ANALISIS ESTIMABILITAS PARAMETER PADA MODEL LINEAR DENGAN PENDEKATAN DEKOMPOSISI QR

Skripsi

Oleh

AURORA KIREI FATIMAH AZAHRA
NPM. 2217031115

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

ABSTRACT

ANALYSIS OF PARAMETER ESTIMABILITY IN LINEAR MODELS WITH THE QR DECOMPOSITION APPROACH

By

Aurora Kirei Fatimah Azahra

This study aims to investigate parameter estimability in a two-way unbalanced ANOVA model with a rank-deficient design matrix. Linear dependencies among parameters prevent the unique estimation of individual effects, making it necessary to identify estimable functions. To address this issue, QR decomposition using the Modified Gram–Schmidt (MGS) method is employed to examine the structure of the design matrix and its null space. The analysis reveals that, although individual parameters are not estimable, certain linear combinations in the form of contrasts can be uniquely estimated provided that they satisfy orthogonality conditions. Furthermore, the diagonal elements of the R matrix provide important insights into linear dependencies and the identification of estimable functions. These findings demonstrate that QR decomposition offers a numerically stable and effective approach for analyzing parameter estimability in two-way unbalanced ANOVA models.

Abstract

Keywords: Estimability, linear model, QR decomposition, Modified Gram-Schmidt, null space, matrix rank, two-way unbalanced ANOVA.

ABSTRAK

ANALISIS ESTIMABILITAS PARAMETER PADA MODEL LINEAR DENGAN PENDEKATAN DEKOMPOSISI QR

Oleh

Aurora Kirei Fatimah Azahra

Studi ini bertujuan untuk mengkaji keterestimasi parameter dalam model ANOVA dua arah tidak seimbang dengan matriks desain yang tidak berperingkat penuh. Ketergantungan linier antar parameter mengakibatkan efek individual tidak dapat diestimasi secara unik, sehingga diperlukan identifikasi fungsi yang dapat diestimasi. Untuk mengatasi permasalahan tersebut, dekomposisi QR menggunakan metode Gram–Schmidt yang dimodifikasi (Modified Gram–Schmidt/MGS) digunakan untuk menganalisis struktur matriks desain beserta ruang nolnya. Hasil analisis menunjukkan bahwa, meskipun parameter individual tidak dapat diestimasi, kombinasi linier tertentu dalam bentuk kontras tetap dapat diestimasi secara unik apabila memenuhi kondisi ortogonalitas. Selain itu, elemen diagonal matriks R memberikan informasi penting mengenai ketergantungan linier serta identifikasi fungsi yang dapat diestimasi. Temuan ini menunjukkan bahwa dekomposisi QR merupakan pendekatan yang stabil secara numerik dan efektif dalam menganalisis keterestimasi parameter pada model ANOVA dua arah tidak seimbang.

Abstrak

Kata-kata kunci: Estimabilitas, model linier, dekomposisi QR, Gram-Schmidt yang dimodifikasi, ruang nol, peringkat matriks, ANOVA dua arah tidak seimbang.

ANALISIS ESTIMABILITAS PARAMETER PADA MODEL LINEAR DENGAN PENDEKATAN DEKOMPOSISI QR

AURORA KIREI FATIMAH AZAHRA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

Judul Skripsi	:	**ANALISIS ESTIMABILITAS PARAMETER PADA MODEL LINEAR DENGAN PENDEKATAN DEKOMPOSISI QR**
Nama Mahasiswa	:	*Aurora Kirei Fatimah Azahra*
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031115**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Mustofa Usman, M. A., Ph.D.	**Dr. Bernadhita Herindri S. U., S.Si., M.Sc.**
NIP 195701011984031020	NIP 199206302023212034

2. Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama
FMIPA Universitas Lampung

Mulyono, S.Si., M.Si., Ph.D
NIP. 197406112000031002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	:	**Prof. Dr. Mustofa Usman, M. A., Ph.D.**	…………………
Sekretaris	:	**Dr. Bernadhita Herindri S. U., S.Si., M.Sc.**	…………………
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Drs. Nusyirwan, M.Si.**	…………………

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 12 Mei 2026

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Aurora Kirei Fatimah Azahra**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2217031115**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**ANALISIS ESTIMABILITAS PARAMETER PADA MODEL LINEAR DENGAN PENDEKATAN DEKOMPOSISI QR**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi inni merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai degnan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung,12 Mei 2026

Penulis

Aurora Kirei Fatimah Azahra

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Aurora Kirei Fatimah Azahra, lahir di Padang Sidempuan pada tanggal 27 September 2005. Penulis berjenis kelamin perempuan.

Penulis memulai pendidikan formal di SDN Sukamaju 1 Jonggol, Kabupaten Bogor, Jawa Barat dan lulus pada tahun 2016. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 3 Jonggol, Kabupaten Bogor, Jawa Barat dan lulus pada tahun 2019. Pendidikan menengah atas ditempuh di SMA Negeri 4 OKU, Baturaja, Sumatera Selatan dan lulus pada tahun 2022. Pada tahun yang sama, penulis melanjutkan pendidikan ke jenjang perguruan tinggi di Universitas Lampung melalui jalur seleksi dan terdaftar sebagai mahasiswa Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA).

Selama masa perkuliahan, penulis aktif dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika Universitas Lampung. Pada tahun 2024, penulis menjabat sebagai anggota Bidang Eksternal. Selanjutnya, pada tahun 2025 penulis dipercaya untuk mengemban amanah sebagai Sekretaris Bidang Eksternal. Selain itu, penulis juga aktif dalam berbagai kegiatan kepanitiaan baik di tingkat jurusan maupun fakultas, dengan berperan sebagai panitia pelaksana maupun bagian dari tim koordinasi dalam kegiatan akademik dan non-akademik.

Sebagai bentuk penerapan ilmu yang diperoleh selama perkuliahan, penulis telah melaksanakan Praktik Kerja Lapangan (PKL) di Badan Riset dan Inovasi Nasional (BRIN) Bandung, tepatnya di Kawasan Sains dan Teknologi (KST) Samaun Samadikun. Selain itu, penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Kupang Raya 2, Kecamatan Teluk Betung Utara, Kota Bandar Lampung. Kegiatan tersebut memberikan pengalaman dalam pengabdian kepada masyarakat serta meningkatkan kemampuan penulis dalam beradaptasi dan bekerja sama di lingkungan sosial.

KATA INSPIRASI

“Keindahan sejati bukan pada hasil akhir, tetapi pada hati yang tetap bersih dan sabar dalam setiap proses yang Allah tetapkan.”

“Dan bahwa manusia hanya memperoleh apa yang telah diusahakannya.”

(QS. An-Najm: 39)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terima kasih saya kepada:

Papa dan Mama Tercinta

Terima kasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini, yang tak pernah lelah mendoakan dalam diam, yang selalu menjadi alasan aku untuk terus bertahan dan melangkah. Setiap pengorbanan, kasih sayang, dan doa yang tak terhitung nilainya menjadi kekuatan terbesar dalam perjalanan ini. Terima kasih telah menjadi rumah yang selalu menerima, bahkan saat dunia terasa berat.

Keluargaku

Terima kasih atas semangat dan kebersamaan yang selalu hadir dalam setiap proses. Dukungan, perhatian, dan doa yang kalian berikan menjadi kekuatan untuk terus melangkah hingga sampai di titik ini.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terima kasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”ANALISIS ESTIMABILITAS PARAMETER PADA MODEL LINEAR DENGAN PENDEKATAN DEKOMPOSISI QR” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Mustofa Usman, M. A., Ph.D. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

2. Ibu Dr. Bernadhita Herindri Samodera Utami, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Bapak Drs. Nusyirwan, M.Si. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.

4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

5. Ibu Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Sc. selaku dosen pembimbing akademik.

6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Anggun, Fika, Aurel, Leony, Aini, Vani, dan Farhan. Terima kasih sudah hadir sejak awal perjalanan ini dimulai. Dari maba sampai di titik ini, banyak cerita, tawa, dan hal-hal kecil yang jadi kenangan berharga. Terima kasih sudah selalu ada, saling menguatkan, dan jadi bagian dari proses yang tidak mudah ini.

