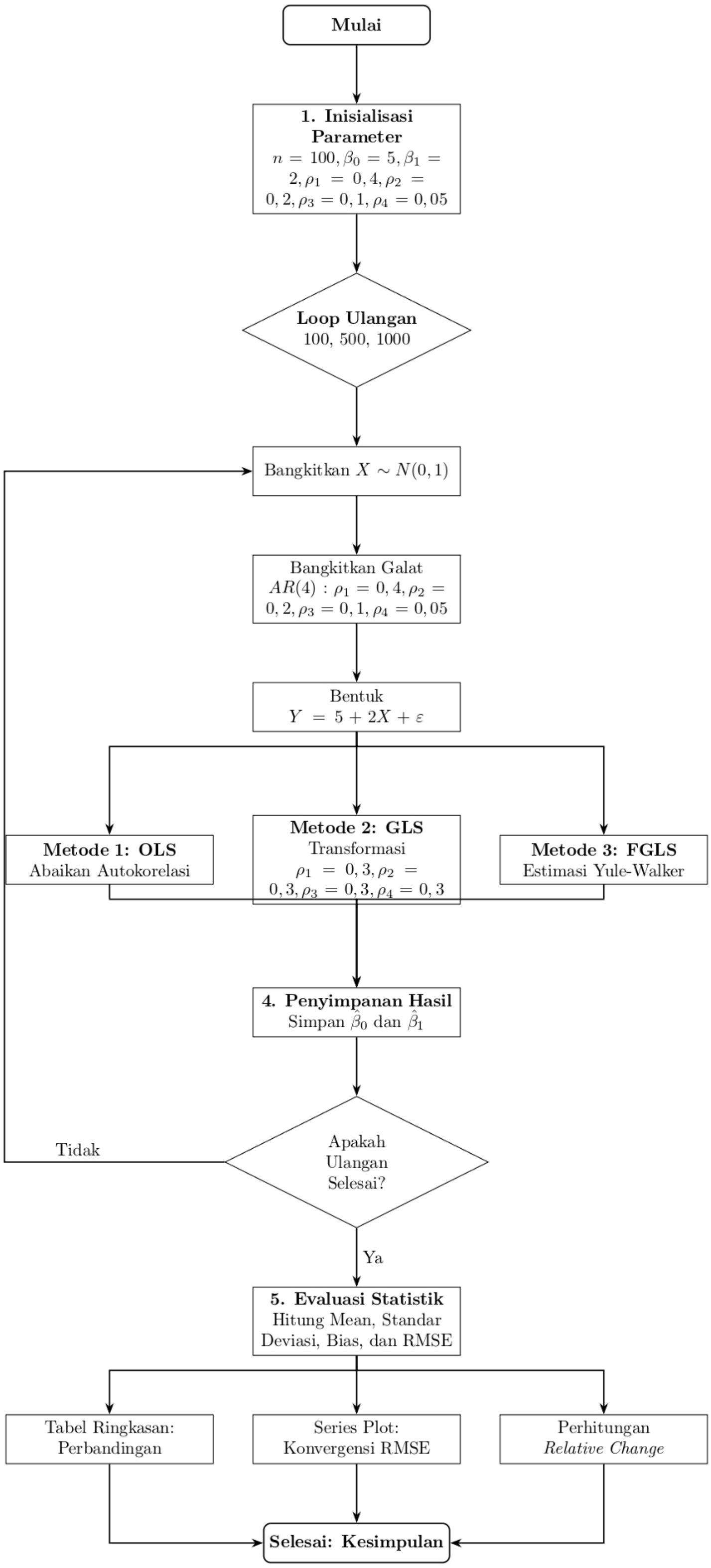
3.9 *Flowchart* Penelitian Kasus 6



3.10 *Flowchart* Penelitian Kasus 7



3.11 *Flowchart* Penelitian Kasus 8



BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan mengenai simulasi pengaruh kesalahan spesifikasi struktur galat pada estimator OLS, GLS, dan FGLS, dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Dalam kondisi gangguan seperti terdapat autokorelasi, OLS tetap bersifat unbiased, namun tidak lagi memenuhi asumsi BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*). Dalam menangani hal ini, FGLS melakukan transformasi data dengan mengestimasi matriks varians-kovarians, sehingga menghasilkan standar error yang lebih kecil dan statistik uji yang lebih valid. Kinerja FGLS relatif kebal terhadap berbagai distribusi variabel independen, dengan syarat variabel tersebut tidak berkorelasi dengan error. Namun, perlu diperhatikan bahwa dalam sampel kecil, keberadaan outlier pada X tetap dapat memengaruhi stabilitas estimasi, meskipun metode FGLS tetap lebih unggul daripada OLS dan GLS dalam menangani struktur error.