8. Hanny, Aliya, Nova, Izzati, Bunga, Elsa, dan Cleo. Terima kasih atas segala dukungan, doa, dan kehadiran kalian yang tak pernah absen sejak putih-abuabu hingga lembar akhir perjuangan kuliahku ini. Aku beruntung memiliki kalian.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 12 Mei 2026

Aurora Kirei Fatimah Azahra

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Model linear merupakan salah satu kerangka dasar dalam statistika modern, termasuk regresi linear, analisis ragam, dan perancangan percobaan. Pada berbagai aplikasi ilmiah, model linear digunakan untuk menjelaskan pengaruh faktor-faktor tertentu terhadap suatu variabel respon melalui representasi matematis

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

dengan $\mathbf{y}$ adalah vektor pengamatan, $\boldsymbol{X}$ adalah matriks desain yang memuat informasi faktor atau variabel penjelas, $\boldsymbol{\theta}$ adalah vektor parameter yang tidak diketahui, dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah vektor galat acak. Tujuan utama analisis model linear adalah menduga parameter $\boldsymbol{\theta}$ sehingga hubungan antara variabel respon dan faktor yang diamati dapat dijelaskan secara kuantitatif.

Keberhasilan analisis model linear sangat bergantung pada kemampuan untuk mengestimasi parameter $\boldsymbol{\theta}$ secara tepat. Namun dalam praktiknya, estimasi parameter tidak selalu menghasilkan nilai yang tunggal, terutama ketika matriks desain $\boldsymbol{X}$ tidak memiliki rank penuh. Kondisi ini sering muncul pada rancangan percobaan tidak seimbang, multikolinearitas, atau adanya struktur data yang menyebabkan beberapa kolom matriks desain saling bergantung secara linear.

Permasalahan ini dapat dijelaskan melalui konsep *null space* dari matriks desain, yaitu himpunan semua vektor parameter yang menghasilkan nilai nol ketika dikalikan dengan matriks desain. Keberadaan *null space* yang tidak hanya berisi vektor nol menunjukkan adanya hubungan ketergantungan antarparameter, sehingga beberapa parameter tidak dapat diestimasi secara terpisah. Dalam kondisi seperti ini, yang dapat diestimasi secara pasti bukanlah parameter secara individu, melainkan fungsi linear tertentu dari parameter tersebut. Konsep ini dikenal sebagai estimabilitas parameter. Dalam perkembangan penelitian modern, khususnya pada model linear yang bersifat tidak penuh rank (*rank-deficient*), konsep estimabilitas menjadi semakin penting dalam menentukan fungsi parameter yang dapat diestimasi secara valid. Studi terbaru menunjukkan bahwa pada model dengan rank-deficiency, tidak semua fungsi parameter dapat diestimasi secara langsung tanpa mempertimbangkan struktur model dan kendala yang ada (Khodabandeh & Teunissen, 2019).

Salah satu contoh model yang sering mengalami kondisi matriks desain tidak memiliki rank penuh adalah model ANOVA (*Analysis of Variance*) dua arah tidak seimbang. Pada model ini, jumlah pengamatan pada setiap kombinasi level faktor tidak sama, sehingga informasi yang diperoleh dari data menjadi tidak lengkap secara struktural. Hal ini menyebabkan munculnya ketergantungan linear antar kolom matriks desain dan berdampak pada ketidakmampuan untuk mengestimasi semua parameter secara pasti. Oleh karena itu, diperlukan analisis yang mampu mengidentifikasi parameter atau fungsi parameter mana yang masih dapat diestimasi secara valid.

Untuk menganalisis struktur matriks desain dan mendeteksi ketergantungan linear antar kolom, salah satu metode yang dapat digunakan adalah dekomposisi QR. Dekomposisi QR memfaktorkan matriks desain menjadi hasil perkalian matriks ortonormal dan matriks segitiga atas. Melalui bentuk matriks segitiga atas yang dihasilkan, informasi mengenai rank matriks, ketergantungan linear, dan keberadaan *null space* dapat dianalisis secara sistematis. Dalam perkembangan komputasi modern, dekomposisi QR tidak hanya digunakan dalam analisis numerik klasik, tetapi juga menjadi bagian penting dalam pengolahan data skala besar dan *machine learning*. Metode dekomposisi matriks terus dikembangkan untuk meningkatkan efisiensi dan stabilitas numerik dalam menangani data berdimensi tinggi (Martinsson & Tropp, 2020). Dalam penelitian ini, dekomposisi QR dilakukan menggunakan metode *Modified Gram–Schmidt*. Metode ini dipilih karena memiliki stabilitas numerik yang lebih baik dibandingkan metode Gram–Schmidt klasik, terutama dalam menjaga ortogonalitas vektor pada proses komputasi (Giraud *et al*., 2016). Selain itu, metode ortogonalisasi seperti MGS masih banyak digunakan dalam pengembangan algoritma numerik modern, khususnya dalam penyelesaian sistem linear berskala besar dan metode berbasis subruang (Carson & Demmel, 2017).

Beberapa penelitian terdahulu telah mengkaji estimabilitas parameter dalam model linear yang berkaitan dengan struktur matriks desain dan keberadaan *null space*. Christensen (1981) menyatakan bahwa *"a parametric function is estimable if and only if it lies in the row space of the design matrix"*, yang menegaskan peran fundamental ruang baris dan *null space* dalam menentukan estimabilitas parameter. Graybill (1976) dan Searle (1971) juga menjelaskan bahwa estimabilitas parameter berkaitan erat dengan struktur aljabar matriks desain, khususnya rank dan *null space*. Selain itu, Nugroho (2013) menunjukkan bahwa elemen diagonal matriks R hasil dekomposisi QR dapat digunakan untuk mendeteksi ketergantungan linear pada matriks desain dan menentukan estimabilitas parameter secara numerik.

Meskipun berbagai penelitian telah membahas estimabilitas parameter secara teoretis dan numerik, kajian yang secara khusus mengaitkan analisis *null space* dengan simulasi data pada model ANOVA dua arah tidak seimbang masih terbatas. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan melengkapi kajian tersebut melalui analisis estimabilitas menggunakan dekomposisi QR metode Modified Gram–Schmidt, disertai simulasi dan verifikasi numerik untuk mengidentifikasi fungsi parameter yang estimable.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang yang telah dikemukakan, dapat dirumuskan permasalahan pokok dalam penelitian ini sebagai berikut.

1. Bagaimana menentukan rank matriks desain pada model *two-way ANOVA* tidak seimbang menggunakan dekomposisi QR dengan metode *Modified Gram–Schmidt*?
2. Bagaimana *null space* matriks desain dibentuk, dan apa relasi linear antarparameter yang muncul dari *null space* tersebut?
3. Fungsi linear parameter apa saja yang *estimable* berdasarkan struktur *null space* dan ruang kolom matriks desain?
4. Bagaimana dekomposisi QR dapat digunakan untuk menjelaskan estimabilitas parameter serta mengidentifikasi parameter-parameter yang tidak dapat diestimasi secara tunggal?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis struktur rank matriks desain model *two-way ANOVA* tidak seimbang melalui dekomposisi QR.
2. Menentukan bentuk *null space* matriks desain serta mengidentifikasi relasi linear antarparameter yang menyebabkan parameter tidak dapat diestimasi.
3. Menentukan fungsi-fungsi linear parameter yang *estimable* dengan menggunakan kriteria ortogonalitas terhadap basis *null space*.
4. Menunjukkan bagaimana dekomposisi QR, khususnya elemen diagonal matriks $\boldsymbol{R}$, memberikan informasi langsung mengenai estimabilitas parameter.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Secara teoretis, memperkuat pemahaman mengenai keterkaitan antara rank matriks desain, *null space*, dan estimabilitas parameter pada model linear, khususnya model dua arah tidak seimbang.
2. Memberikan pendekatan berbasis dekomposisi QR yang stabil dan informatif untuk mendeteksi parameter yang tidak *estimable*.
3. Secara praktis, memberi dasar yang kuat bagi analisis *two-way ANOVA* tidak seimbang agar interpretasi hanya dilakukan pada parameter atau kontrast yang *estimable*, sehingga kesimpulan statistik lebih valid.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Ruang Vektor Matriks

Ruang vektor merupakan konsep dasar dalam aljabar linear yang digunakan untuk menganalisis sistem persamaan linear dan transformasi linear. Ruang vektor real $\mathbb{R}^n$ didefinisikan sebagai himpunan seluruh vektor berdimensi n yang komponennya merupakan bilangan real serta memenuhi operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar beserta aksioma-aksioma ruang vektor (Strang, 2009).

Definisi 2.1 (Ruang Euclidean dan Norm Euclidean)

Ruang Euclidean berdimensi n, dinotasikan dengan $\mathbb{R}^n$, didefinisikan sebagai himpunan semua vektor kolom dengan komponen bilangan real, yaitu

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,\dots,n \right\}.$$

Ruang ini merupakan ruang vektor real yang memenuhi sifat tertutup terhadap operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar. Dalam konteks model linear umum, vektor pengamatan dinyatakan sebagai $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, sedangkan hasil transformasi linear oleh matriks desain $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ menghasilkan vektor $\boldsymbol{X\theta} \in \mathbb{R}^n$, sehingga analisis model linear dilakukan dalam ruang Euclidean ini (Anton & Rorres, 2014).

Untuk setiap vektor $x \in \mathbb{R}^n$, norm Euclidean didefinisikan sebagai

$$\| x \| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Norm Euclidean menyatakan panjang atau besar suatu vektor dalam ruang Euclidean. Konsep norm ini digunakan dalam proses normalisasi vektor untuk membentuk himpunan vektor ortonormal, yang merupakan langkah penting dalam dekomposisi QR dan analisis struktur matriks desain (Strang, 2009).

Definisi 2.2 (Ruang Kolom dan Ruang Baris)

Misalkan $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

1. Ruang kolom dari matriks $\boldsymbol{X}$, dinotasikan dengan

   $$\mathrm{Col}(\boldsymbol{X})$$

   adalah himpunan semua kombinasi linear dari kolom-kolom matriks $\boldsymbol{X}$.
2. Ruang baris dari matriks $\boldsymbol{X}$, dinotasikan dengan

   $$\mathrm{Row}(\boldsymbol{X})$$

   adalah himpunan semua kombinasi linear dari baris-baris matriks $\boldsymbol{X}$, yang merupakan subruang dari $\mathbb{R}^p$.

   Ruang kolom dan ruang baris merupakan subruang vektor masing-masing dari $\mathbb{R}^n$dan $\mathbb{R}^p$ (Strang, 2009).

Definisi 2.3 (Kesamaan Dimensi Ruang Kolom dan Ruang Baris)

Misalkan $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Maka berlaku

$$\dim\,(\mathrm{Col}(\boldsymbol{X})) = \dim\,(\mathrm{Row}(\boldsymbol{X})).$$

Dimensi bersama ini disebut rank dari matriks $\boldsymbol{X}$, dan dinotasikan dengan

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{X}).$$

Definisi ini menyatakan bahwa jumlah maksimum kolom yang bebas linear sama dengan jumlah maksimum baris yang bebas linear (Strang, 2009).

Contoh 2.1
Misalkan

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times2}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Maka hasil perkalian

$$\boldsymbol{X\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ 2\beta_1 + \beta_2 \\ 3\beta_1 + \beta_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

yang menunjukkan kesesuaian dimensi ruang vektor pada model linear.

Definisi 2.4 (Transpose Matriks)

Misalkan $\boldsymbol{X} = [x_{ij}] \in \mathrm{M}^{n\times p}$. Transpose dari matriks $\boldsymbol{X}$, dinotasikan dengan $\boldsymbol{X^T}$, adalah matriks berukuran $p \times n$ yang diperoleh dengan menukar baris dan kolom matriks $\boldsymbol{X}$, yaitu

$$\boldsymbol{X^T} = [x_{ji}]$$

dengan elemen baris ke-i dan kolom ke-j pada $\boldsymbol{X^T}$ sama dengan elemen baris ke-j dan kolom ke-i pada $\boldsymbol{X}$.

Jika $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah vektor kolom, maka transpose $\mathbf{x}^{\boldsymbol{T}}$ merupakan vektor baris berukuran $1 \times n$.

Operasi transpose banyak digunakan dalam analisis model linear, khususnya dalam pembentukan persamaan normal, dekomposisi matriks, dan analisis estimabilitas parameter (Anton & Rorres, 2014).

Definisi 2.5 (Ortogonal dan Ortonormal)

Misalkan $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Dua vektor $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ dikatakan ortogonal jika memenuhi

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0.$$

Suatu himpunan vektor $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$ dikatakan ortonormal jika memenuhi dua kondisi berikut:

1. Ortogonalitas:

$$\mathbf{q}_i^T\mathbf{q}_j = 0, \text{untuk } i \neq j,$$

2. Normalisasi:

$$\| \mathbf{q}_i \| = 1, \text{untuk setiap } i.$$

Jika matriks $\boldsymbol{Q} \in \mathrm{M}^{n \times p}$ memiliki kolom-kolom yang ortonormal, maka berlaku

$$\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_{\mathbf{p}}$$

dengan $\boldsymbol{I_p}$ adalah matriks identitas berukuran $p \times p$. Matriks seperti ini disebut matriks ortonormal (Strang, 2009).

2.2 *Null Space*

Ruang nol (*null space*) merupakan salah satu subruang penting yang diturunkan dari suatu matriks dan berperan dalam menentukan keberadaan serta keunikan solusi sistem persamaan linear. Dalam konteks model linear, null space merepresentasikan kombinasi parameter yang tidak mempengaruhi nilai harapan pengamatan, sehingga parameter tersebut tidak dapat diestimasi secara tunggal (Strang, 2009).

Definisi 2.6 (*Null space*)

Misalkan $\boldsymbol{X} \in \mathrm{M}^{\mathrm{nxp}}$. *Null space* dari $\boldsymbol{X}$ dinotasikan dengan

$$\mathrm{Null}(\boldsymbol{X}) = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p \mid \boldsymbol{X\theta} = 0\}.$$

Null space merupakan himpunan seluruh vektor parameter yang menghasilkan vektor nol di $\mathbb{R}^n$. Himpunan solusi tersebut membentuk suatu subruang dari $\mathbb{R}^p$ karena tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar (Lay, 2012).

Teorema 2.1 (*Null space* adalah subruang)

Null space $Null(\boldsymbol{X})$ dari matriks $\boldsymbol{X} \in \mathrm{M}^{n \times p}$ membentuk subruang vektor dari $\mathbb{R}^p$.

Bukti Teorema 2.1

Misalkan $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m \times p}$dan himpunan null space dari $\boldsymbol{X}$ didefinisikan sebagai

$$Null(\boldsymbol{X}) = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p \mid X\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0}\}.$$

Akan dibuktikan bahwa $Null(\boldsymbol{X})$ merupakan subruang vektor dari $\mathbb{R}^p$. Untuk membuktikan suatu himpunan merupakan subruang, perlu ditunjukkan bahwa himpunan tersebut memenuhi tiga sifat utama, yaitu memuat vektor nol, tertutup terhadap penjumlahan, dan tertutup terhadap perkalian skalar.

Pertama, ditinjau keberadaan vektor nol. Ambil vektor nol $\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^p$. Karena perkalian matriks dengan vektor nol menghasilkan vektor nol, diperoleh

$$X\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

Dengan demikian, $\boldsymbol{0} \in Null(\boldsymbol{X})$. Hal ini menunjukkan bahwa himpunan $Null(\boldsymbol{X})$ tidak kosong.

Kedua, akan dibuktikan sifat tertutup terhadap penjumlahan. Misalkan $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2 \in Null(\boldsymbol{X})$. Berdasarkan definisi null space, berlaku

$$X\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{0} \text{ dan } X\boldsymbol{\theta}_2 = \boldsymbol{0}.$$

Kemudian ditinjau penjumlahan kedua vektor tersebut, yaitu $\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2$. Dengan menggunakan sifat distributif perkalian matriks, diperoleh

$$X(\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2) = X\boldsymbol{\theta}_1 + X\boldsymbol{\theta}_2 = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}.$$

Karena hasilnya merupakan vektor nol, maka $\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2 \in Null(\boldsymbol{X})$. Jadi, $Null(\boldsymbol{X})$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.

Ketiga, akan dibuktikan sifat tertutup terhadap perkalian skalar. Misalkan $\boldsymbol{\theta} \in Null(\boldsymbol{X})$ dan $c \in \mathbb{R}$. Karena $\boldsymbol{\theta} \in Null(\boldsymbol{X})$, maka

$$X\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0}.$$

Selanjutnya, ditinjau hasil perkalian skalar $c\boldsymbol{\theta}$. Dengan menggunakan sifat perkalian skalar pada matriks, diperoleh

$$X(c\boldsymbol{\theta}) = c(X\boldsymbol{\theta}) = c\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Akibatnya, $c\boldsymbol{\theta} \in Null(\boldsymbol{X})$. Dengan demikian, $Null(\boldsymbol{X})$ tertutup terhadap perkalian skalar.

Karena $Null(\boldsymbol{X})$ memuat vektor nol, tertutup terhadap penjumlahan, dan tertutup terhadap perkalian skalar, maka dapat disimpulkan bahwa $Null(\boldsymbol{X})$ merupakan subruang vektor dari $\mathbb{R}^p$.