2. Semakin tinggi nilai ρ_{true} (mendekati 1), maka metode OLS dan GLS semakin tidak efisien. Hal ini mengonfirmasi bahwa kinerja metode FGLS jauh lebih signifikan pada data dengan derajat autokorelasi tinggi daripada pada data dengan ρ_{true} mendekati nol. Namun pada saat ρ_{true} mendekati nol, kinerja metode OLS justru lebih unggul dibandingkan metode FGLS.

3. Kinerja FGLS dalam mengestimasi slope dan intersep bersifat konstan terhadap besaran nilai parameter asli. Fokus utama FGLS terletak pada struktur gangguan (ϵ). Selama model spesifikasinya benar, efisiensi estimasi tidak bergantung pada besar atau kecilnya nilai β, melainkan pada seberapa tepat model mengestimasi struktur kovarians dari error tersebut.

4. Menambah jumlah replikasi dalam studi simulasi Monte Carlo akan memperhalus distribusi parameter dan menghasilkan rata-rata estimasi yang memusat pada nilai asli dengan varians yang semakin mengecil.

5.2 Saran

Mengingat performa FGLS yang sangat baik pada data simulasi, peneliti disarankan untuk menerapkan metode ini dengan memperhatikan nilai ρ pada data ekonomi atau ekonometrika riil yang bersifat *time series* sehingga sering kali memiliki masalah autokorelasi, agar diperoleh hasil estimasi parameter yang lebih akurat dan dapat dipercaya untuk pengambilan kebijakan.

DAFTAR PUSTAKA

Alvin, M. H., Atok, M., & Indiaryanto, M. 2020. Analisis Regresi untuk Memprediksi Tahanan Kapal Cepat. *Jurnal Sains Dan Seni ITS*. **9**(1): 87-94.

An, W. 2021. A Tale of Twin Dependence: A New Multivariate Regression Model and an FGLS Estimator for Analyzing Outcomes With Network Dependence. *Sociological Methods & Research*. **52**(4): 1947-1980.

Brockwell, P. J., & Davis, R. A. 1991. *Time series: Theory and methods* (2nd ed.). Springer-Verlag.

Cessie, S. L., & Houwelingen, J. V. 1992. Ridge estimators in logistic regression. *Journal of the Royal Statistical Society Series C: Applied Statistics*. **41**(1): 191–201.

Dewayanti, A.A., & Utami, H. 2021. Estimasi Robust Pada Model Regresi Untuk Menangani Outlier Dan Heteroskedastisitas. *Jurnal Matematika Thales (JMT)*. **3**(1): 1-12.

Djarwanto. 1996. *Mengenal Beberapa Uji Statistik dalam Penelitian*. Yogyakarta: Liberty.

Draper N & Smith H. 1992. *Analisis Regresi Terapan* (2th ed). Diterjemahkan oleh Bambang Sumantri. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

Greene, W. H. 2003. *Econometric Analysis* (5th ed.). New Jersey: Pearson Education, Inc.,Upper Saddle River.

Gujarati, D. N., & Porter, D. C. 2009. *Basic Econometrics* (5th ed.). New York: McGraw-Hill Companies,Inc.

Gunawan, R. A., Zulkarmain, D. P., & Arianto, S. T. 2024. Perbandingan Metode Ordinary Least Square (OLS) dan Metode Partial Least Square (PLS) Untuk Mengatasi Multikolinearitas. *Socius: Jurnal Penelitian Ilmu-Ilmu Sosial*. **1**(6): 97-103.

Hamdanah, F. H. & Fitrianah, D.(2021). Analisis Performansi Algoritma Linear Regression Dengan Generalized Linear Model Untuk Prediksi Penjualan Pada Usaha Mikro, Kecil, Dan Menengah. *JANAPATI: Jurnal Nasional Pendidikan Teknik Informatika*. **10**(1): 23–32.

Handayani, V. A., Yuniarti, R, & Rambega, U.L. 2025. *Statistik Dasar*. Medan: PT Media Penerbit Indonesia.

Iswati, H., Syahni, R., & Maiyastri. 2014. Perbandingan Penduga Ordinary Least Squares (OLS) dan Generalized Least Squares(GLS) pada Model Regresi Linear dengan Regresor Bersifat Stokastik dan Galat Model Berautokorelasi. *Jurnal Matematika UNAND*. **3**(4): 168-176.