Null space memiliki hubungan erat dengan solusi sistem persamaan linear homogen $X\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$. Jika $Null(\boldsymbol{X}) = \{\mathbf{0}\}$, maka sistem hanya memiliki solusi trivial. Sebaliknya, apabila dimensi null space lebih besar dari nol, maka sistem memiliki tak hingga banyak solusi non-trivial (Lay, 2012).

Contoh 2.2

Misalkan

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}^{2\times 2}.$$

Untuk mencari *null space*, selesaikan $\boldsymbol{X\theta} = 0$ sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Baris kedua merupakan kelipatan baris pertama sehingga diperoleh persamaan

$$\theta_1 + \theta_2 = 0 \;\Rightarrow\; \theta_2 = -\theta_1.$$

Dengan demikian,

$$Null(\boldsymbol{X}) = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

yang menunjukkan bahwa *null space* berdimensi satu dan solusi sistem tidak tunggal. Pembahasan mengenai hubungan antara dimensi *null space* dan rank matriks akan dijelaskan pada subbab berikutnya.

2.3 Rank Matriks

Rank matriks merupakan ukuran banyaknya informasi linear bebas yang terkandung dalam suatu matriks serta berperan penting dalam menentukan keberadaan dan keunikan solusi sistem persamaan linear. Rank suatu matriks sama dengan dimensi ruang kolom maupun dimensi ruang baris matriks tersebut (Strang, 2009).

Definisi 2.7 (Rank)

Misalkan $\boldsymbol{X} \in \mathrm{M}^{n \times p}$. Rank dari matriks $\boldsymbol{X}$, dinotasikan dengan

$$rank(\boldsymbol{X}) = dim(Col(\boldsymbol{X}))$$

adalah dimensi ruang kolom (atau secara ekuivalen dimensi ruang baris) dari matriks $\boldsymbol{X}$. Nilai rank menunjukkan jumlah maksimum kolom yang saling bebas linear. Jika $\mathrm{rank}(\boldsymbol{X}) = p$, maka kolom-kolom $\boldsymbol{X}$ bebas linear dan sistem memiliki solusi parameter yang tunggal. Sebaliknya, jika $\mathrm{rank}(\boldsymbol{X}) < p$, maka terdapat ketergantungan linear antar kolom sehingga solusi parameter tidak tunggal (Lay, 2012; Anton & Rorres, 2014).

Definisi 2.8 (*Nullity*)

Misalkan $\boldsymbol{X} \in \mathrm{M}^{n \times p}$. *Nullity* dari matriks $\boldsymbol{X}$, dinotasikan dengan

$$nullity(\boldsymbol{X})$$

didefinisikan sebagai dimensi dari *null space* matriks $\boldsymbol{X}$, yaitu

$$nullity(\boldsymbol{X}) = dim(Null(\boldsymbol{X})).$$

Nullity menyatakan banyaknya parameter bebas yang tidak dapat ditentukan secara tunggal dari sistem linear yang melibatkan matriks $\boldsymbol{X}$. Dengan kata lain, *nullity* menunjukkan jumlah relasi linear antar kolom matriks $\boldsymbol{X}$ yang menyebabkan matriks tersebut tidak memiliki rank penuh (Lay, 2012).

Teorema 2.2 (Rank-Nullity)

Untuk setiap matriks $\boldsymbol{X} \in \mathrm{M}^{n \times p}$ berlaku

$$rank(\boldsymbol{X}) + nullity(\boldsymbol{X}) = p,$$

dengan $Null(\boldsymbol{X})$ adalah *null space* dari $\boldsymbol{X}$.

Teorema ini menyatakan bahwa jumlah dimensi ruang kolom dan dimensi ruang nol sama dengan banyaknya parameter dalam model linear. Akibatnya, semakin kecil rank matriks, semakin besar dimensi *null space*, sehingga semakin banyak parameter yang tidak dapat ditentukan secara tunggal (Anton & Rorres, 2014).

Bukti Teorema 2.2

Misalkan $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m \times p}$dan

$$\text{rank}\ (X) = r.$$

Artinya, terdapat r kolom yang saling bebas linear pada matriks $\boldsymbol{X}$, sehingga banyak pivot pada bentuk eselon baris matriks $\boldsymbol{X}$ juga sebanyak r.
Ditinjau sistem linear homogen

$$X\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0},$$

dengan $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{p}$. Karena jumlah variabel pada sistem sama dengan banyak kolom matriks $\boldsymbol{X}$, maka terdapat p variabel.
Berdasarkan teori sistem persamaan linear, banyak variabel bebas diperoleh dari

$$\text{jumlah variabel} - \text{jumlah pivot}.$$

Karena jumlah pivot sama dengan rank matriks, maka banyak variabel bebas adalah

$$p - r.$$

Variabel bebas menentukan dimensi himpunan solusi sistem homogen, yaitu dimensi *null space* dari matriks $\boldsymbol{X}$. Dengan demikian,

$$\text{nullity}\ (\boldsymbol{X}) = p - r.$$

Selanjutnya,

$$\text{rank}\ (\boldsymbol{X}) + \text{nullity}\ (\boldsymbol{X}) = r + (p - r).$$

Karena $r - r = 0$, maka diperoleh

$$\text{rank}\ (\boldsymbol{X}) + \text{nullity}\ (\boldsymbol{X}) = p.$$

Jadi, terbukti bahwa untuk setiap matriks $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m\times p}$ berlaku

$$\text{rank}\ (\boldsymbol{X}) + \text{nullity}\ (\boldsymbol{X}) = p.$$

Teorema ini menunjukkan bahwa jumlah dimensi ruang kolom dan dimensi *null space* selalu sama dengan banyaknya kolom matriks $\boldsymbol{X}$. Semakin kecil rank matriks, semakin besar dimensi *null space*, sehingga semakin banyak parameter yang tidak dapat ditentukan secara unik.

Contoh 2.3

Misalkan

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}^{2\times 3}.$$

Baris kedua merupakan kelipatan baris pertama sehingga hanya terdapat satu baris bebas linear. Oleh karena itu,

$$\text{rank}(\boldsymbol{X}) = 1.$$

Untuk menentukan *null space*, selesaikan $\boldsymbol{X\theta} = \boldsymbol{0}$ sehingga diperoleh

$$\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 = 0.$$

Ambil parameter bebas $\theta_2 = s$ dan $\theta_3 = t$, maka

$$\theta_1 = -s - 2t.$$

Sehingga

$$Null(\boldsymbol{X}) = \left\{ \begin{bmatrix} -s-2t \\ s \\ t \end{bmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\},$$

yang berdimensi 2.

Terlihat bahwa

$$\text{rank}(\boldsymbol{X}) = 1, \dim\left(Null(\boldsymbol{X})\right) = 2, 1 + 2 = 3 = p,$$

sehingga memenuhi Teorema Rank–Nullity.

2.4 Model Linear Umum

Model linear umum merupakan kerangka matematis yang digunakan untuk menyatakan hubungan linear antara variabel respon dan parameter yang tidak diketahui. Dalam bentuk vektor–matriks, model linear umum dapat dituliskan sebagai

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.1}$$

dengan:

y : vektor peubah acak $n \times 1$ yang teramati;

X : matriks desain $n \times p$ dengan unsur-unsurnya adalah bilangan tertentu yang diketahui;

θ : vektor parameter yang tidak diketahui nilainya $p \times 1$;

ε : vektor galat acak yang tidak teramati $n \times 1$, dengan $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ dan $\text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Sigma}$.

Definisi 2.9 (Model Linear Umum)

Model linear umum adalah model statistik berbentuk

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

dengan asumsi

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{0}, \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \boldsymbol{I_n}$$

dengan $\boldsymbol{I_n}$ adalah matriks identitas berukuran $n \times n$ dan $\sigma^2 > 0$.

Asumsi tersebut menyatakan bahwa galat memiliki rataan nol, ragam konstan, serta tidak berkorelasi, sehingga memungkinkan penggunaan metode kuadrat terkecil dalam estimasi parameter (Usman dan Warsono, 2009).

Teorema 2.3 (Persamaan Normal Kuadrat Terkecil)

Penaksir kuadrat terkecil $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ untuk parameter $\boldsymbol{\theta}$ pada model linear umum memenuhi persamaan normal berikut (Montgomery, 2013):

$$\mathbf{X^T X}\,\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X^T y}. \tag{2.2}$$

Bukti Teorema 2.3

Penaksir kuadrat terkecil diperoleh dengan meminimumkan fungsi

$$\| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\theta} \|^2.$$

Turunan terhadap $\boldsymbol{\theta}$ disamakan dengan nol menghasilkan

$$-2\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\theta}) = 0.$$

sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X\theta} = \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y}.$$

Dengan mengganti $\boldsymbol{\theta}$ oleh $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$, diperoleh persamaan normal.

Keberadaan solusi tunggal dari persamaan normal bergantung pada rank matriks desain. Jika $\operatorname{rank}(\boldsymbol{X}) = p$, maka $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}$ *nonsingular* dan penaksir kuadrat terkecil bersifat unik. Sebaliknya, jika $\operatorname{rank}(\boldsymbol{X}) < p$, maka solusi tidak tunggal dan berkaitan dengan dimensi *null space* matriks $\boldsymbol{X}$. Pada kondisi ini, pembahasan mengenai estimabilitas parameter menjadi krusial (Usman dan Warsono, 2009).

2.5 Estimabilitas Parameter

Konsep estimabilitas (*estimability*) digunakan untuk menentukan apakah suatu fungsi linear dari parameter dalam model linear umum dapat diestimasi secara tunggal berdasarkan data yang tersedia. Konsep ini menjadi penting terutama ketika matriks desain tidak memiliki rank penuh, sehingga tidak semua parameter dapat diestimasi secara tunggal.

Misalkan diberikan model linear umum

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

dengan:

$\boldsymbol{y}$: vektor peubah acak $n \times 1$ yang teramati;

$\boldsymbol{X}$: matriks desain $n \times p$ dengan unsur-unsurnya adalah bilangan tertentu yang diketahui;

$\boldsymbol{\theta}$: vektor parameter yang tidak diketahui nilainya $p \times 1$;

$\boldsymbol{\varepsilon}$: vektor galat acak yang tidak teramati $n \times 1$, dengan $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ dan $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Sigma}$.

Dari model tersebut diperoleh nilai harapan

$$E(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{X\theta}.$$

Definisi 2.10 (Estimabilitas Parameter)

Suatu fungsi linear dari parameter, yaitu

$$\boldsymbol{a^T\theta}$$

dengan $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^p$, dikatakan *estimable* jika terdapat suatu estimator linear tak bias berbentuk

$$\boldsymbol{t^T Y}$$

sehingga

$$E(\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\theta}$$

untuk semua $\theta \in \mathbb{R}^p$.

Karena

$$E(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\theta},$$

maka

$$E(\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y}) = t^T E(\boldsymbol{Y}) = t^T \boldsymbol{X}\boldsymbol{\theta}.$$

Agar estimator tersebut tak bias untuk semua $\boldsymbol{\theta}$, harus berlaku

$$\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}.$$

Dengan demikian, suatu fungsi parameter $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\theta}$ *estimable* jika dan hanya jika terdapat vektor t sehingga

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = \mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}. \tag{2.3}$$

Hal ini berarti bahwa vektor $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}$ harus berada dalam ruang baris matriks desain $\boldsymbol{X}$, yaitu

$$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}} \in \mathrm{Row}(\boldsymbol{X}).$$

(Searle, 1971).

Definisi 2.11 (Hubungan Estimabilitas dan *Null Space*)

Suatu fungsi linear parameter

$$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\theta}$$

estimable jika dan hanya jika vektor $\boldsymbol{a}$ ortogonal terhadap setiap vektor dalam *null space* matriks desain $\boldsymbol{X}$, yaitu

$$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{v} = 0 \text{ untuk setiap } \boldsymbol{v} \in Null(\boldsymbol{X}).$$

Dengan kata lain, fungsi linear parameter *estimable* jika dan hanya jika vektor koefisiennya tegak lurus terhadap seluruh basis *null space* matriks desain (Searle, 1971).

Teorema 2.4 (Kriteria Estimabilitas)

Suatu fungsi linear parameter

$$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\theta}$$

estimable jika dan hanya jika vektor a berada dalam ruang baris matriks desain $\boldsymbol{X}$, yaitu

$$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}} \in \text{Row}(\boldsymbol{X}).$$

Secara ekuivalen, terdapat suatu vektor t sehingga

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = \mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}.$$

(Searle, 1971; Graybill, 1976)

Bukti Teorema 2.4

Misalkan terdapat estimator linear $\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y}$. Maka

$$E(\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}}E(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\theta}.$$

Agar estimator tersebut tak bias untuk $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\theta}$, harus berlaku

$$\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\theta}$$

untuk semua $\boldsymbol{\theta}$.
Hal ini berlaku jika dan hanya jika

$$\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}.$$

Dengan demikian, vektor $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}$ merupakan kombinasi linear dari baris-baris matriks $\boldsymbol{X}$, sehingga

$$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}} \in \text{Row}(\boldsymbol{X}).$$

Sebaliknya, jika $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}} \in \text{Row}(\boldsymbol{X})$, maka terdapat vektor t sehingga

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = \mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}.$$

Akibatnya,

$$E(\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\theta}$$

sehingga $\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y}$ merupakan estimator linear tak bias bagi $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\theta}$**.**

Interpretasi dari hasil ini adalah bahwa hanya fungsi parameter yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari baris-baris matriks desain yang dapat diestimasi dari data. Jika suatu fungsi parameter tidak berada dalam ruang baris matriks desain, maka fungsi tersebut tidak dapat diestimasi secara tunggal berdasarkan data yang tersedia (Myers & Milton, 1991).

2.5.1 Kendala (Constraint) Pada Model Linear

Definisi 2.12 (Kendala/*Constraint*).

Kendala (*constraint*) pada model linear adalah syarat tambahan yang dikenakan pada parameter model untuk mengatasi ketidakunikan solusi akibat matriks desain yang tidak memiliki rank penuh.

Dalam model linear umum, khususnya pada model ANOVA dua arah, matriks desain sering kali tidak memiliki rank penuh (*rank deficient*), sehingga terdapat ketergantungan linear antarparameter yang menyebabkan parameter tidak dapat diestimasi secara unik (Rencher & Schaalje, 2008). Kondisi ini berimplikasi bahwa solusi dari sistem persamaan normal tidak tunggal, sehingga diperlukan pendekatan tambahan untuk memperoleh parameter yang bermakna (Rao & Mitra, 1971).

Salah satu pendekatan yang umum digunakan adalah dengan menetapkan kendala (*constraint*) pada parameter model. Penerapan kendala bertujuan untuk menghilangkan derajat kebebasan yang berlebih akibat adanya relasi linear antarparameter, sehingga parameter yang diestimasi menjadi unik dan bersifat *estimable* (Searle, 1971).

Dalam model ANOVA dua arah tanpa interaksi, kendala yang umum digunakan adalah:

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0.$$

Kendala ini menyatakan bahwa jumlah efek faktor baris dan faktor kolom bernilai nol, sehingga masing-masing parameter efek dapat diinterpretasikan sebagai deviasi terhadap rata-rata umum.

Selain itu, kendala tersebut juga konsisten dengan struktur *null space* dari matriks desain yang menunjukkan adanya relasi linear antarparameter dalam model. Dengan demikian, penerapan kendala tidak mengubah model secara substantif, melainkan hanya menentukan representasi parameter yang ekuivalen sehingga estimasi parameter menjadi unik dan dapat diinterpretasikan secara tepat (Searle, 1971).

Oleh karena itu, dalam analisis model linear yang tidak memiliki rank penuh, penetapan kendala merupakan langkah penting untuk menjamin estimabilitas parameter dan validitas interpretasi hasil

2.5.2 Estimabilitas Kontrast

Dalam analisis ragam (ANOVA), fungsi linear parameter yang sering digunakan adalah kontrast antar efek faktor. Secara umum, kontrast merupakan kombinasi linear dari parameter atau rata-rata dengan koefisien yang memenuhi syarat tertentu. Misalkan diberikan parameter $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, maka kontrast dapat dinyatakan sebagai

$$\psi = c_1\theta_1 + c_2\theta_2 + \cdots + c_k\theta_k,$$

dengan koefisien c_i memenuhi

$$\sum_{i=1}^{k} c_i = 0$$

(Montgomery, 2017).