Jacob, C.A., Sumarjaya, I.W., & Susilawati, M. 2014. Analisis Model Regresi Data Panel Tidak Lengkap Komponen Galat Dua Arah dengan Penduga Feasible Generalized Least Square (FGLS). *Jurnal Matematika*. **4**(1): 22-38.

Juanda, B. 2009. *Ekonometrika : Pemodelan dan Pendugaan*. Bogor: IPB Press.

Juprianto, M. A., Rustam, & Lestari, E. P.(2025). Dampak Struktur Modal, Profitabilitas, dan Ukuran Perusahaan Terhadap Nilai Perusahaan Pada Perusahaan Sektor Industri Dasar dan Bahan Kimia Yang Terdaftar Di Bursa Efek Indonesia.*JEMSI : Jurnal Ekonomi Manajemen Sistem Informasi*. **6**(3): 1844–1858.

Kaushik, R. K., Sinha, N., & Vaishnav, N. (2025). Absolute change, relative change and variabilities in the area of papaya in the Chhattisgarh plain agroclimatic zone of Chhattisgarh state . *International Journal of Advanced Biochemistry Research*. **9**(2): 738–742.

King, M. L. 1981. The alternative Durbin-Watson test: An assessment of Durbin and Watson's choice of test statistic. *Journal of Econometrics*. **17**(1): 51–66.

Kusdarwati, H., Effendi, U., & Handoyo, S. 2022. Analisis Deret Waktu Univariat Linier: Teori dan Terapannya dengan Rstudio. *In International Journal of Advanced Computer Science and Applications*.

Kutner MH, Nachtsheim CJ, & Neter J. 2004. *Applied Linear Regression Models* (4th ed.). New York: McGraw-Hill Companies, Inc.

Mun, Johnathan. 2006. *Modeling Risk Applying Monte Carlo Simulation, Real Options Analysis, Forecasting and Optimization Techniques*. Canada.

Nurhidayati, M. 2021. Estimasi Parameter Model Autoregressive dengan Metode Yule Walker, Least Square, dan Maximum Likelihood (Studi Kasus Data ROA BPRS di Indonesia). *Journal Of Innovation And Technology In Mathematics And Mathematics Education*. **1**(1): 1-6. https://doi.org/10.14421/quadratic.2021.011-01

Pasaribu M, Jalil A, & Lubis MR. 2015. Penerapan Analisis Regresi Ridge pada Data Pasien Hipertensi di Rumah Sakit Umum Daerah Sidikalang Tahun 2014. *E-Jurnal Matematika*. **1**(2): 1-5.

Payu, M.R.F. 2016. Metode Feasible Generalized Least Square (FGLS) Untuk Estimasi Parameter Pada Model Regresi Linear Berganda Dengan Galat Berautokorelasi. Institut Teknologi Bandung.

Rencher, A. C., & Bruce, S. G. 2008. *Linear Models in Statistics* (2nd ed.). Canada: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.

Ruhiat, Dadang. 2022. Implementasi Distribusi Peluang Gumbel Untuk Analisis Data Curah Hujan Rencana. *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika*. **7**(1): 213-224.

Setyawan, A., Hadijati, M., & Switrayni, N. W.(2019).Analisis Masalah Heteroskedastisitas Menggunakan Generalized Least Square dalam Analisis Regresi.*Eigen Mathematics Journal*. **2**(2): 61-72.

Smadi, A. A., & Abu-Afouna, N. H. 2012. On Least Squares Estimation in a Simple Linear Regression Model with Periodically Correlated Errors: A Cautionary Note. *Austrian Journal of Statistics*. **41**(3): 211–226. https://doi.org/10.17713/ajs.v41i3.175

Sudjana. 1996. *Metoda Statistika* (Edisi ke.6). Bandung: Penerbit Tarsito.

Sukestiyarno, Y. L., & Agoestanto, A. 2017. Batasan prasyarat uji normalitas dan uji homogenitas pada model regresi linear. *Unnes Journal of Mathematics*. **6**(2): 168–177. https://doi.org/10.15294/UJM.V6I2.11887

Susetyo, B. 2012. *Statistika*. Jakarta Pusat: Direktorat Jenderal Pendidikan Islam Kementerian Agama RI.

Usman, M., & Warsono. 2009. Teori Model Linear dan Aplikasinya. Bandung: Sinar Baru Algensindo.