Dalam kerangka model linear umum, kontrast merupakan kasus khusus dari fungsi linear parameter yang dapat dituliskan sebagai

$$\psi = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\theta},$$

dengan $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$ sebagai vektor koefisien dan $\boldsymbol{\theta}$ sebagai vektor parameter model. Dalam hal ini, koefisien c_i merupakan komponen dari vektor $\mathbf{a}$, sehingga dapat dituliskan

$$\mathbf{a} = (c_1, c_2, \dots, c_k)^T.$$

Pada model ANOVA dua arah, khususnya pada desain tidak seimbang, matriks desain sering kali tidak memiliki rank penuh (*rank-deficient*), sehingga parameter individual dalam model tidak dapat diestimasi secara tunggal. Dalam kondisi ini, estimabilitas tidak lagi berlaku pada parameter individual, melainkan pada fungsi linear tertentu dari parameter tersebut. Suatu kontrast $\psi = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\theta}$ dikatakan *estimable* jika dan hanya jika terdapat vektor $\mathbf{t}$ sehingga

$$E(\mathbf{t}^T \mathbf{Y}) = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\theta},$$

atau secara ekuivalen jika

$$\mathbf{a}^T \in \mathrm{Row}(\mathbf{X}),$$

yang berarti vektor koefisien **a** berada dalam ruang baris dari matriks desain **X** (Searle, 1971).

Selain itu, kriteria estimabilitas juga dapat dinyatakan dalam bentuk ruang nol (*null space*), yaitu suatu kontrast $\psi = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\theta}$ bersifat *estimable*
jika dan hanya jika

$$\mathbf{a}^T \mathbf{v} = 0 \text{ untuk setiap } \mathbf{v} \in \mathrm{Null}(\mathbf{X}).$$

Kondisi ini menunjukkan bahwa vektor koefisien **a** ortogonal terhadap seluruh vektor dalam *null space* matriks desain, sehingga fungsi parameter tersebut tidak berada dalam arah ketergantungan linear dan dapat diestimasi secara unik (Lay, 2012; Searle, 1971).

Dengan demikian, analisis kontrast dalam model ANOVA yang tidak seimbang berfokus pada identifikasi fungsi linear parameter yang memenuhi kriteria estimabilitas, sehingga hanya fungsi linear parameter yang memenuhi kriteria tersebut yang dapat diestimasi secara unik dan memiliki interpretasi yang valid.

2.6 *Generalized Inverse*

Pada model linear umum, solusi persamaan normal

$$\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{y}$$

tidak selalu tunggal, terutama ketika matriks desain $\boldsymbol{X}$ tidak memiliki rank penuh. Dalam kondisi ini, matriks $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}$ tidak memiliki invers biasa. Untuk mengatasi hal tersebut digunakan *generalized inverse*.

Definisi 2.13 (*Generalized Inverse*)

Misalkan $\boldsymbol{X} \in \mathrm{M}^{n\times p}$. Suatu matriks $\boldsymbol{G} \in \mathrm{M}^{p\times n}$ disebut *generalized inverse* dari $\boldsymbol{X}$ jika memenuhi

$$\boldsymbol{XGX} = \boldsymbol{X}.$$

Generalized inverse tidak harus tunggal, tetapi dapat digunakan untuk memperoleh solusi sistem persamaan linear yang tidak memiliki solusi tunggal (Rao & Mitra, 1971).

Jika $\boldsymbol{G}$ adalah *generalized inverse* dari $\boldsymbol{X}$**,** maka salah satu solusi dari sistem

$$\boldsymbol{X\theta} = \mathbf{y}$$

dapat dituliskan sebagai

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{X}^{T}\mathbf{y}. \tag{2.4}$$

Dalam konteks model linear umum, *generalized inverse* memungkinkan pendugaan parameter dan analisis estimabilitas meskipun matriks desain bersifat singular atau *rank-deficient* (Graybill, 1976).

Generalized inverse memiliki hubungan erat dengan struktur *null space* dan rank matriks desain, serta menjadi dasar dalam analisis estimabilitas parameter pada model linear.

2.7 Dekomposisi QR

Definisi 2.14 (Dekomposisi QR)

Dekomposisi QR merupakan salah satu metode faktorisasi matriks yang memisahkan matriks desain $\boldsymbol{X}$ menjadi dua komponen utama, yaitu matriks ortonormal $\boldsymbol{Q}$ dan matriks segitiga atas $\boldsymbol{R}$. Secara umum, dekomposisi QR menuliskan:

$$\mathbf{X} = \mathbf{QR} \tag{2.5}$$

dengan:

$\boldsymbol{Q}$: matriks dengan kolom-kolom ortonormal sehingga $\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$

$\boldsymbol{R}$: matriks segitiga atas

Ketika bentuk dekomposisi QR disubstitusikan ke dalam persamaan penduga kuadrat terkecil, diperoleh bahwa keberadaan dan kejelasan solusi bergantung pada apakah matriks $\boldsymbol{R}$ memiliki invers atau tidak. Jika matriks $\boldsymbol{R}$ memiliki invers, maka solusi penduga kuadrat terkecil dapat ditentukan secara pasti. Sebaliknya, jika matriks $\boldsymbol{R}$ tidak memiliki invers, maka solusi tidak dapat ditentukan secara pasti (Björck, 1996; Golub & Van Loan, 2013).

Matriks $\boldsymbol{Q}$ membentuk basis ortonormal untuk ruang kolom matriks $\boldsymbol{X}$. Oleh karena itu, seluruh informasi mengenai rank, ketergantungan linear antar kolom, dan *null space* matriks desain sepenuhnya tercermin dalam matriks $\boldsymbol{R}$.

Dengan demikian, analisis terhadap elemen diagonal matriks $\boldsymbol{R}$ dapat digunakan untuk menentukan rank matriks desain dan struktur *null space*, yang selanjutnya menentukan estimabilitas parameter dalam model linear.

Definisi 2.15 (Hubungan Dekomposisi QR dengan Rank dan *Null space*)

Misalkan

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{QR}$$

adalah dekomposisi QR dari matriks desain

$$\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{nxp}$$

dengan

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}$$

dengan $\boldsymbol{R}$ adalah matriks segitiga atas. Maka berlaku:

1. rank($\boldsymbol{X}$)=banyaknya elemen diagonal R_{jj} yang tidak nol (Lay, 2012).
2. Jika

   $$R_{jj} = 0,$$

   maka kolom ke-j dari matriks $\boldsymbol{X}$ merupakan kombinasi linear dari kolom-kolom sebelumnya, yaitu (Lay, 2012).

   $$x_j \in \text{span}(x_1, x_2, \dots, x_{j-1})$$

3. Dimensi *null space* matriks desain diberikan oleh

   $$\dim\,(\text{Null}(\boldsymbol{X})) = p - \text{rank}(\boldsymbol{X})$$

   yang sama dengan jumlah elemen diagonal nol pada matriks $\boldsymbol{R}$ (Lay, 2012).
4. Setiap elemen diagonal nol pada matriks $\boldsymbol{R}$ menunjukkan adanya satu relasi linear antar kolom matriks desain, yang berakibat pada adanya fungsi parameter yang tidak *estimable* (Searle, 1971).

Contoh 2.7

Misalkan diberikan matriks:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Akan dicari dekomposisi QR:

$$\mathbf{X} = \mathbf{QR}$$

Ambil kolom matriks

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Normalisasi kolom pertama

$$\| \mathbf{x_1} \| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\mathbf{q_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Normalisasi kolom pertama

$$\| \mathbf{x_1} \| = \sqrt{\mathbf{1^2 + 1^2}} = \sqrt{\mathbf{2}}$$
$$\mathbf{q_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Normalisasi

$$\| \mathbf{u_2} \| = \sqrt{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}}$$
$$\mathbf{q_2} = \frac{1}{\sqrt{3/2}} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bentuk Q dan R

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix}$$

Proses pembentukan matriks $\mathbf{Q}$ pada contoh ini dilakukan melalui ortonormalisasi kolom-kolom matriks **X**. Secara umum, proses ini dapat dilakukan menggunakan metode *Modified Gram-Schmidt* (MGS) yang akan dibahas pada subbab berikutnya.

2.8 Modified Gram-Schmidt

Definisi 2.16 (*Modified Gram-Schmidt*)

Modified Gram–Schmidt merupakan pengembangan dari proses Gram–Schmidt klasik yang dirancang untuk meningkatkan stabilitas numerik dalam pembentukan dekomposisi QR, khususnya ketika kolom-kolom matriks hampir saling bergantung secara linear. Algoritma ini banyak digunakan dalam komputasi aljabar linear dan analisis numerik karena kemampuannya menjaga ortogonalitas vektor secara lebih akurat dibandingkan metode klasik (Golub & Van Loan, 2013).

Algoritma MGS bekerja dengan mengortogonalkan setiap kolom matriks terhadap kolom-kolom ortonormal yang telah dibentuk sebelumnya secara berurutan, kemudian melakukan normalisasi untuk memperoleh basis ortonormal.

Misalkan diberikan matriks desain

$$\boldsymbol{X} = [x_1, x_2, \dots, x_p] \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

dengan kolom–kolom $x_1, x_2, \dots, x_p$. Tujuan dari algoritma *Modified Gram–Schmidt* adalah membentuk matriks ortonormal

$$\boldsymbol{Q} = [q_1, q_2, \dots, q_p] \in \mathrm{M}^{n \times p}$$

dan matriks segitiga atas

$$\boldsymbol{R} = (r_{ij}) \in \mathbb{R}^{p \times p}$$

sehingga diperoleh dekomposisi QR

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{QR}$$

dengan:

$$\boldsymbol{Q^T Q} = \boldsymbol{I_p}$$

yang menunjukkan bahwa kolom-kolom matriks $\boldsymbol{Q}$ bersifat ortonormal, dan matriks $\boldsymbol{R}$ merupakan matriks segitiga atas.

Proses MGS didefinisikan sebagai berikut:

1. Untuk kolom pertama:

$$r_{11} = \| \boldsymbol{x_1} \|$$

Kemudian normalisasi untuk memperoleh vektor ortonormal pertama:

$$\boldsymbol{q_1} = \frac{\boldsymbol{x_1}}{r_{11}}.$$

2. Untuk setiap $j = 2, \dots, p$, lakukan:
   - Hitung koefisien proyeksi terhadap kolom–kolom sebelumnya:

     Untuk setiap $i = 1,2, \dots, j-1$, hitung

$$\boldsymbol{r_{ij}} = \boldsymbol{q_i^T x_j} \tag{2.6}$$

     Nilai ini menyatakan proyeksi vektor $\boldsymbol{x_j}$ terhadap vektor ortonormal sebelumnya.

   - Hitung residual:

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{x_j} - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij}\, \boldsymbol{q_i}.$$

   - Normalisasi:

$$r_{jj} = \| \widetilde{\boldsymbol{x}}_j \|$$

Jika $r_{jj} \neq 0,$ maka vektor ortonormal diperoleh dengan

$$\boldsymbol{q_j} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{j}}}{\boldsymbol{r_{jj}}}. \tag{2.7}$$

Setelah semua kolom diproses, diperoleh matriks

$$\boldsymbol{Q} = [q_1, q_2, \dots, q_p]$$

dan

$$\boldsymbol{R} = (r_{ij})$$

yang memenuhi

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{QR}$$

(Golub & Van Loan, 2013; Trefethen & Bau, 1997).

2.9 Model ANOVA (*Analysis of Variance*) Dua Arah

Model ANOVA dua arah tanpa interaksi digunakan untuk menganalisis pengaruh dua faktor terhadap suatu respons, dan secara umum dapat dituliskan sebagai:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \tag{2.8}$$

dengan:

μ: rata-rata umum,

α_i: efek baris ke-i,

β_j: efek kolom ke-j,

ε_{ij}: galat acak dengan asumsi $\mathrm{E}(\varepsilon_{ij}) = 0, \mathrm{Var}(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2$.

serta saling bebas dan berdistribusi normal $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$
(Montgomery, 2017).

Model tersebut juga dapat dinyatakan dalam bentuk model linear umum sebagai

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{X\theta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

Dengan vektor parameter:

$$\boldsymbol{\theta} = (\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_a, \beta_1, \dots, \beta_b)^\top.$$

Jumlah parameter nominal dalam model tersebut adalah $1 + a + b$.
Namun, parameter-parameter tersebut tidak seluruhnya bebas linear karena terdapat relasi linear antarparameter, yaitu jumlah efek baris dan jumlah efek kolom berkaitan dengan parameter rata-rata umum. Akibatnya, matriks desain $\boldsymbol{X}$ tidak memiliki rank penuh terhadap jumlah parameter nominal, melainkan memiliki rank yang lebih kecil.

Secara khusus, rank matriks desain untuk model ANOVA dua arah tanpa interaksi diberikan oleh:

$$rank(\boldsymbol{X}) = a + b - 1,$$

yang menunjukkan bahwa model bersifat *overparameterized*, yaitu jumlah parameter yang didefinisikan dalam model lebih banyak daripada jumlah parameter yang dapat ditentukan secara bebas dari data (Searle, 1971).
Akibatnya, parameter individual seperti μ, α_i, dan $\beta_j$tidak semuanya dapat diestimasi secara unik. Oleh karena itu, analisis difokuskan pada fungsi linear parameter yang dapat diestimasi (*estimable functions*).
Kondisi ini berkaitan dengan keberadaan *null space* dari matriks desain yang tidak hanya berisi vektor nol, yang menunjukkan adanya ketergantungan linear antar parameter dalam model (Lay, 2012; Searle, 1971).

2.9.1 ANOVA Dua Arah Seimbang

Definisi 2.17 (Desain Seimbang)

Model ANOVA dua arah disebut seimbang jika jumlah pengamatan pada setiap kombinasi level faktor sama (Montgomery, 2017), yaitu

$$n_{ij} = n, \qquad \forall i, j$$

dengan

$i = 1,2,3, \dots, a$

$j = 1,2,3, \dots, b$

Dalam kondisi ini, setiap kombinasi faktor memiliki jumlah pengamatan yang sama. Pada desain seimbang, matriks desain memiliki struktur yang teratur sehingga analisis estimasi parameter menjadi lebih sederhana dan stabil (Montgomery, 2017).

Definisi 2.18 (Rank Matriks Desain pada Desain Seimbang)

Misalkan model ANOVA dua arah memiliki:

- a level faktor baris,
- b level faktor kolom,

maka matriks desain memiliki rank (Montgomery, 2017; Searle, 1971)

$$\text{rank}(\boldsymbol{X}) = a + b - 1$$

Hal ini terjadi karena terdapat satu relasi linear antarparameter, yaitu

$$\sum_{i=1}^{a} \theta_i + \sum_{j=1}^{b} \theta_{a+j} = 0$$

Akibatnya, pada desain seimbang, fungsi-fungsi parameter yang memenuhi syarat estimabilitas dapat ditentukan secara lebih sederhana dan interpretasi hasil analisis menjadi lebih jelas (Montgomery, 2017).

2.9.2 ANOVA Dua Arah Tidak Seimbang

Definisi 2.19 (Desain Tidak Seimbang)

Model ANOVA dua arah disebut tidak seimbang jika jumlah pengamatan berbeda antar kombinasi level faktor, yaitu

$$\mathrm{n_{ij}} \neq \mathrm{n_{kl}}$$

untuk beberapa pasangan indeks (i, j) (Montgomery, 2017).

Ketidakseimbangan ini menyebabkan struktur matriks desain menjadi tidak seragam, sehingga analisis menjadi lebih kompleks. Dalam kondisi ini, matriks desain dapat tidak memiliki rank penuh (*rank-deficient*), yang mengindikasikan adanya ketergantungan linear yang lebih kompleks antar kolom matriks desain (Searle, 1971).

Jika model ANOVA dua arah memiliki desain tidak seimbang, maka matriks desain memenuhi

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{X}) < \boldsymbol{p}$$

Akibatnya:

1. Terdapat vektor non-nol $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}}$ yang memenuhi

$$\boldsymbol{Xc} = \boldsymbol{0}$$

2. *Null space* matriks desain tidak hanya berisi vektor nol (Lay, 2012), yaitu

$$\mathbf{Null}(\boldsymbol{X}) \neq \{\boldsymbol{0}\}$$

3. Parameter $\boldsymbol{\theta}$ tidak dapat diestimasi secara tunggal.
4. Suatu fungsi linear parameter $\boldsymbol{a^T\theta}$ *estimable* jika dan hanya jika

$$\boldsymbol{a} \in \mathrm{Row}(\boldsymbol{X})$$

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2025/2026 dan bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Provinsi Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data penelitian disusun berdasarkan model ANOVA dua arah tanpa interaksi dengan desain tidak seimbang sebagaimana dijelaskan pada Bab II. Model tersebut melibatkan satu parameter intersep, efek faktor baris, dan efek faktor kolom. Secara umum, untuk model dengan $a$level faktor baris dan b level faktor kolom, jumlah parameter nominal dalam model adalah $1 + a + b$. Matriks desain $\mathbf{X}$ dibentuk sesuai dengan struktur model tersebut, dengan banyaknya baris bergantung pada jumlah total pengamatan pada setiap kombinasi level faktor. Ketidakseimbangan jumlah pengamatan menyebabkan kolom-kolom matriks desain tidak sepenuhnya bebas secara linear, sehingga matriks desain yang terbentuk bersifat singular dan memiliki *null space* tak hanya berisi vektor nol.

Data respon dibangkitkan berdasarkan model linear

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

dengan $\boldsymbol{\theta}$ merupakan vektor parameter yang ditetapkan secara sembarang dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah vektor galat acak dengan nilai harapan nol dan ragam konstan. Pembangkitan data respon ini digunakan untuk mendukung proses verifikasi numerik terhadap hasil analisis

3.3 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah metode analitik kuantitatif yang didasarkan pada teori model linear dan aljabar linear. Pendekatan ini bertujuan untuk mengkaji estimabilitas parameter melalui analisis struktur matriks desain, khususnya rank dan *null space*. Adapun langkah-langkah penelitian adalah sebagai berikut:

1. Menentukan model ANOVA dua arah tidak seimbang dan membentuk matriks desain X berdasarkan struktur model umum.
2. Melakukan dekomposisi QR terhadap matriks desain $\boldsymbol{X}$ menggunakan metode *Modified Gram–Schmidt* untuk memperoleh matriks ortonormal $\boldsymbol{Q}$ dan matriks segitiga atas $\boldsymbol{R}$.
3. Menentukan rank matriks desain berdasarkan elemen diagonal matriks $\mathbf{R}$ dan diverifikasi menggunakan dekomposisi nilai singular (SVD).
4. Menentukan *null space* berdasarkan relasi linear antar kolom dan diverifikasi melalui hasil dekomposisi QR dan SVD.
5. Menentukan basis *null space* dan mengidentifikasi relasi linear antarparameter dalam model.
6. Menentukan fungsi linear parameter yang bersifat *estimable* menggunakan kriteria ortogonalitas terhadap basis *null space*.

7. Menetapkan nilai parameter secara sembarang dan membangkitkan data respon simulasi menggunakan model linear.
8. Melakukan pendugaan parameter menggunakan *generalized inverse* untuk mendukung analisis estimabilitas.
9. Melakukan verifikasi numerik menggunakan perangkat lunak SAS untuk mengonfirmasi hasil analisis teoretis.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan dalam penelitian ini:

1. Penentuan rank matriks desain pada model ANOVA dua arah tidak seimbang dapat dilakukan melalui pendekatan dekomposisi QR dengan metode *Modified Gram–Schmidt*. Hasil dekomposisi menunjukkan bahwa terdapat enam elemen diagonal matriks R yang bernilai tidak nol, sehingga diperoleh bahwa rank matriks desain adalah sebesar 6.
2. *Null space* matriks desain terbentuk akibat adanya ketergantungan linear antar kolom matriks desain. Berdasarkan hasil analisis, diperoleh bahwa dimensi *null space* adalah 2, yang menunjukkan adanya dua relasi linear antarparameter dalam model. Relasi ini mencerminkan bahwa parameter dalam model tidak seluruhnya bebas secara linear.
3. Fungsi linear parameter yang *estimable* adalah fungsi yang memenuhi kriteria ortogonalitas terhadap basis *null space* atau berada dalam ruang baris matriks desain. Dalam penelitian ini, kontrast antar efek baris dan kontrast antar efek kolom termasuk fungsi parameter yang estimable, sedangkan parameter individual tidak seluruhnya dapat diestimasi secara tunggal.
4. Peran dekomposisi QR dalam analisis estimabilitas parameter ditunjukkan melalui kemampuannya dalam mengidentifikasi rank

matriks desain dan mendeteksi ketergantungan linear antar kolom melalui elemen diagonal matriks R. Dengan demikian, dekomposisi QR menjadi metode yang efektif untuk menentukan estimabilitas parameter serta mengidentifikasi parameter yang tidak dapat diestimasi secara unik dalam model linear.

Secara keseluruhan, penelitian ini menunjukkan bahwa estimabilitas parameter dalam model linear umum sepenuhnya ditentukan oleh struktur aljabar matriks desain. Sifat estimabilitas tidak dipengaruhi oleh pembangkitan data maupun besar *varians error*, melainkan oleh keberadaan atau ketiadaan ketergantungan linear antar kolom matriks desain.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, terdapat beberapa saran yang dapat diajukan untuk pengembangan penelitian selanjutnya:

1. Penelitian ini menggunakan model ANOVA dua arah tanpa interaksi pada kondisi tidak seimbang. Oleh karena itu, penelitian selanjutnya dapat mempertimbangkan pengembangan pada model yang lebih kompleks, seperti model ANOVA dengan interaksi atau model linear umum lainnya, untuk melihat bagaimana struktur estimabilitas parameter berubah pada kondisi yang lebih umum.
2. Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini berfokus pada dekomposisi QR dengan metode *Modified Gram–Schmidt*. Penelitian selanjutnya dapat mengkaji penggunaan metode lain, seperti *Singular Value Decomposition* (SVD) atau pendekatan *generalized inverse* yang berbeda, untuk membandingkan efektivitas dalam mengidentifikasi rank, *null space*, dan estimabilitas parameter.
3. Penelitian ini menggunakan data simulasi untuk mendukung analisis teoretis. Oleh karena itu, penelitian selanjutnya dapat mengaplikasikan metode yang digunakan pada data nyata agar

diperoleh interpretasi yang lebih kontekstual serta memperluas manfaat praktis dari analisis estimabilitas parameter.

4. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa dekomposisi QR mampu memberikan informasi yang jelas mengenai struktur matriks desain dan estimabilitas parameter. Oleh karena itu, pendekatan ini dapat dikembangkan lebih lanjut dalam bentuk implementasi komputasi atau perangkat lunak yang memudahkan analisis estimabilitas pada berbagai model linear.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., & Rorres, C. (2014). *Elementary linear algebra* (11th ed.). Wiley.

Björck, Å. (1996). *Numerical methods for least squares problems*. SIAM.

Carson, E., & Demmel, J. (2017). A residual replacement strategy for improving the maximum attainable accuracy of s-step Krylov subspace methods. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 38(3), 1113–1137.

Christensen, R. (1981). The estimability structure of linear models and submodels. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, *43*(2), 197–208.

Giraud, L., Langou, J., & Rozložník, M. (2016). On the loss of orthogonality in the Gram–Schmidt orthogonalization process.

Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (2013). *Matrix computations* (4th ed.). Johns Hopkins University Press.

Graybill, F. A. (1976). *Theory and application of the linear model*. Duxbury Press.

Horn, R. A., & Johnson, C. R. (2013). *Matrix analysis* (2nd ed.). Cambridge University Press.

Khodabandeh, A., & Teunissen, P. J. G. (2019). Integer estimability in GNSS networks. Journal of Geodesy, 93(9), 1805–1819. https://doi.org/10.1007/s00190-019-01282-6

Kounias, S., & Chalikias, M. (2008). *Estimability of parameters in a linear model and related characterizations*. *Statistics and Probability Letters*, 78(15), 2437–2439. https://doi.org/10.1016/j.spl.2008.02.031

Lay, D. C. (2012). *Linear Algebra and Its Applications* (4th ed.). Pearson.

Martinsson, P. G., & Tropp, J. A. (2020). Randomized numerical linear algebra: Foundations and algorithms. Acta Numerica, 29, 403–572. https://doi.org/10.1017/S0962492920000021

Milliken, G. A., & Johnson, D. E. (2009). Analysis of messy data: Volume 1. *Designed experiments* (2nd ed.). CRC Press.

Montgomery, D. C. (2017). *Design and Analysis of Experiments* (9th ed.). John Wiley & Sons.

Myers, R. H., & Milton, J. S. (1991). *A first course in the theory of linear statistical models.* Duxbury Press.

Nugroho, S. (2013). Penggunaan dekomposisi QR dalam estimabilitas parameter-parameter model linear. *Prosiding SEMIRATA 2013 1*(1).

Rao, C. R., & Mitra, S. K. (1971). *Generalized inverse of matrices and its applications*. John Wiley & Sons.

Searle, S. R. (1971). *Linear Models* (Wiley Clas). John Wiley & Sons, Inc.

Searle, S. R., Speed, F. M., & Milliken, G. A. (1980). Population marginal means in the linear model: An alternative to least squares means. *The American*

Statistician, *34*(4), 216–221.

Seber, G. A. F., & Lee, A. J. (2012). *Linear regression analysis* (2nd ed.). John Wiley & Sons.

Strang, G. (2009). *Introduction to Linear Algebra* (4th ed.). Wellesley-Cambridge Press.

Trefethen, L. N., & Bau, D., III. (1997). *Numerical linear algebra*. SIAM.

Usman, M., & Warsono. (2009). *Teori Model Linear Dan Aplikasinya*. Sinar Baru Algesindo.